UNIVERSIDAD DE HOLGUÍN

Facultad de Informática y Matemática

TRABAJO DE DIPLOMA EN OPCIÓN AL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICA

PROPIEDADES CUALITATIVAS DE LAS SOLUCIONES DE UN SISTEMA INTEGRO-DIFERENCIAL TIPO VOLTERRA

Autor: Sergio Ros Leyva

Tutor: Dr.C. José R. Velázquez Codina

Curso: 2014-2015

“Así como los objetos más fáciles de ver no son los demasiado grandes ni los demasiado pequeños, también las ideas más fáciles en matemáticas no son las demasiado complejas ni las demasiado simples.”

Bertrand Russell

DEDICATORIA

Este trabajo está dedicado en especial a quien lo hizo realizable, mi tutor José Velázquez Codina.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos la ayuda de profesores, familiares y amigos así como a mi prometida y a las Fuerzas Armadas Revolucionarias.

RESUMEN

En el desarrollo de la teoría relativa a las ecuaciones Diferenciales, Integrales e Integro-Diferenciales, con frecuencia resulta de gran utilidad, el empleo de ciertas desigualdades integrales e integro-diferenciales del tipo Gronwall-Bellman-Bihari, para la demostración de propiedades de las soluciones de estas ecuaciones. En este trabajo se demuestran dos desigualdades que generalizan resultados anteriores sobre esta temática, las que posteriormente son utilizadas para encontrar condiciones suficientes para las propiedades cualitativas de: Acotación, Atractividad y Crecimiento Lento de las soluciones de un sistema Integro-Diferencial del tipo Volterra.

ABSTRACT

The present work deals with the qualitative theory of integral-differential equations. The main aim is to obtain sufficient conditions in order to ensure some qualitative properties of the solutions of a Volterra type integral-differential system, as the boundedness, the attractivity and the slow growth. The method employed here makes essential use of integral-differential inequalities of Bellman-Gronwall-Bihari type, which are also obtained as an important part of the thesis.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Las desventajas que se tienen en algunas ocasiones en la formulación de ecuaciones diferenciales a problemas físicos y mecánicos, aunado a las condiciones de frontera, da como origen volver a proponer lo anterior en términos de una función desconocida bajo el signo de integración.

En 1888 el profesor de la Friedrich-Wilhelms Universität de Berlín, **Paul Du Bois-Reymond**, designó como **Ecuaciones Integrales** a los problemas en los que la función incógnita, aparecía bajo un signo integral. Precisamente, las **Ecuaciones Integrales** constituyen uno de los campos en los que la Matemática actual se ha nutrido y se nutre, de fértiles y cruciales problemas, las mismas han repercutido en su más de un siglo de existencia, en variadas ramas de la Matemática, entre las que se encuentran, entre otras, las **Ecuaciones Diferenciales**, el **Análisis Funcional** y la **Teoría Espectral de Operadores**.

Las palabras siguientes de **Du Bois Reymond**, ilustran bien a las claras el impacto de estas ecuaciones en el mundo matemático de la época:

"Las ecuaciones integrales me han surgido tan a menudo en la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales, que estoy convencido de que los progresos en ésta han de estar ligados con el avance de aquella, sobre la cual hoy por hoy, todo nos es desconocido".

En 1872, **Laplace**, para dar solución a determinadas ecuaciones diferenciales, introdujo las siguientes funciones auxiliares:

$$f(x) = \int_a^b \exp(xt)\varphi(t)dt, \quad g(x) = \int_a^b t^{x-1}\varphi(t)dt,$$

donde φ es la función incógnita.

Liouville, **Sturm y J. Misthal**, operaron con ecuaciones integrales sin mencionar este nombre. Los primeros resultados generales en esta dirección, fueron obtenidos por **J.M. Le Roux** (1894) y **V. Volterra**(1896). Ambos establecieron teoremas de existencia y unicidad para las soluciones de las ecuaciones del tipo,

$$f(x) + \int_a^x k(t,x) f(t)dt = g(x),$$

mediante hipótesis adecuadas sobre el núcleo K. El trabajo de **Volterra** tuvo una mayor influencia posteriormente, al destacar las propiedades algebraicas del Operador, lo que permitió obtener la solución en términos de una nueva ecuación integral de segunda especie, cuyo núcleo (o resolvente), viene dado por la suma de la serie de los núcleos iterados.

Fredholm, realizó una visita a París en 1899, donde entró en contacto con los principales matemáticos de la época, entre ellos **Poincaré**. En 1900 publicó una nota titulada **"Sur une nouvelle méthode pour la resolution du probleme de Dirichlet"**, completada tres años más tarde con un artículo en Acta Math., el que provocó un gran impacto en la comunidad matemática de la época. En este artículo de 1903, **Fredholm** publicó su primer trabajo, brindando un conjunto de importantes conclusiones, entre ellas, la conocida **Alternativa de Fredholm** (ver por ejemplo, **[Kra-Ki-Ma 82], [Mik71]** y **[Pet71]**), las mismas supusieron el punto de partida de la moderna **Teoría Espectral de Operadores**, e influyeron decisivamente en el desarrollo posterior del **Análisis Funcional**. Estos resultados de **Fredholm** se extendieron rápidamente y llegaron a Gottingen, haciendo que **Hilbert** se interesara vivamente por ese tema, el cual entre 1904 y 1910 publicó 6 artículos sobre este tópico.

A partir de los años 50 del pasado siglo xx, se comienza a dedicar atención al estudio de **Ecuaciones Integrales**, en las que la función incógnita estaba también afectada por una derivada o un cierto operador diferencial, ecuaciones que son denominadas a partir de ese momento, como **Ecuaciones Integro-Diferenciales**. No obstante, no es hasta los años 70 que el estudio de diversas **propiedades cualitativas** de las soluciones de ciertas **ecuaciones Integrales e Integro-Diferenciales** se generaliza y una gran variedad de resultados son obtenidos. Las técnicas utilizadas en dicho estudio y que se han mantenido básicamente hasta nuestros días, se pueden clasificar en tres grandes grupos, lo que no excluye que en determinados trabajos, se combinen algunas de éstas. Las técnicas que hemos hecho referencia, son las siguientes:

i. Las que se basan en el uso de **Desigualdades Integro-Diferenciales del tipo Bellman-Gronwall-Bihari,** y propiedades inherentes al espacio donde está definida la función incógnita

ii. Las que utilizan **Funcionales de Liapunov** y que son una extensión a las Ecuaciones Integrales e Integro-Diferenciales, de los procedimientos y técnicas del **Segundo Método de Liapunov,** para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

iii. Las que usan herramientas del **Análisis Funcional** en general, y de la **Teoría de Operadores,** en particular.

A partir de los trabajos de **Bihari** en los años 60 del pasado siglo y el desarrollo de la teoría de **desigualdades diferenciales**, se han logrado obtener diversas generalizaciones y extensiones de conocidas **desigualdades diferenciales,** las que han sido utilizadas con éxito en el estudio de diversas propiedades cualitativas de las soluciones de **ecuaciones Integrales** e **Integro-Diferenciales.**

Algunos de los trabajos que más han influido en la segunda de las direcciones señaladas son **[Yos 66a]**, **[Bell-Coo 63]**, **[Gro-Mi 73]** y **[Bur 85]**; entre otros, y con respecto a la última línea, uno de los textos que marcó las direcciones y métodos generales más empleados en los años siguientes, y que aún mantiene su valor, es el **[Kra-Sa-Pus-So 66]**, donde se expone un enfoque unificado para el tratamiento de diversas problemáticas que conducen a problemas de fronteras no lineales para las **Ecuaciones Integrales** e **Integro-Diferenciales**.

En los años 60 y principios de los 70, un numeroso grupo de matemáticos se dedicó a este tema, una pequeña muestra es **[Dri 62], [Cop 65], [Mill 71a], [Gro-Mi 73b], [Sei 73]** y **[Gri-Sei 75],** entre otros.

Actualmente, existe una amplia literatura respecto a la **Teoría Cualitativa de las Ecuaciones Integro-Diferenciales,** que constituye una extensión de las principales líneas de investigación de esta Teoría, en el caso de las **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.**

Lo anteriormente expresado, muestra cómo internacionalmente, es de gran importancia y actualidad el estudio de diversas **propiedades cualitativas** de las soluciones de diferentes **Ecuaciones** o **Sistemas de Ecuaciones Integro-Diferenciales tipo Volterra**. En esta tesis en particular, se utilizarán como modelo los sistemas dados en **[Mah 87]**, los que a partir de estos momentos se identificarán como:

$$x'(t) = A(t)x(t) + \int_0^t B(t,s)x(s)ds + f(t), \qquad (1)$$

$$y'(t) = A(t)y(t) + \int_0^t B(t,s)y(s)ds, \qquad (2)$$

donde $A(t)$ y $B(t,s)$ son matrices cuadradas de orden n continuas, $n \geq 1$, $0 \leq s \leq t < +\infty$ y $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathrm{R}^n$, es continua.

Los elementos expuestos anteriormente, revelan el **Problema Científico**: ¿Cómo continuar el desarrollo de la Teoría Cualitativa de los sistemas Integro-Diferenciales (1)?

En correspondencia con el problema científico planteado, se ha propuesto como **Objetivo General,** que es el teórico fundamental de esta tesis, el siguiente:

Determinar nuevas condiciones suficientes que garanticen un conjunto de propiedades cualitativas de las soluciones del sistema Integro-Diferencial (1).

Este Objetivo General se le dará cumplimiento a través del logro de los objetivos parciales que se muestran continuación.

- Obtener nuevas desigualdades Integro-Diferenciales del tipo Bellman-Gronwall-Bihari.
- Aplicar las desigualdades integro-diferenciales obtenidas y la fórmula de Variación de los Parámetros de Grossman y Miller, en la determinación de condiciones suficientes para garantizar la Acotación, la Atractividad y el Crecimiento Lento de las soluciones del sistema (1).

La Estabilidad y Estabilidad Uniforme para la solución nula, así como para la Acotación y la Acotación Uniforme de todas las soluciones del sistema (2) son resultados en desarrollo que podrán ser vistos en posteriores trabajos.

APORTE CIENTÍFICO Y VALIDACIÓN DE LOS RESULTADOS

Se construyen dos desigualdades integro-diferenciales, que son extensiones o generalizaciones de las obtenidas en **[Pach77]**. Las mismas se aplican en las demostraciones de dos teoremas que son condiciones suficientes para la **Acotación** de las soluciones del sistema (1). De cada uno de estos teoremas se infieren corolarios para la **Atractividad** y el **Crecimiento Lento** de dichas soluciones.

Los resultados parciales de nuestra investigación han sido expuestos en:

ESTRUCTURA DE LA TESIS

La Tesis consta de introducción, dos capítulos, conclusiones, recomendaciones y bibliografía.

El primer capítulo está dedicado a exponer los aspectos teóricos indispensables recogidos en la bibliografía consultada, los que sirven de fundamentos para la obtención de los resultados que se muestran en el capítulo II.

El capítulo II está compuesto por dos epígrafes, en el primero de ellos se construyen nuevas **desigualdades integrales** e **integro-diferenciales** del tipo **Gronwall–Bellman–Bihari** de forma similar a las obtenidas en **[Pach 77] y [Vel].** Posteriormente, estos resultados muestran su utilidad en el epígrafe 2.2, en la obtención de condiciones suficientes para la determinación de la **acotación,** el **crecimiento lento** y la **atractividad** de las soluciones del sistema (1).

CAPÍTULO I

Un trabajo fundamental en el desarrollo de la teoría cualitativa de las ecuaciones integro-diferenciales tipo Volterra fue publicado en **[Mill 71a]**. Aquí se consideró el sistema:

$$x'(t) = Ax(t) + \int_0^t C(t-s)x(s)ds, \qquad (0.1)$$

donde A es una matriz constante de orden n x n, n ≥ 1, $C(t)$ es una matriz funcional cuadrada de orden n, continua sobre $[0, +\infty)$, y se demostró el siguiente resultado:

Teorema (Miller): Sea $C \in \mathrm{L}^1[0, +\infty)$. *La solución* $x = 0$ *del sistema (0.1) es* ***asintóticamente estable de manera uniforme*** *si y solo si toda solución suya está en* $\mathrm{L}^1[0, +\infty)$.

Este trabajo ha servido de base a investigaciones posteriores, entre las que se destacan:

- [Kri-Ter 88], donde se retomó la ecuación abordada en **[Mill 71a]** y se estudiaron condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales, existe una matriz cuadrada D tal que $X(t) -$ D $\in \mathrm{L}^1$. Esta propiedad es usada para el estudio de la existencia de **soluciones periódicas**, en la correspondiente **ecuación perturbada**.

- En **[Kri 88]** se determina para la misma ecuación citada, una región de **estabilidad asintótica uniforme**, que incluye resultados anteriores de **[Bra 78]** y **[Jor 79]**, no solo en el caso escalar, sino también en el caso n-dimensional.

- [Bur-Hua-Mah 85], donde se precisan resultados sobre la **convergencia a cero** de ciertas expresiones “pesadas”, que contienen a la función incógnita y su derivada.

-Para el sistema $$x'(t) = A\,x(t) + \int_0^t C(t,s)x(s)ds, \qquad (0.2)$$

[Ruan 89] brinda condiciones suficientes para la **estabilidad** de la solución nula, mediante una **descomposición del sistema** y una subsecuente aplicación de una **Funcional de Liapunov.**

--Algunos resultados de **estabilidad según Liapunov** para la ecuación (0.2), con $0 \leq s \leq t <+ \infty$, donde A y $C(t,s)$ son matrices cuadradas de orden n, la primera de ellas constante y la segunda continua, se presentan en **[Tang Wang 90]**, aquí se brindan algunos métodos de construcción de **Funcionales de Liapunov**.

-- La ecuación (0.2) con núcleo de tipo convolución y "forcing" no lineal f(t, x), $x \in$ **R^n**, donde C es una matriz cuadrada de orden n, continua en $I = \{t \in R\colon t > t_0\}$, para la cual se cumple además, que $\|C(t)\| \leq c\exp(-\beta_0 t),\ c > 0,\ \beta_0 > 0$, y adicionalmente f(t, x) es una función n-vectorial holomorfa con respecto a x, para $\|x\|$ pequeña y $t \in I$, f(t, x)=O($\|x\|$), para $\|x\| \longrightarrow 0$, se analiza en **[Ser 91],** donde se estudia la **estabilidad** de la solución nula de dicha ecuación.

-- La consideración de una cierta derivada "pesada" en el miembro izquierdo de (0.2), permite estudiar diversas propiedades de **acotación** y **estabilidad** en **[Mor 91]**.

-- El estudio de sistemas lineales de tipo Volterra de la clase de ecuaciones (0.2) (tanto en el caso vectorial, como escalar con núcleo de tipo convolución), se realiza en **[Mur 92]** y se brindan condiciones suficientes, en términos de A y C(t, s), para la **estabilidad asintótica uniforme** de la solución nula de estos sistemas.

-- En **[Mur 92]** se analiza el comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación (0.2), cuyo núcleo es de tipo convolución, estos resultados generalizan los obtenidos en **[Bur-Mah 83], [Gro-Mill 73]** y **[Mill 71a]**.

- Una variación de (0.2) es la ecuación,

$$x'(t) = A(t)x(t) + \int_{\alpha}^{t} k(t,s)x(s)ds + f(t), \qquad (0.3)$$

donde $\alpha \in (-\infty, 0\,]$, $t \geq \alpha$. Esta ecuación se estudia en **[Si-War 90]** y se establece una complicada desigualdad tipo **Gronwall**, para su análisis cualitativo. Extensiones de estos resultados, se realizan en **[Ham-Yos 90]**.

- La ecuación (0.3), con f ≡ 0 y $\alpha = 0$, es considerada en **[Hin-Mur 91]**, donde A(t) y B(t, t + s) son **cuasi-periódicas** en t y se demuestra que la solución nula de ésta, es **asintóticamente estable** de **manera uniforme** si y sólo si, la siguiente desigualdad es satisfecha:

$$\sup_{t \geq t_0 \geq 0} \left\{ |R(t,\sigma)| + \int_0^t |R(t,s)|ds \right\} < +\infty.$$

- Los sistemas indirectamente controlables de la forma,

$$\sigma'(t) = \alpha(t) - \int_0^t \gamma(1-\lambda)\varphi(\sigma(\lambda),\lambda)d\lambda, \quad (t > 0),$$

donde φ una función continua, que satisface la condición $\varphi(0, t) = 0$, son estudiados en **[Leo-Smir 88]**. En este trabajo se brinda un nuevo criterio para la **convergencia a cero** de las soluciones de este sistema, cuando t $\longrightarrow + \infty$. El principal instrumento en la prueba, es **el Método de las Estimaciones Integrales a Priori.**

- En **[Jac-Kla-O 88],** se estudia el **comportamiento asintótico** de las soluciones de la ecuación,

$$y'(t) = \tau\, y(t) + \int_0^t (\lambda + \mu\, t + \nu\, s)y(s)ds, \qquad \mathrm{y}(0) = 1,$$

donde t ≥ 0. Además τ, λ, μ y ν son parámetros reales tales que $\mu + \nu \neq 0$. Para este propósito se utiliza una cierta **ecuación diferencial auxiliar** y se obtienen condiciones suficientes para la **acotación** de las soluciones exactas de dicha ecuación.

- Dado el sistema,

$$x'(t) = x(t)B(t) + \int_0^t x(s)k(t,s)ds + F(t),$$

donde $F(t)$ es una matriz cuadrada continua de orden n, se estudia en **[Mur-Sli-Nar 88]** el **comportamiento asintótico** de las soluciones de este sistema, cuya matriz $B(t)$ no es necesariamente **estable**. Se obtienen estimaciones por el **método de las desigualdades integrales.**

- En **[Mah 89],** se investigan sistemas integro-diferenciales de la forma,

$$x'(t) = Ax(t) + \int_0^t \left[C(t,s) + D(t-s) + K\right] x(s)ds,$$

donde A y K son matrices cuadradas de orden n, $C(t,s)$ es una matriz cuadrada de orden n continua en $0 \le s \le t < +\infty$, $D(t)$ es una matriz cuadrada de orden n, continuamente diferenciable sobre el semieje $0 \le t < +\infty$. Se establecen condiciones suficientes para que todas las soluciones del sistema **tiendan a cero, cuando t $\longrightarrow +\infty$.**

- El estudio de la **convergencia asintótica** en ecuaciones integro-diferenciales semilineales, se aborda en **[Fitz 90]**, en el marco de un espacio de funciones continuas **uniformemente acotadas**. Un estudio similar había sido realizado en **[Tang 89]**.

- Tres teoremas de comparación para la **oscilación** de las soluciones de ecuaciones integro-diferenciales de tipo Volterra-Stieltjes, se brindan en **[Zhi 92a]**, los que generalizan los obtenidos en **[Min 83]**. En **[Zhi 92b],** se discute extensivamente la **oscilación** de las soluciones de ecuaciones del tipo antes mencionado y se obtienen nuevos resultados, que difieren de los logrados en **[Min 83]**.

- En **[Par-Nis 92]** se dan condiciones suficientes para la **oscilación, no-oscilación** y el comportamiento **asintótico** de la ecuación,

$$x'(t) = f(t) - \int_0^t a(t,s)g(s,x(s))ds, \quad x(0) = x_0, \; t \ge t_0, \; I = [0,+\infty[,$$

donde $f : I \to \mathbf{R}$, $g : I x \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $a : I^2 \to \mathbf{R}$, son continuas en sus argumentos y satisfacen las condiciones $a(t,s) = 0$ para s > t y $a(t,s) \ge 0$, para s ≤ t.

- Usando Transformadas de Laplace en **[Wu 93]** se encuentran condiciones suficientes bajo las cuales:

La ecuación integral de Volterra de tipo convolución,

$$x(t) = f(t) + \int_0^t \sum_{i=1}^n a_i(t-s)(s-r_i)ds, \; t \ge 0,$$

La ecuación integral en diferencias,

$$x(t)=\sum_{j=1}^{m} p_j x(t-\sigma_j) = f(t)+\int_0^t \sum_{i=1}^{n} a_i(t-s)(s-r_i)ds,\ \ \mathrm{t}\geq 0,$$

y la ecuación diferencial,

$$\frac{d}{dt}\left[x(t)+\sum_{j=1}^{m} p_j x(t-\sigma_j)\right]+\sum_{i=1}^{n} q_i(t-s)(s-r_i)ds = \mathrm{f(t)},\quad \text{para } \ \mathrm{t}\geq 0$$

donde $f \in C($ $\mathbf{R}^+$, **R),** $a_i \in L^1_{loc}($ $\mathbf{R}^+$), $r_i, q_i, \sigma_j \in$ **R** para i = 1, 2,..., n.

j =1, 2, ..., m; poseen determinadas propiedades cualitativas.

- En **[Wu 95]** se investiga la existencia de soluciones positivas para la ecuación integro- diferencial:

$$x'(t)+\int_0^t P(t,s)x(g(s))ds = 0,\quad \mathrm{t}\geq 0,$$

donde, $P \in C($ $\mathbf{R}^+$x $\mathbf{R}^+$, $\mathbf{R}^+$**)** y $g \in C($ $\mathbf{R}^+$, $\mathbf{R}^+$**)**. Además g es derivable, $g(t)<t,\ \text{para}\, t\in(0,+\infty)$ y $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = \lim\limits_{t\to\infty}[t-g(t)] = +\infty.$

- El estudio de la existencia y unicidad de las soluciones para el problema de **Cauchy** y **problemas de contorno** para ecuaciones **Integro-Diferenciales** de primer orden, es abordado por ejemplo en **[Nto-Sta 94 a], [Nto-Sta 94 b], [Nto 97], [Nto-Sta 97], [Nto 98 a], [Nto 98 b], [Nto-Sta 98]**. En **[Nto-Sta 99]** se estudia el mismo problema para una ecuación **Integral** y en **[Nto-Sta 2000]** se obtienen resultados para una ecuación **Integro-Diferencial** de segundo orden.

- En **[Nik 97]** se estudian las propiedades de las soluciones de la ecuación **Integral** $\int_0^1 a(t)f(tx)dt = f(qx),\ \ 0<x\leq 1,\ \text{ donde } a:[0,\ 1]\to$ **R** es no negativa e integrable y $q\in\,]0,1[$.

- El **comportamiento asintótico** y la **acotación** de las soluciones de la ecuación **Integro- Diferencial** tipo Volterra,

$$x'(t) = A(t)x(t)+\int_0^t C(t,s)x(s)ds+\int_0^t G(t,s,x(s))ds+f(t),$$

se aborda en **[Xu 97]**. Aquí $x \in$ **R**$^{\mathbf{n}}$, $A(t)$ y $C(t,s)$ son matrices cuadradas de orden n, continuas y $f(t)$ es una función n-vectorial, la función $G(t,s,x(s))$ es el parámetro desconocido con respecto a $x(s)$.

- Condiciones explícitas para la estabilidad de la solución nula de una de una ecuación **Integro-Diferencial** lineal de coeficientes periódicos**,** se obtienen en **[Dro 99]**.

- En **[Pach 2000ñ]** se establecen nuevas desigualdades integrales las que son aplicadas en la obtención de condiciones suficientes para la **acotación** de una cierta ecuación **Integro-Diferencial** dada.

Resultados que han influido decisivamente en la conformación de nuestra **Tesis,** son los obtenidos en **[Pach 76, 77]**, **[Mah 87] y [Har-Yon-Ito 90 b].**

- En **[Pach76i]** se buscan condiciones suficientes para garantizar la **acotación**, el **crecimiento lento** y la **atractividad** de las soluciones de la ecuación,

$$x'(t) = Ax(t) + \int_0^t B(t-s)x(s)ds \;\; + x(t)H(t, x(t), \sigma(t)), \quad x(0) = x_0,$$

donde $\sigma(t) = f(t) + \int_v^t k(t,s)x(s)ds,\; 0 < t < +\infty,$ A y $B(t)$, son matrices cuadradas de orden n. Además x, H, o, f y k, son funciones vectoriales con n componentes.

La técnica de trabajo consiste en la construcción de una cierta **desigualdad integral** o **integro-diferencial** y la utilización de la **Fórmula de Variación de los Parámetros** de **Grossman y Miller [Gro-Mill 70a],** que expresa la solución de esta ecuación y en **[Pach77j]**, se obtienen un conjunto de desigualdades integro-diferenciales del tipo **Bellman-Gronwall-Bihari**. Entre ellas, las que a continuación se señalan:

- En **[Mah 87]** se consideran los sistemas integro-diferenciales:

$$x'(t) = A(t)x(t) + \int_0^t B(t,s)x(s)ds + f(t), \text{ y } y'(t) = A(t)y(t) + \int_0^t B(t,s)y(s)ds,$$

donde A(t) y B(t, s) son matrices cuadradas de orden n continuas, n ≥1, $0 \le s \le t < +\infty$ y $f:[0, +\infty) \rightarrow$ $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$, continua.

Diferentes tipos de **estabilidad** para la solución nula del sistema:

$$x'(t) = A(t)x(t) + \int_0^t C\,(t, s, x(s))ds,$$

donde A(t) es una matriz cuadrada de orden n, continua en [0, + ∞) y C(t, s, x(s)) es una función vectorial n-dimensional continua en $0 \le s \le t < +\infty$, $x \in$ $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$, son obtenidas en **[Har-Yon-Ito 90 b]**. El principal instrumento de trabajo es la **Fórmula de Variación de los Parámetros**.

- Tomando como premisa que las soluciones del sistema,

$$y'(t) = A(t)y(t) + \int_0^t C(t,s)y(s)ds,$$

sean **uniformemente acotadas** y **finalmente uniformemente acotadas**, en **[Har-Yon-Ito 89 a]** se obtienen condiciones suficientes para que las soluciones del sistema,

$$x'(t) = A(t)x(t) + \int_0^t C(t,s)x(s)ds + f(t),$$

cumplan las mismas propiedades cualitativas que el sistema no perturbado.

Lo anteriormente expresado, muestra cómo internacionalmente, es de gran importancia y actualidad el estudio de diversas **propiedades cualitativas** de las soluciones de diferentes **Ecuaciones** o **Sistemas de Ecuaciones Integro-diferenciales tipo Volterra**, en particular utilizaremos como modelo los sistemas dados en **[Mah 87]**, los que a partir de estos momentos los identificaremos como:

$$x'(t) = A(t)x(t) + \int_0^t B(t,s)x(s)ds + f(t), \qquad (1)$$

$$y'(t) = A(t)y(t) + \int_0^t B(t,s)y(s)ds, \qquad (2)$$

En **[Pach77j]** fueron demostrados varios teoremas que son básicos en la obtención de los resultados que se expondrán en el primer epígrafe del siguiente capítulo, entre ellos.

Teorema A.

$$\text{Si } x'(t) \le a(t) + b(t)\int_0^t \mathrm{c(s)}\left[x(\mathrm{s}) + x'(\mathrm{s})\right]ds,$$

para todo $t \in I$.

Entonces, $x'(t) \le a(t) + b(t)\left\{\int_0^t c(s)\left[A(s)+B(s)\right]\exp\left[\int_s^t c(\tau)\left[b(\tau)-1\right]d\tau\right]ds\right\}$, para todo $t \in I$.

$$\text{Donde } A(t) = x(0) + a(t) + \int_0^t a(s)ds\,,$$

$$B(t) = \int_0^t c(s)A(s)\exp\left\{\int_s^t \left[b(\tau)+c(\tau)+b(\tau)c(\tau)\right]d\tau\right\}ds$$

Teorema B.

Si $x'(t) \le k + \int_0^t b(s)x'(s)\left[x(s)+x'(s)\right]ds, \qquad k \in \mathbf{R}_+^*$, para todo $t \in I$.

Entonces,

$$x'(t) \le k\exp\left\{\int_0^t b(s)\left[\frac{\left[x(0)+k\right]\exp s}{1-\left[x(0)+k\right]\int_o^s \exp\tau\, b(\tau)d\tau}\right]ds\right\},$$

Donde $\int_0^t b(\tau)\exp\tau d\tau < \left[x(0)+k\right]^{-1}$, para todo $t \in I$.

Aquí intervienen un conjunto de funciones continuas $x(t) \ge 0$, ($x(0) \ne 0$), $x'(t) \ge 0$, $a(t) \ge 0$, $b(t) \ge 0$, $c(t) \ge 0$ y además $\eta(t)$ es positiva y monótona no decreciente, definidas en el intervalo $I = [0, +\infty)$

CAPÍTULO II

En la primera parte de este capítulo se construirán desigualdades y luego el siguiente epígrafe se utilizarán las mismas, para obtener condiciones suficientes para la **acotación,** el **crecimiento lento** y la **atractividad** de las soluciones $x(t)$ del sistema (1). A lo largo de este capítulo se tomará en consideración un conjunto de funciones que cumplen las mismas características que las definidas en **[Pach77j]** así como el intervalo donde se define t.

Construcción de Desigualdades integrales e integro-diferenciales de tipo Gronwall-Bellman-Bihari.

La primera utilidad de las desigualdades que se obtendrán a continuación, consiste en que las mismas permiten obtener mayoraciones para las funciones desconocidas $x(t)$ y $x'(t)$, en términos las funciones dadas.

Teorema 1.1

Si $x'(t) \le \dfrac{a(t)}{1-a(t)} x(t) + b(t)\displaystyle\int_0^t \dfrac{a(\mathrm{s})}{1-a(s)}[x(\mathrm{s}) + x'(\mathrm{s})]\mathrm{ds}.$ (1.1)

para todo $t \in I$

y además se cumple que $0 < a(s) \le a(t) < 1,$ para todo $0 < s \le t$.

Se tendrá que:

$$x(t) \le x_0 + \exp\left[F(t)\right]\int_0^t E(\mathrm{s})\exp\left[- F(\mathrm{s})\right]\mathrm{ds}. \tag{1.2}$$

donde $E(t) = \dfrac{x_0 a(\mathrm{t})}{1-a(\mathrm{t})}$ y $F(t) = \displaystyle\int_0^t \left[\dfrac{a(\mathrm{r})[\mathrm{b}(\mathrm{r})+1]}{1-a(\mathrm{r})} + \mathrm{b}(\mathrm{r})\right]\mathrm{dr}$.

Demostración

De (1.1) se infiere que

$$x'(t) \le a(t)\left[x(\mathrm{t}) + x'(\mathrm{t})\right] + b(t)\left[1 - a(\mathrm{t})\right]\int_0^{\mathrm{t}} \frac{a(\mathrm{s})}{1 - a(s)}[x(\mathrm{s}) + x'(\mathrm{s})]\mathrm{ds}$$

$$x'(t) \le a(t)\left[x(\mathrm{t}) + x'(\mathrm{t})\right] + b(t)\int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{a(s)}[x(\mathrm{s}) + x'(\mathrm{s})]\mathrm{ds} \tag{1.3}$$

Sea, $m(t) = \int_0^t a(s)\left[x(s) + x'(s)\right]ds$, (1.4)

Así, $m(0) = 0$ y $m'(t) = a(t)\left[x(t) + x'(t)\right]$ (1.5)

De (1.1), (1.3) y (1.4) se obtiene que:

$$x'(t) \le m'(t) + b(t)m(t) \tag{1.6}$$

Por otra parte, integrando (1.6) desde 0 hasta t , resulta que:

$$x(t) \le x(0) + m(t) + \int_0^t b(s)m(s)ds. \tag{1.7}$$

Sustituyendo (1.6) y (1.7) en (1.5) es válida la desigualdad

$$m'(t) \le a(t)\left[x(0) + m(t) + \int_0^t b(s)m(s)ds + m'(t) + b(t)m(t)\right],$$

por lo que:

$$m'(t) \le \frac{a(t)}{1 - a(t)}\left[x(0) + m(t) + \int_0^t b(s)m(s)ds + b(t)m(t)\right]. \tag{1.8}$$

Sea, $v(t) = m(t) + \int_0^t b(s)m(s)ds,$ (1.9)

Entonces $v'(t) = m'(t) + b(t)m(t)$ (1.10)

De (1.8), (1.9) y (1.10) se obtiene fácilmente la estimación:

$$v'(t) \le \left\{\frac{a(t)\left[b(t) + 1\right]}{1 - a(t)} + b(t)\right\}v(t) + E(t), \quad \text{para } E(t) = \frac{x_0 a(\mathrm{t})}{1 - a(\mathrm{t})},$$

y así $v(t) \le \int_0^t E(s)\exp\left\{\int_s^t \left[\frac{a(\tau)\left[b(\tau) + 1\right]}{1 - a(\tau)} + b(\tau)\right]d\tau\right\}ds.$ (1.11)

Hagamos $F(t)=\int_0^t\left[\frac{a(\tau)[b(\tau)+1]}{1-a(\tau)}+b(\tau)\right]d\tau,$ entonces de (1.11) y de esta última igualdad, se deduce la siguiente relación,

$$v(t)\le \exp[F(t)]\int_0^t E(s)\exp[-F(s)]ds. \qquad (1.12)$$

Finalmente de (1.7), (1.9) y (1.12) se infiere que:

$$x(t)\le x(0)+v(t)\le x(0)+\exp[F(t)]\int_0^t E(s)\exp[-F(s)]ds$$

como se quería.

Teorema 1.2

Si $x'(t)\le x(t)+\int_0^t b(s)x'(s)[x(s)+x'(s)]ds,$ (2.1)

Para todo $t\in I.$

Donde $\int_0^t b(\tau)\exp 2\tau d\tau<\frac{1}{2x(0)},$ para todo $t\in I.$

Entonces,

$$x(t)\le \frac{x(0)}{1-2x(0)\int_0^t b(s)\exp s ds} \qquad (2.2)$$

Demostración

Designemos por $m(t)$ el miembro derecho de (2.1), de esta forma $m(0)=x(0)$ y además,

$$m'(t)=x'(t)+b(t)x'(t)[x(t)+x'(t)]\le m(t)+b(t)m(t)[x(t)+m(t)] \qquad (2.3)$$

Obsérvese de (2.1) que $x'(t)\le m(t)$. Por lo tanto, integrando esta última desigualdad desde 0 hasta t se obtiene:

$$x(t)\le x(0)+\int_0^t m(s)ds. \qquad (2.4)$$

Además, si se tiene en cuenta que $x'(t)\le m(t)$ y (2.4), es inmediata la desigualdad:

$$m'(t) \le m(t) + b(t)m(t)\left[x(0) + m(t) + \int_0^t m(s)\, ds \right].$$

$$m'(t) \le [b(t)+1]m(t)\left[x(0) + m(t) + \int_0^t m(s)\, ds \right] \tag{2.5}$$

Sea, $v(t) = x(0) + m(t) + \int_0^t m(s)\, ds.$ y $v(0) = 2x(0)$ (2.6)

Sustituyendo en (2.5) la estimación (2.6) se obtiene:

$$m'(t) \le [b(t)+1]v^2(t) \tag{2.7}$$

Luego de (2.6), $v'(t) = m'(t) + m(t)$ (2.8)

Entonces, de (2.6) y (2.7) se obtiene

$$v'(t) \le [b(t)+1]v^2(t) + v(t) \tag{2.9}$$

Resolviendo la ecuación diferencial (2.9) se tiene que:

$$v(t) \le \frac{2x(0)\exp t}{1 - 2x(0)\int_0^t [b(s)+1]\exp s\, ds}. \tag{2.10}$$

Volviendo a (2.5) y usando (2.10)

$$m'(t) \le [b(t)+1]m(t)\frac{2x(0)\exp t}{1 - 2x(0)\int_0^t [b(s)+1]\exp sds}$$

$$\frac{m'(t)}{m(t)} \le [b(t)+1]\frac{2x(0)\exp t}{1 - 2x(0)\int_0^t [b(s)+1]\exp sds} \tag{2.11}$$

Integrando desde 0 hasta t esta última desigualdad (2.11) resulta que

$$m(t) \le \frac{x(0)}{1 - 2x(0)\int_0^t b(s)\exp sds}$$

Como $x(t) \le m(t)$

Finalmente se tiene (2.2)

$$x(t) \le \frac{x(0)}{1 - 2x(0)\int_0^t b(s)\exp sds}$$

Como se quería.

2.2 Análisis de la Acotación, Atractividad y Crecimiento Lento de las soluciones de un Sistema Integro-diferencial tipo Volterra con el uso de desigualdades del tipo Gronwall-Bellman-Bihari.

Uno de los métodos de trabajo para el estudio de diversas propiedades cualitativas de las soluciones de los Sistemas Integro-Diferenciales tipo Volterra, consiste en construir desigualdades integrales e integro-diferenciales de tipo Gronwall-Bellman-Bihari.

En esta sección se establecen y se demuestran, los principales resultados del trabajo, los mismos están referidos al enunciado y demostración de condiciones suficientes, que aseguran el cumplimiento de algunas propiedades cualitativas de las soluciones del sistema (1). Estas propiedades están referidas al acotamiento, la atractividad y el crecimiento lento de dichas soluciones.

A continuación, precisamos algunos de los conceptos básicos, que serán usados posteriormente.

Para un $t_0 \ge 0$ y una función continua $\phi : [0, t_0] \to \mathbf{R^n}$, una solución del sistema (1) es una función $x : [0, +\infty) \to \mathbf{R^n}$, que satisface este sistema para $t \ge t_0$ y tal que $x(t) = \phi(t)$, para $0 \le t \le t_0$. Bajo las condiciones establecidas, el sistema (1) tiene solución única, denotada por $x(t, t_0, \phi)$, o simplemente x (t) . La solución $x(t)$ = 0 del sistema (2) se llama solución nula. Las soluciones del sistema (1) que satisfacen la condición inicial $x(0) = x_0$, están dadas por la Fórmula de Variación de los Parámetros:

$$x(t) = R(t,0)x_0 + \int_0^t R(t,s) f(s)ds, \text{ donde } R(t,s)$$

es una matriz cuadrada de orden n que satisface la ecuación

$$\frac{\partial R(t,s)}{\partial s} = -R(t,s)A(s) - \int_s^t R(t,u)B(u,s)du, \qquad R(t,t) = I \; .$$

Para detalles, ver a Grossman and Miller en [Gro-Mill 70a].

A continuación precisamos tres definiciones, las que facilitarán la comprensión de los resultados que se expondrán en lo adelante.

Definición 1.1. Una función continua $x(t)$ es lentamente creciente sí y sólo sí para todo $\alpha > 0$, existe una constante $M > 0$ (que puede depender de α), tal que $|x(t)| \leq M \exp(\alpha\, t)$.

Definición 1.2**.** Para una función $\phi \in C\,(\mathbf{R}_+)$ y $t \in \mathbf{R}_+$, se define la norma de esta función por, $\|\phi\|_{t_0} = \text{máx}\{|\phi(t)| : 0 \leq t \leq t_0\}$.

Definición 1.3. La solución $x(t)$ del sistema (1) es atractiva, si para todo $t_0 \geq 0$, existe $\delta_0 \geq 0$, tal que si $\|\phi\|_{t_0} < \delta_0$, entonces $|x(t; t_0, \phi)| \to 0$ cuando $t \to +\infty$.

Mostremos ahora, cómo es posible utilizar las dos primeras desigualdades obtenidas en el primer epígrafe de este capítulo, en la demostración de los Teoremas 2.1 y 2.2. En estos se dan condiciones suficientes para garantizar la acotación de las soluciones del sistema (1). Además, de cada uno de estos teoremas se obtendrán dos corolarios, el primero de ellos relativo a la atractividad de estas soluciones y el segundo de estos, a su crecimiento lento. Adicionalmente, para el caso del primer teorema se ofrecerá un ejemplo, donde se muestra la aplicación de los mismos en la determinación de la acotación de las soluciones, además, que la clase de las funciones $x(t)$ (soluciones del sistema (1)), que satisfacen las premisas impuestas, es no vacía.

Teorema 2.1

Sea $x(t)$ solución del sistema (1), tal que su derivada $x'(t)$ sea una función continua. Supóngase que se satisfacen las siguientes condiciones:

(a) $\left|\frac{\partial R(t,s)}{\partial t} f(s)\right| \leq b(t)a(s)\left[|x(s)| + |x'(s)|\right]$

(b) $|R'(t,0)x(0)| + |f(t)| \leq a(t)\left[|x(s)| + |x'(s)|\right]$

(c) $\int_0^{+\infty} \frac{a(t)}{1-a(t)} dt < +\infty$

(d) $F(t) \leq k_1, k_1 \in R_+^*$, donde $F(t)$ está dada en el Teorema 1.1

Entonces, $x(t)$ está acotada.

Demostración

Dado que $x(t) = R(t,0)x(0) + \int_0^t R(t,s) f(s) ds.$

Derivando $x(t), x'(t) = R'(t,0)x(0) + \int_0^t \frac{\partial R(t,s)}{\partial t} f(s) ds + f(t).$

Aplicando la desigualdad triangular:

$$|x'(t)| \leq |R'(t,0)x(0)| + \int_0^t \left|\frac{\partial R(t,s)}{\partial t} f(s)\right| ds + |f(t)|$$

Luego aplicando las condiciones (a) $\left|\frac{\partial R(t,s)}{\partial t} f(s)\right| \leq b(t)a(s)\left[|x(s)| + |x'(s)|\right]$

y (b) $|R'(t,0)x(0)| + |f(t)| \leq a(t)\left[|x(s)| + |x'(s)|\right]$ queda:

$$|x'(t)| \leq a(t)\left[|x(s)| + |x'(s)|\right] + b(t)\int_0^t a(s)\left[|x(s)| + |x'(s)|\right] ds.$$

Utilizando esta última desigualdad y los resultados del Teorema 1.1, se obtiene:

$$|x(t)| \leq |x(0)| + \exp\left[F(t)\right]\int_0^t E(s)\exp\left[-F(s)\right] ds.$$

Donde $E(t)=\dfrac{|x(0)|\ a\,(t)}{1-a(t)}$ y $F(t)=\displaystyle\int_0^t\left[\frac{a(\tau)[b(\tau)+1]}{1-a(\tau)}+b(\tau)\right]d\tau$

Las condiciones (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{a(t)}{1-a(t)}dt<+\infty$, (d) $F(t)\le k_1$ y la relación (1.13) nos permiten asegurar que $x(t)$ está acotada.

Con el siguiente ejemplo, se mostrará la utilidad del teorema precedente en la determinación de la acotación de la solución $x(t)$ que satisface la condición inicial $x(0)=x_0$, de una ecuación integro-diferencial dada, para la cual no es posible determinar directamente su solución, ni tampoco extraer conclusiones sobre su acotación. Además, se ilustrará que la clase de funciones que satisfacen las exigencias del teorema, es no vacía. Estas mismas consideraciones son aplicables a cada uno de los ejemplos correspondientes a los restantes teoremas del capítulo.

Ejemplo

Dada la ecuación escalar, $x'(t)=-2x(t)+\displaystyle\int_o^t\frac{\left(3-\frac{\exp(-t)}{2}\right)}{t\left(\frac{3}{2}-\frac{\exp(-s)}{2}\right)}x(s)ds+f(t)$, sea $f(t)$ una función continua, que satisface las siguientes condiciones:

(1) $\left|1+\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^t f(s)ds\right|\ge\dfrac{[\exp(2t)+2]\,|f(t)|}{9}.$

(2) $\left|9-3\exp(-t)+\displaystyle\int_0^t[3-\exp(-t+s)]f(s)ds\right|\ge 3\left(|f(t)|\exp t+\dfrac{3}{2}\right).$

En particular, la función $f(t)=-\dfrac{2}{7}\exp(-2t)$ satisface las exigencias (1) y (2).

Probemos que la solución $x(t)$ que satisface la condición inicial $x(0)=3,$ está acotada.

En efecto, de acuerdo con los datos que disponemos no es posible analizar directamente la acotación de $x(t)$.

El resolvente asociado a la ecuación integro-diferencial viene dado por ,

$$R(t,s)=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\exp(-t+s).$$

Por otra parte, de (1) se obtiene que, $\left|\frac{9}{2}+\frac{3}{2}\int_0^t f(s)ds+f(t)\right|\geq\frac{|f(t)|\exp(2t)}{2}.$

Luego,

$$\left|\frac{9}{2}-\frac{3}{2}\exp(-t)+\frac{3}{2}\exp(-t)+\frac{3}{2}\int_0^t f(s)ds+\frac{1}{2}\exp(-t)\int_0^t \exp s\ f(s)ds-\frac{1}{2}\exp(-t)\int_0^t \exp s\ f(s)ds+f(t)\right|\geq$$
$$\geq\frac{|f(t)|\exp(2t)}{2}.$$

Agrupando convenientemente resulta la desigualdad,

$$\left|\left\{\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\exp(-t)\right].3+\int_0^t\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\exp(-t+s)\right]f(s)ds\right\}+\left[\frac{3}{2}\exp(-t)+\int_0^t\frac{1}{2}\exp(-t+s)f(s)ds+f(t)\right]\right|\geq$$
$$\geq\frac{|f(t)|\exp(2t)}{2}.$$

De acuerdo con los datos que disponemos la expresión anterior es,

$$\left|\left[R(t,0)x(0)+\int_0^t R(t,s)f(s)ds\right]+\left[R'(t,0)x(0)\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}R(t,s)f(s)ds+f(t)\right]\right|\geq$$
$$\geq\frac{|f(t)|\exp(2t)}{2}$$

Es decir,

$|x(t)+x'(t)|\geq\frac{|f(t)|\exp(2t)}{2}$. por lo tanto $2\left[|x(t)|+|x'(t)|\right]\geq|f(t)|\exp(2t).$

(3)

Es inmediato de (3) que, $\left|\frac{1}{2}\exp(-t+s).f(s)\right|\leq\exp(-t)\exp(-s)\left[|x(t)|+|x'(t)|\right]$

Seleccionemos $b(t)=\dfrac{3\exp(-t)}{2}$ y $a(t)=\dfrac{2\exp(-t)}{3}$. Entonces, la desigualdad precedente puede escribirse como, $\left|\dfrac{\partial R(t,s)}{\partial t}f(s)\right| \le b(t)a(s)\left[\,|x(s)|+|x'(s)|\,\right]$ que es la premisa (a).

De (2) se infiere que,

$\left|\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\exp\ (-t)\right].3+\int_0^t\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\exp\ (-t+s)\right]f(s)ds\right| \ge \frac{3}{2}|f(t)|\exp\ t+\frac{9}{4}$ y de acuerdo con los datos podemos escribir, $\left|R(t,0)x(0)+\int_0^t R(t,s)f(s)ds\right| \ge \frac{3}{2}|f(t)|\exp\ t+\frac{9}{4}$,

por lo que, $|x(t)| \ge \frac{3}{2}|f(t)|\exp\ t+\frac{9}{4}$. Así, $|R'(t,0)x(0)|+|f(t)| \le \frac{2}{3}\exp(-t)|x(t)|$, y entonces,

$|R'(t,0)x(0)|+|f(t)| \le a(t)|x(t)|$ es decir se cumple (b).

Dado que $0 \le a(t) \le \frac{2}{3}$, entonces $1 < \dfrac{1}{1-a(t)} \le 3.$

Así, $\int_0^{+\infty}\dfrac{a(t)}{1-a(t)}dt \le 3\int_0^{+\infty}\frac{2}{3}\exp(-t)dt = 2 < +\infty,$ que es la premisa (c)

Por otra parte,

$$F(t)=\int_0^t\left[\frac{a(\tau)[b(\tau)+1]}{1-a(\tau)}+b(\tau)\right]d\tau=\int_0^t\left[\frac{\frac{2\exp(-\tau)}{3}\left[\frac{3\exp(-\tau)}{2}+1\right]}{1-\frac{2\exp(-\tau)}{3}}+\frac{3\exp(-\tau)}{2}\right]d\tau.$$

Consecuentemente

$$F(t)\le\int_0^t\left[2\exp(-t)\left[\frac{3\exp(-\tau)}{2}+1\right]+\frac{3\exp(-\tau)}{2}\right]d\tau \le 5.$$

De esta forma se cumple (d), que es la última de las premisas exigidas.

Corolario 2.1.1

Si en el Teorema 2.1 se agrega la condición adicional:

(e) Existen $M, \beta \in R_{+}^{*}$, tales que, $M > 1$ y $\beta|x(t)| \leq (M-1)|x'(t)|$, y se cambian las premisas (a) y (b), por las siguientes:

(a') $\left|\dfrac{\partial R(t,s)}{\partial t} f(s)\right| \leq \dfrac{b(t)}{M} a(s)[|x(s)| + |x'(s) + \beta x(s)|]\exp[-\beta(t-s)]$,

(b') $|\mathrm{R}'(\mathrm{t},0)x(0)| + |\mathrm{f}(\mathrm{t})| \leq \dfrac{a(\mathrm{t})}{M}[|x(s)| + |x'(s)|]$, respectivamente.

Entonces, $x(t) \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow +\infty$.

Demostración

De las premisas (a')

$\left|\dfrac{\partial R(t,s)}{\partial t} f(s)\right| \leq \dfrac{b(t)}{M} a(s)[|x(s)| + |x'(s) + \beta x(s)|]\exp[-\beta(t-s)]$ y (b')

$|\mathrm{R}'(\mathrm{t},0)x(0)| + |\mathrm{f}(\mathrm{t})| \leq \dfrac{a(\mathrm{t})}{M}[|x(s)| + |x'(s)|]$ y la Fórmula de Variación de los Parámetros, se infiere que:

$$|x'(t)|\exp(\beta\, t) \leq \frac{a(t)}{M}[|x(s)| + |x'(s)|]\exp\,(\beta\, t) + \frac{b(t)}{M}\int_0^t a(s)\big[|x(s)| + |x'(s) + \beta\, x(s)|\big]\exp(\beta\, s)ds.$$

Por tanto:

$$|x'(t)|\exp(\beta\, t) \leq \frac{a(t)}{M}|x(t)|\exp(\beta\, t) + \frac{b(t)}{M}\int_0^t a(s)\Big[|x(s)|\exp(\beta\, s) + \Big|\big[x(s)\exp(\beta\, s)\big]'\Big|\Big]ds.$$

$$M|x'(t)|\exp(\beta\, t) \leq a(t)|x(t)|\exp(\beta\, t) + b(t)\int_0^t a(s)\Big[|x(s)|\exp(\beta\, s) + \Big|\big[x(s)\exp(\beta\, s)\big]'\Big|\Big]ds.$$

De la condición (e) es inmediato que:

$$M|x'(t)|\exp(\beta t) \geq \big[|x'(t)| + \beta|x(t)|\big]\exp(\beta t) \geq \Big|\big[x(t)\exp(\beta t)\big]'\Big|.$$

Luego, de las dos últimas desigualdades, se obtiene la siguiente estimación:

$$|x_1'(t)| \leq a(t)|x_1(t)| + b(t)\int_0^t a(s)\big[|x_1(s)| + |x_1'(s)|\big]\,ds.$$

Donde $x_1(t) = x(t)\exp(\beta t)$ y $x_1(0) = x(0)$

Sólo hace falta aplicar el Teorema 1.1 y las premisas (c) y (d) del Teorema 2.1, para garantizar que $|x_1(t)| \leq K$, donde $K \in R_+^*$ y esto significa que $x(t) \longrightarrow 0$, cuando $t \longrightarrow +\infty$. ■

Corolario 2.1.2

Supóngase que se cumplen las premisas (c) y (d) del Teorema 2.1, las condiciones (e) y (b') del Corolario 2.1.1 y además,

(a'') $\left| \frac{\partial R(t,s)}{\partial t} f(s) \right| \leq \frac{b(t)}{M} a(s)[|x(s)| + |x'(s) - \beta x(s)|] \exp[\beta(t-s)]$

Entonces, la solución $x(t)$ del sistema (1) es lentamente creciente.

Demostración

De la Fórmula de Variación de los Parámetros y las premisas (b') y (a'') se deduce que:

$$|x'(t)| \exp(-\beta t) \leq \frac{a(t)}{M}[|x(s)| + |x'(s)|] \exp(-\beta t) + \frac{b(t)}{M} \int_0^t a(s)\big[|x(s)| \exp(-\beta s) + |x'(s) - \beta x(s)| \exp(-\beta s)\big] ds$$

es decir,

$$|x'(t)| \exp(-\beta t) \leq \frac{a(t)}{M}[|x(s)| + |x'(s)|] \exp(-\beta t) + \frac{b(t)}{M} \int_0^t a(s)\big[|x(s)| \exp(-\beta s) + \big|[x(s) \exp(-\beta s)]'\big|\big] ds$$

De la condición (e) se sigue qué

$$M|x'(t)| \exp(-\beta t) \geq \big[|x'(t)| + \beta|x(t)|\big] \exp(-\beta t) \geq |x'(t) \exp(-\beta t) - \beta x(t) \exp(-\beta t)| \geq \big|[x(t) \exp(-\beta t)]'\big|$$

Por consiguiente, de las dos últimas relaciones, se obtiene la desigualdad:

$$|x_1'(t)| \leq a(t) |x_1(t)| + b(t) \int_0^t a(s)\big[|x_1(s)| + |x_1'(s)|\big] ds,$$

Donde $x_1(t) = x(t) \exp(-\beta t)$ y $x_1(0) = x(0)$

Ahora, de acuerdo con el Teorema 1.1 y las premisas (c) y (d) se puede asegurar que, $|x_1(t)| \leq K$, $K \in R_+^*$, lo que es equivalente a $|x(t)| \leq K \exp(\beta t)$, como se quería.

Teorema 2.2

Sea $x(t)$ solución del sistema (1), tal que su derivada $x'(t)$ sea una función continua. Supongamos que se satisfacen las siguientes condiciones:

(a) $\left|\dfrac{\partial R(t,s)}{\partial t}\, f(s)\right| \leq b(s)x'(s)\big[|x(s)| + |x'(s)|\big]$

(b) $|R'(t,0)x(0)| + |f(t)| \leq |x(t)|$

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} b(\tau)\exp 2\tau d\tau = k < \frac{1}{2x(0)}$

Entonces, $x(t)$ está Acotada.

Demostración

Dado que $x(t) = R(t,0)x(0) + \displaystyle\int_0^t R(t,s)\, f(s)ds.$

Derivando $x(t)$, se tiene que $x'(t) = R'(t,0)x(0) + \displaystyle\int_0^t \frac{\partial R(t,s)}{\partial t}\, f(s)ds + f(t).$

Aplicando la desigualdad triangular:

$$|x'(t)| \leq |R'(t,0)x(0)| + \int_0^t \left|\frac{\partial R(t,s)}{\partial t}\, f(s)\right| ds + |f(t)|$$

Luego aplicando las condiciones (a) $\left|\dfrac{\partial R(t,s)}{\partial t}\, f(s)\right| \leq b(s)x'(s)\big[|x(s)| + |x'(s)|\big],$

y (b) $|R'(t,0)x(0)| + |f(t)| \leq |x(t)|,$ queda:

$$|x'(t)| \leq |x(t)| + \int_0^t b(s)|x'(s)|\big[|x(s)| + |x'(s)|\big]ds,$$

Utilizando esta última desigualdad y los resultados del Teorema 1.1, se obtiene:

$$|x(t)| \leq \frac{|x(0)|}{1 - 2|x(0)| \displaystyle\int_0^t b(s)\exp s ds}$$

De acuerdo con la condición (c) la solución $x(t)$ está Acotada.

Corolario 2.2.1

Si en el **Teorema 2.2** se agrega la condición adicional:

(d) Existen $M, \beta \in R_{+}^{*}$, tales que, $M > 1$ y $\beta|x(t)| \le (M-1)|x'(t)|$, y se cambian las premisas (a) y (b), por las siguientes:

(a') $\left|\dfrac{\partial R(t,s)}{\partial t} f(s)\right| \le \dfrac{b(s)}{M}[|x(s)| + |x'(s) + \beta x(s)|]\exp[-\beta(t-s)]$

(b') $|R'(t,0)x(0)| + |f(t)| \le \dfrac{|x(t)|}{M}$ respectivamente.

Entonces, $x(t) \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow +\infty$.

Demostración

De las premisas (a') $\left|\dfrac{\partial R(t,s)}{\partial t} f(s)\right| \le \dfrac{b(s)[|x(s)| + |x'(s) + \beta x(s)|]\exp[-\beta(t-s)]}{M}$ y (b') $|R'(t,0)x(0)| + |f(t)| \le \dfrac{|x(t)|}{M}$ y la Fórmula de Variación de los Parámetros, se infiere que:

$$|x'(t)|\exp(\beta\, t) \le \frac{|x(t)|\exp\,(\beta\, t)}{M} + \frac{\int_0^t b(s)\big[|x(s)| + |x'(s) + \beta\, x(s)|\big]\exp(\beta\, s)ds}{M}$$

Por tanto:

$$|x'(t)|\exp(\beta\, t) \le \frac{|x(t)|\exp\,(\beta\, t)}{M} + \frac{\int_0^t b(s)\Big[|x(s)|\exp(\beta\, s) + \Big|\big[x(s)\exp(\beta\, s)\big]'\Big|\Big]ds}{M}$$

$$M|x'(t)|\exp(\beta\, t) \le |x(t)|\exp\,(\beta\, t) + \int_0^t b(s)\Big[|x(s)|\exp(\beta\, s) + \Big|\big[x(s)\exp(\beta\, s)\big]'\Big|\Big]ds$$

De la condición (d) es inmediato que:

$$M|x'(t)|\exp(\beta t) \ge \big[|x'(t)| + \beta|x(t)|\big]\exp(\beta t) \ge \Big|\big[x(t)\exp(\beta t)\big]'\Big|.$$

Luego, de las dos últimas desigualdades, se obtiene la siguiente estimación:

$$|x_1'(t)| \le |x_1(t)| + \int_0^t b(s)\big[|x_1(s)| + |x_1'(s)|\big]\,ds.$$

Donde $x_1(t) = x(t)\exp(\beta t)$ y $x_1(0) = x(0)$.

Sólo hace falta aplicar el Teorema 1.2 y la premisa (c) del Teorema 2.2, para garantizar que $|x_1(t)| \leq K$, donde $K \in R_+^*$ y esto significa que $x(t) \longrightarrow 0$, cuando $t \longrightarrow +\infty$.

Corolario 2.2.2

Supóngase que se cumplen la premisa (c) del **Teorema 2.2**, las condiciones (d) y (b') del **Corolario 2.2.1** y además,

(a'') $\left|\dfrac{\partial R(t,s)}{\partial t} f(s)\right| \leq \dfrac{b(s)}{M}[|x(s)| + |x'(s) + \beta x(s)|]\exp[\beta(t-s)]$

Entonces, la solución $x(t)$ del sistema (1) es lentamente creciente.

Demostración

De la Fórmula de Variación de los Parámetros y las premisas (b') y (a'') se deduce que:

$$|x'(t)|\exp(-\beta t) \leq \frac{|x(t)|\exp(-\beta t)}{M} + \frac{\int_0^t b(s)\big[|x(s)| + |x'(s) + \beta x(s)|\big]\exp(-\beta s)ds}{M}$$

Por tanto: $|x'(t)|\exp(-\beta t) \leq \dfrac{|x(t)|\exp(-\beta t)}{M} + \dfrac{\int_0^t b(s)\Big[|x(s)|\exp(\beta s) + \Big|\big[x(s)\exp(-\beta s)\big]'\Big|\Big]ds}{M}$

$$M|x'(t)|\exp(-\beta t) \leq |x(t)|\exp(-\beta t) + \int_0^t b(s)\Big[|x(s)|\exp(\beta s) + \Big|\big[x(s)\exp(-\beta s)\big]'\Big|\Big]ds$$

De la condición (d) es inmediato que:

$$M|x'(t)|\exp(-\beta t) \geq \big[|x'(t)| + \beta|x(t)|\big]\exp(-\beta t) \geq |x'(t)\exp(-\beta t) - \beta x(t)\exp(-\beta t)| \geq \Big|\big[x(t)\exp(-\beta t)\big]'\Big|$$

Luego, de las dos últimas desigualdades, se obtiene la siguiente estimación:

$$|x_1'(t)| \leq |x_1(t)| + \int_0^t b(s)\big[|x_1(s)| + |x_1'(s)|\big]ds.$$

Donde $x_1(t) = x(t)\exp(\beta t)$ y $x_1(0) = x(0)$

Aplicando el Teorema 1.1 y la premisa (c) del Teorema 2.2, para garantizar que $|x_1(t)| \leq K$, donde $K \in R_+^*$ luego $|x(t)| \leq K\exp(\beta t)$, como se quería.

CONCLUSIONES

La realización de este Trabajo de Diploma permitió incursionar en el estudio de una importante rama de la matemática que es la teoría cualitativa de las ecuaciones integro-diferenciales.

La preparación teórica estuvo encaminada al conocimiento de desigualdades integrales e integro-diferenciales de tipo Bellman-Gromwall-Bihari, así como su utilización para demostrar propiedades cualitativas de las soluciones de una ecuación o sistema de ecuaciones integro-deferencial.

Se lograron construir dos desigualdades del tipo antes mencionado. La primera de ellas generaliza resultados de **[Pach 77j].**

Estas desigualdades son utilizadas posteriormente para demostrar dos teoremas y cuatro corolarios que son condiciones suficientes para el **Acotamiento**, la **Atractividad y el Crecimiento Lento** de las soluciones de un sistema integro-deferencial tipo Volterra, además de proponerse un ejemplo que garantiza que el conjunto solución de una ecuación o sistema de ecuaciones integro-deferencia no es nulo.

Por tanto, se considera que el objetivo trazado en esta investigación fue cumplido adecuadamente.

RECOMENDACIONES

Se recomienda, a manera de continuación, el uso de las herramientas que aparecen en **[Har-Yon-Oka 81]** para la obtención de otras propiedades cualitativas de las soluciones de un sistema integro-deferencial tipo Volterra tales como la **Estabilidad** y **Estabilidad Uniforme** para la solución nula, así como para la **Acotación** y la **Acotación Uniforme** de todas las soluciones del sistema (2). Resultados referentes a este tópico pretenden ser aplicados a posteriores desigualdades integrales e integro-diferenciales de tipo Bellman-Gromwall-Bihari que se encuentran en desarrollo.

BOBLIOGRAFÍA

[Ame 90] Amelkin, V. "Ecuaciones diferenciales aplicadas a la práctica", Editorial Mir, Moscú, (1990).

[Bell 43] Bellman, R. “The stability of solutions of linear differential equations”, Duke Math. Joun 10(1943), 643 – 647.

[Bih 56] Bihari, “A generalization of a lemma of Bellman and applications to uniqueness problems of differential equations”, Acta Math. Acad. Sei. Hungar 7(1956), 81- 94.

[Bur 93] Burton, T. A. “Boundedness of solutions of integro-differential equations”, Ann. Of Diff. Eqs. 9(4) (1993), 395-408.

[Go-He-Wen 91] Gopalsamy, K.; X. He and L. Wen-" Global atractivity and oscillations in a periodic logistic integro-differential equation ", Houston J. Math. 17, No.2 (1991), 157-177.

[Gro 19] Gronwall, T. H. – “Note on derivatives with respect to parameter of the solutions of a system of differential equations”, Ann. Math. 20 (1919), 292 – 296.

[Gro-Mill 70] Grossman, S. I. and R. K. Miller. “ Perturbation theory for Volterra integro-differential equations ” , J. Differential Equations 8 (1970), 457 – 474.

[Har-Yon-Oka 81]Hara T. Yoneyama and Y. Okazaki- “On the boundedness of solutions of perturbed linear systems”, J. Math. Anal. Appl. 83 (1981), 188 - 208.

[Kra-Ki-Ma 82] Krasnov, M.L.; A.I. Kiselov y G.I. Makarenko- " Ecuaciones Integrales ", Mir, Moscú, (1982).

[Mah 87] Mahfoud, W.E “Boundedness properties in Volterra integro-differential systems”, Proc. Amer. Math. Soc. 100 (1987), 37-45.

[Mik 71] Mikhlin, S.G. - "Integral Equations ", Ediciones R., La Habana, (1971).

[Mu 92] Murakami, K. - "Asymptotic stability of linear Volterra equations ", Math. Japonica 37, No.4 (1992), 615-622.

[Mu-Ham 95] Yoshiro Hamaya. - “Global attractivity in an integro-differential equation with diffusion”. Differ. Equ. Dyn. Syst. 3, No.1 (1995), 35- 42

[Mur-Sli-Nar 88] Murty, K.N.; M.A.S. Slinivas y V.A. Narasimham - "Asymptotic behaviour of solutions of matrix-integro-differential equations ", Tamkang J. Math. 19, No.1 (1988), 29-36.

[**Náp-Vel 96a**] Nápoles, J.E. y J.R.Velázquez - "Boundedness and stability properties of some integro-differential Systems" Revista Integración (UIS-Colombia) Vol. 14, No1 (1996), 9-14.

[**Náp-Vel 96b**] "Propiedades cualitativas de las soluciones de una ecuación Integro-Diferencial tipo Volterra ".Memorias primera Conferencia Científica de Matemática-Computación, Universidad de Oriente (1996), 65-69.

[**Náp-Vel c**] "Sobre el comportamiento cualitativo de ciertos Sistemas Integro-Diferenciales. Revista Ciencias Matemáticas, Universidad de la Habana

[Náp-Vel 97d] "Caracterización del Comportamiento cualitativo de las soluciones de un Sistema Integro-diferencial tipo Volterra". Memorias V Congreso de la SCMC, Universidad de Cienfuegos, Cuba (1997).

[Nto-Tsa 91a] Ntouyas N. K and P.CH.Tsamatos. - "On to Bellman-Bihari integral inequality with delay", Period. Math. Hungar.23 (1991), 91- 94.

[Nto-Tsa 92b] "An integral delay inequality and its applications to boundary valued problems", Math. Nachr. 157 (1992), 201- 209.

[Pach 72a] Pachpatte B. G. – "Perturbations of nonlinear integro-differential equations", The Mathematics Estudent XL (1972), 292-296.

[Pach 74b] "An integral inequality similar to Bellam–Bihari inequality", Bull. Soc. Math. Grece 15 (1974), 7-12.

[Pach 75c] "On some integral inequalities similar to Bellman–Bihari inequalities", J. Math. Appl. 49 (1975), 794-802.

[Pach 75d] "On some generalizations of Bellman's lemma", J. Math. Anal. Appl. 51 (1975), 141–150.

[Pach 75e] "On some integro-differential equations in Banach spaces", Bull. Austral, Math. Soc. 12 (1975), 337-350.

[Pach 76f] "On some new integral inequalities for differential and integral equations", J. Math. Physical Sci. 10 (1976), 101-116.

[Pach 76g] "Stability and asymptotic behaivour of perturbated Volterra integral equations", J. Math. Phys. Sci. (1976).

[Pach 76h] “On perturbations of Volterra integro-differential equations”, Revue Roumaine Math. Pures et Appl. (1976).

[Pach 76i] “On some nonlinear Volterra integro-differential equations”, Analele stintifice ale universitatii, Al. I. CUZA. Tomul XXII, s. I. a (1976) f. 2.

[Pach 77j] “On some fundamental integro-differential and integral inequalities”, Analele stintifice ale universitatii, Al. I. CUZA. Tomul XXII, s. I. a., (1977).f. 1

[Pach 92k] “On Multivariate Hardy Type Inequalities”. Analele stintifice ale universitatii, Al. I. CUZA. Tomul XXXVIII, s. I. a., (1993).f. 3, 355-361.

[Pach 95l] “On some new inequalities related to certain inequalities in the theory of differential equations”. J. Math. Annal. Appl. 189 (1995), 128- 144.

[Pach 96 m] “On Winner type global existence theorems for certain integro-differential equations”. Ann. Differ. Equations 12, No. 4, (1996) 381-386.

[Pach 98n] “Inequalities for differential an integral equations”. Academic Press, New York and London, (1998).

[Pach 2000ñ] “On certain partial integral inequalities for no-self adjoint Hiperbolic partial differential and integral equations”, RGMIA Research Report Collection, 3(3), Article 12, (2000).

[Pach 2000 o] “Generalizations of certain Inequality ased in the Theory of Differential Equations”, RGMIA Research Report Collection, 3(3), Article 14, (2000).

[Pet 71] Petrovski, I.G. -”Lecciones de la Teoría de las Ecuaciones Integrales”, Mir, Moscú, (1971).

[Pin 90] Pinto, M. - "Integral inequalities of Bihari-type and applications ", Funkc. Ekvacioj., Ser. Int.33, No.33 (1990), 387-403.

[Sars 67] Sarski, J. - "Differential Inequalities ", PWN-Polish Scientific Publishers, Tom 43, Warszawa (1967).

[Sta 77] Staffans, O. J. - “Boudedness and asymptotic Behaviour of solutions of a Volterra equation”, Michigan Math. J. 24 (1977), 77- 95.

[Tang 89] Tang, P. - "The solution and its asymptotic behaviour of one kind of integro-differential equations ", J. Southwest Jiatang Univ., No.3 (1989), 102-110.

[**Vel 2002**] Velázquez**, J.R.** “Sobre el comportamiento cualitativo de ciertos Sistemas Integro- Diferenciales. Revista Ciencias Matemáticas, Universidad de la Habana (2002)

[Vel 2003] “Acotación, Atractividad y Crecimiento Lento de las soluciones de un Sistema Integro-diferencial tipo Volterra”. Memorias VIII Congreso Nacional de matemática Computación. S. Spíritus 2003

[Wang 88] Wang, G. - "Asymptotic behaviour of solutions of a linear Volterra integro-differential equation ", Hunan Ann. Math. 8, No.1/2 (1988), 82-86

[Xu 97] Xu, Anshi.- “On boundeness and stability of the solutions of nonlinear integro- differential equation of neutral type with variable time lay”, J. Sichuan Univ. Nat. Sci. Ed. 34, No. 3 (1997), 276-286.

[Zag-att 96] Zaghrout, A. S, S. H. Attocloh. - “On Asymptotic behavior of neutral integro-differential equations”, An. Stiint. Univ. AI. I. Cuza Iasi, Ser. Nowa, Mat. 42, no. 1, (1996), 49-61.