

UNIVERSIDAD DE CIENCIAS PEDAGÓGICAS

“José de la Luz y Caballero” Holguín



**Sede Universitaria Pedagógica de Educación Media Superior
Escuela Militar “Camilo Cienfuegos” Holguín**

**TAREAS DOCENTES PARA EL TRATAMIENTO DE LAS FUNCIONES CON
EL USO DEL CABRI GEOMETRE II EN LA EMCCH**

Tesis en Opción al Título de Máster en Ciencias de la Educación

AUTOR: Lic. *Abelardo Antonio Rodríguez Blanco*

HOLGUÍN

2010

UNIVERSIDAD DE CIENCIAS PEDAGÓGICAS

“José de la Luz y Caballero”

Holguín

Sede Universitaria Pedagógica de Educación Media

Superior

Escuela Militar “Camilo Cienfuegos”

Holguín

TAREAS DOCENTES PARA EL TRATAMIENTO DE LAS
FUNCIONES CON EL USO DEL CABRI GEOMETRE II EN LA
EMCCH

***Tesis en Opción al Título de Máster en Ciencias de la
Educación***

AUTOR: Lic. Abelardo Antonio Rodríguez Blanco

Tutor: M.Sc. Mario Rafael Estrada Doallo

HOLGUÍN

2010

DEDICATORIA

- A mis hijos por su infinito amor y cariño.
- A mi familia por su incondicional ayuda y apoyo.
- A la Revolución que me ha posibilitado prepararme y superarme constantemente.

AGRADECIMIENTOS

- ❖ A mis compañeros por su solidaridad y cooperación en la realización de este trabajo.
- ❖ A mi tutor por su paciencia, sabias orientaciones y su valiosa ayuda en la realización de la tarea.
- ❖ Al profesor y amigo José Sánchez Santiesteban por su desinteresada ayuda y dedicación en todo momento.
- ❖ A todos los que de una u otra forma colaboraron en la confección de este trabajo.

SÍNTESIS

En la tesis se aborda una de las tendencias actuales en la enseñanza de la matemática en el mundo y en Cuba y se precisa cómo es posible usar el ordenador en la enseñanza de la matemática, y en particular en la enseñanza y aprendizaje de uno de los conceptos más importantes de esta asignatura, el concepto de función.

Se pudo constatar, a través de diferentes métodos de investigación, las deficiencias en la enseñanza y el aprendizaje del concepto de función y las insuficiencias que existen en relación con el uso del ordenador en el proceso de enseñanza aprendizaje de la asignatura Matemática en la Escuela Militar “Camilo Cienfuegos” de la ciudad de Holguín (EMCCH).

La tesis propone un conjunto de tareas docentes para contribuir al aprendizaje del concepto de función en el octavo grado, teniendo como principal medio de enseñanza a la computadora y el uso específico del programa de Geometría Dinámica CABRI GEOMETRE II.

La aplicación del criterio de expertos permitió evaluar que la propuesta de tareas docentes puede contribuir a lograr un mejor aprendizaje, en los estudiantes, de los contenidos de funciones en la EMCCH.

Por último, se aplicó un cuasi experimento para analizar cómo influían las tareas propuestas en el aprendizaje de estos contenidos de las unidades objeto de estudio y se pudo constatar que, en el grupo aplicado, la misma puede contribuir al cumplimiento del objetivo propuesto. Además, para corroborar estadísticamente la independencia de las tareas a los resultados alcanzados se aplicó la Prueba de Hipótesis de Independencia Chi Cuadrado, donde se obtuvieron resultados significativos con un nivel de confianza del 95 %.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 1. FUNDAMENTOS TEÓRICOS QUE SUSTENTAN EL PROCESO ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LAS FUNCIONES EN LA UNIDAD # 2 DEL ONCENO GRADO	10
1.1. TENDENCIAS EN LA ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES.....	10
1.2. ENFOQUE HISTÓRICO-CULTURAL COMO SUSTRATO TEÓRICO DE CARÁCTER PSICOLÓGICO DEL APRENDIZAJE DE LAS FUNCIONES EN LA ASIGNATURA DE MATEMÁTICA	19
1.3. FUNDAMENTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS QUE SUSTENTAN EL EMPLEO DE LAS TAREAS DOCENTES EN EL DESARROLLO DEL PROCESO DE ENSEÑANZA- APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA.....	21
1.4. CARACTERÍSTICAS DE LA INTRODUCCIÓN DEL ORDENADOR EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA. EL PROGRAMA CABRI GEOMETRE II. POTENCIALIDADES.....	29
1.4.1. <i>El programa CABRI GEOMETRE II. Potencialidades.</i>	34
1.5. CARACTERIZACIÓN DE LOS ALUMNOS DE LA EMCCH.....	40
CAPÍTULO 2. PROPUESTA DE TAREAS PARA EL TRABAJO CON EL PROGRAMA DE GEOMETRÍA DINÁMICA CABRI GEOMETRE II EN LA UNIDAD # 2: FUNCIONES, DEL ONCENO GRADO DE LA EMCCH.	42
2.1. SITUACIÓN ACTUAL DEL APRENDIZAJE.....	42
2.2. PROPUESTA DE TAREAS DIRIGIDAS A LA UNIDAD # 2: FUNCIONES, EN LA EMCCH	46
2.3. VALORACIÓN DE LA FACTIBILIDAD Y LA PERTINENCIA DE LAS TAREAS DOCENTES..	62
CONCLUSIONES	69
RECOMENDACIONES	71
BIBLIOGRAFÍA	
ANEXOS	

INTRODUCCIÓN

La necesidad de desarrollar e impulsar nuevos enfoques pedagógicos que sustenten experiencias educativas más efectivas, constituye uno de los retos que deben asumir todos los comprometidos con la labor de educar las presentes y futuras generaciones. Un importante papel en este propósito le corresponde a los docentes, pues son estos los que desempeñan el papel conductor en el proceso de enseñanza aprendizaje. Este cambio hay que realizarlo a la luz de las nuevas tendencias y enfoques, tomando las mejores experiencias y adaptándolas a las condiciones del país.

Además, se ha comprobado que no siempre los profesores licenciados en Matemática–Computación, Ciencias Exactas y otras especialidades a fines son capaces de llevar a su práctica profesional adecuadas estrategias didácticas, que les permitan resolver los problemas de aprendizaje que, con tanta fuerza, se manifiestan en la enseñanza media, entre los que se puede citar el tratamiento de las funciones en el preuniversitario (Garcés, 2003).

También, muchos han sido los problemas referidos a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, objeto de investigación en el decursar histórico. En particular, el estudio de las funciones, como línea directriz de la enseñanza de la matemática, ha resultado uno de los contenidos investigados, dadas las limitaciones que presentan los estudiantes en la asimilación del mismo (Coloma, 1998; Cala, 2002; Negrón y Estrada, 2000; Negrón et al., 2003; Garcés, 2003; Neyra, 2009).

Precisamente, con el objetivo de valorar el comportamiento en la asimilación de este contenido en el Preuniversitario y establecer un diagnóstico, se revisaron los ejercicios propuestos en el libro de texto, diferentes temarios de preguntas escritas, trabajos de control, pruebas de ingreso a la Escuela Militar “Camilo Cienfuegos de Holguín (EMCCH), comprobaciones realizadas por el MINFAR,

pruebas finales a estudiantes del décimo y onceno grados de la EMCCH y observaciones a clases (anexo 1), lo que permitió constatar que:

- Los ejercicios que aparecen en los libros, así como las preguntas que sobre funciones son objeto de evaluación, en su mayoría constituyen ejercicios formales.
- Muchos estudiantes no alcanzan el aprobado en la pregunta relativa a funciones, debido a la poca solidez que demuestran en algunos conceptos tanto analítico como geométrico donde se contextualizan la función, el dominio, la imagen, el conjunto imagen, los ceros, la monotonía, entre otros.
- Otros no logran la representación gráfica por tener dificultades en identificar el lugar geométrico de la función en el plano o en la obtención de los pares ordenados y su representación en el sistema de coordenadas.

Además, se aplicó un diagnóstico al pelotón 1 del onceno grado de la compañía 5 al iniciar el curso 2008 – 2009 para corroborar los conocimientos que poseían sobre las funciones estudiadas en el décimo grado (anexo 2) y se pudo constatar que:

- A pesar de repetir de memoria la definición no manifiestan dominio de las principales características del concepto.
- No identifican el concepto de función a partir del gráfico.
- No son capaces de realizar la construcción del gráfico de la función cuadrática, así como de asociar estas al análisis u obtención de sus propiedades.

Por otro lado, al hacer un análisis de los nuevos programas vigentes para la enseñanza de la matemática en el Preuniversitario, se hace necesario variar el estilo de aprendizaje de los estudiantes, optando por un aprendizaje significativo y por descubrimiento, vinculando el contenido con lo que el alumno ya sabe, así como con sus intereses, motivos y afectos, donde además sea protagonista de su

aprendizaje y aprenda a aprender. Es por ello que el uso de la computación puede contribuir en gran medida a lograr estos propósitos, sobre todo en la exploración y elaboración de hipótesis.

Como se puede observar, existen problemas con el aprendizaje de la matemática y en particular lo referido al tema de funciones, de aquí que se le deba dedicar tiempo para tratar de resolverlos y el empleo adecuado de sistemas de aplicación durante el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática puede contribuir a ello, sobre todo al lograr un aprendizaje significativo e interesante para el alumno.

Precisamente, en Cuba, desde el preescolar los niños se enfrentan con la computadora, después en la educación primaria utilizan la colección Multisaber y una ampliación del conocimiento sobre la computación se realiza en la Secundaria Básica, donde son ampliamente utilizados los Software de la Colección El Navegante, completando este desarrollo en el Preuniversitario donde aparece la Colección Futuro y dentro de esta el software EUREKA, dirigido a la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Como se puede observar, en la escuela se usan cada vez más las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones, al respecto es bueno señalar que los software de las colecciones citadas son educativos y además curriculares, significando con ello que responden a los currículos escolares y además están elaborados para utilizarlos en el estudio de los contenidos de los niveles a los cuales están asociados.

Sin embargo, existen otros software que permiten su utilización en el “redescubrimiento” de los contenidos escolares o la realización de la más diversas acciones matemáticas que son comunes a los programas escolares de los distintos niveles, este es el caso del programa de Geometría Dinámica CABRI GEOMETRE II, que está asociado al Software EUREKA de la Colección Futuro y que puede ser utilizado para abordar temáticas como la de funciones.

También, es conocido que numerosos investigadores, tanto en el nacional como internacional, han realizado diferentes investigaciones donde abordan diferentes enfoques de aprendizajes utilizando las tareas docentes, así como sistemas de tareas vinculadas con el trabajo independiente y la formación de conceptos, entre las que se encuentran de Chile, las investigaciones de Figueroa y Reyes (1990); de España, Solar (1991), Malla (1995), Barnet (1995), Gil, (1996) y Alcázar (1999); de México, Michael (1996) y de Cuba se destacan Castro (1979), Concepción (1989), Álvarez de Zayas (1995), Lara (1995), Martínez (1998) y Garcés (2000) (citado por Figueredo, 2009).

El análisis de estas dificultades indica una inadecuada estructuración y dirección creadora del proceso de enseñanza aprendizaje, de manera que esto no estimula ni propicia el desarrollo del aprendizaje por parte de los estudiantes de los contenidos de funciones del onceno grado, por lo que se hace necesario buscar alternativas y métodos que propicien elevar el interés de los estudiantes por esta rama de la matemática.

Una de estas alternativas puede ser el empleo de la computación como instrumento de trabajo, que es priorizado por el Ministerio de Educación como parte de los Programa de la Revolución, es por ello que se escogió el programa de Geometría Dinámica CABRI GEOMETRE II por ser un programa poderoso que brinda varias opciones, entre las que se pueden mencionar la movilidad, construcción de lugares geométricos, determinación de imágenes por diferentes transformaciones geométricas, variedad de colores, diferentes tamaños y formas de letras, posibilidad de incluir textos, inclusión de sistemas de coordenadas, calculadora, etc

Del análisis realizado se derivó el siguiente **problema científico**: ¿Cómo favorecer el aprendizaje de las funciones, por parte de los estudiantes del onceno grado, en el proceso de enseñanza aprendizaje de la asignatura Matemática en la EMCCH?

Que determinó como **objeto de investigación**: El proceso de enseñanza aprendizaje de las funciones en el onceno grado de la EMCCH.

Y para contribuir a la solución del problema se planteó como **objetivo de la investigación**: Elaboración de tareas docentes para favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje de las funciones, por parte de los estudiantes del onceno grado de la EMCCH, con el empleo del CABRI GEOMETRE II.

En su contexto se definió como **campo de acción**: Las tareas docentes para la enseñanza aprendizaje de las funciones, por parte de los estudiantes de onceno grado de la EMCCH.

Para lograr el objetivo se plantearon las siguientes **preguntas científicas**:

1. ¿Cuáles han sido las tendencias prevalecientes en el proceso de enseñanza aprendizaje de las funciones en la asignatura de Matemática?
2. ¿Cuáles son los fundamentos teóricos y metodológicos que sustentan el trabajo con las tareas docentes?
3. ¿Qué caracteriza la introducción del ordenador en el proceso de enseñanza aprendizaje de las funciones y qué potencialidades tiene el CABRI GEOMETRE II como asistente matemático que posibilita su aplicación?
4. ¿Qué propuesta realizar para favorecer el dominio de las funciones por parte de los estudiantes del onceno grado en el proceso de enseñanza aprendizaje de la asignatura Matemática en la EMCCH?
5. ¿Cómo comprobar la efectividad de la propuesta, para contribuir a la enseñanza aprendizaje de las funciones en la EMCCH?

Para dar respuesta a las preguntas científicas se realizaron las siguientes **tareas**:

1. Determinar las tendencias prevalecientes en el proceso de enseñanza aprendizaje de las funciones en la asignatura de Matemática.

2. Determinar los fundamentos teóricos y metodológicos que sustentan el trabajo con las tareas docentes.
3. Caracterizar la introducción del ordenador en el proceso de enseñanza aprendizaje de las funciones y determinar las potencialidades, así como las posibilidades que ofrece el CABRI GEOMETRE II como asistente matemático para el tratamiento de las mismas.
4. Elaborar tareas docentes para favorecer el dominio de las funciones por parte de los estudiantes del onceno grado en el proceso de enseñanza aprendizaje de la asignatura Matemática en la EMCCH.
5. Constatar la validez de la propuesta de las tares docentes.

Para dar cumplimiento a estas tareas se emplearon varios métodos de investigación, los que permitieron realizar la interpretación de los datos teóricos y empíricos, así como obtener características, propiedades y relaciones fundamentales del objeto de investigación. Entre los **métodos** que se utilizaron se encuentran:

Métodos teóricos:

Histórico - Lógico: se utilizaron fundamentalmente, en el estudio tendencial del aprendizaje de las funciones en la asignatura Matemática y para conocer las particularidades y regularidades desde este punto de vista.

Analítico - Sintético: posibilitó la obtención de información teórica acerca de diferentes conceptos y aspectos metodológicos, en el trabajo con funciones, el descubrimiento de las relaciones y características generales de los elementos que la integran, concretados en la elaboración del resumen del estudio del objeto de investigación realizadas por autores nacionales e internacionales.

Inducción – Deducción: se utilizaron para llegar a determinar cuáles son las dificultades que se manifiestan con mayor fuerza en el proceso de enseñanza

aprendizaje de las funciones, en la formación de los futuros oficiales de las FAR. Para dar solución a los problemas que, en este sentido, se presentan y para determinar los fundamentos teóricos y metodológicos que sustentan el trabajo con la tarea docente.

Estadísticos: se utilizaron los procedimientos de Estadística Descriptiva para el ordenamiento y presentación de los datos, así como las medidas descriptivas de tendencia central y de dispersión para hacer el análisis de los resultados de las pruebas de control aplicadas y sacar las conclusiones de las mismas. Además, se utilizó la Prueba de Hipótesis de Independencia Chi Cuadrado para probar la dependencia entre los resultados alcanzados por los estudiantes y las tareas elaboradas.

Dentro de los **Métodos empíricos** se utilizaron:

La observación: estuvo presente en todo el desarrollo de la investigación, pues se observaron las acciones que desarrollaron los estudiantes en el empleo del programa de Geometría Dinámica. Para conocer el estado actual del empleo de tareas docentes en el proceso de enseñanza aprendizaje de los contenidos de funciones en la EMCCH. Se realizaron observaciones a clases para comprobar en la práctica pedagógica, la problemática actual en la formación y desarrollo del concepto estudiado.

La encuesta: sirvió para detectar y corroborar las deficiencias del proceso de enseñanza aprendizaje del concepto de función en la Unidad 2 de onceno grado, con el objetivo de obtener datos para diagnosticar el problema planteado.

Criterio de Experto: permitió valorar la posible efectividad de la propuesta para el empleo de las tareas docentes en la Unidad 2 de onceno grado en la EMCCH, con el empleo del programa de Geometría Dinámica CABRI GEOMETRE II.

Cuasi Experimento: permitió corroborar la efectividad de las tareas docentes en el aprendizaje del concepto de función con la utilización del Programa de Geometría Dinámica CABRI GEOMETRE II, en el oncono grado, en uno de los grupos de la EMCCH.

Para esta investigación se tomó como población a los alumnos del oncono grado de la EMCCH, del curso escolar 2008 - 2009, y como muestra intencional se tomaron los estudiantes del pelotón 1 de la compañía 5, que el mismo tiene una matrícula de 30 alumnos, para una representatividad del 25.86 %.

El **aporte fundamental** es la confección de un conjunto de tareas docentes para preparar a los alumnos del oncono grado en el concepto de función, con el uso del programa de Geometría Dinámica CABRI GEOMETRE II.

La **significación práctica** del trabajo está dada en que la propuesta de tareas docentes puede contribuir a desarrollar en los alumnos las habilidades relativas a las funciones en el oncono grado, y que expongan sus argumentaciones de forma coherente, que promuevan el desarrollo de la imaginación, de modos de actividad mental, de sentimientos y actitudes.

Con la aplicación de los resultados se contribuye a preparar al profesor para el uso del programa de Geometría Dinámica CABRI GEOMETRE II en las clases de matemática.

Con el uso del programa de Geometría Dinámica CABRI GEOMETRE II se pueden elaborar ejercicios de nuevo tipo.

La presencia de un material de apoyo para el aprendizaje de las opciones que tiene el programa de Geometría Dinámica CABRI GEOMETRE II.

La propuesta de tareas cumple con las exigencias para la Educación de la Enseñanza Media Superior, logrando que en un menor tiempo los alumnos aprendan más.

La novedad científica de la investigación se concreta en que con la utilización del programa de Geometría Dinámica CABRI GEOMETRE II se puede lograr un cambio en el tratamiento de la Matemática, es decir, cambiar las vías tradicionales y la forma de representarla, por una Matemática más vinculada a la vida del estudiante, donde tengan que explorar y llegar a conjeturas.

Los resultados se presentaron en:

La Primera Jornada Científica Metodológica Provincial sobre Ciencias de la Educación.

CAPÍTULO 1. FUNDAMENTOS TEÓRICOS QUE SUSTENTAN EL PROCESO ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LAS FUNCIONES EN LA UNIDAD # 2 DEL ONCENO GRADO

En este capítulo se realiza una reseña histórica sobre el tratamiento que se ha dado a las funciones especialmente al concepto función a escala mundial y en la escuela cubana, específicamente en la Secundaria Básica y enseñanza Preuniversitaria, profundizando en la concepción metodológica vigente a través del análisis del Programa, las Orientaciones Metodológicas y el Libro de Texto y lo relacionado con las tareas docentes. A continuación se realiza una caracterización de los ordenadores, sus ventajas en la fijación del contenido objeto de estudio y particularmente las potencialidades que brinda el CABRI GEOMETRE II al tratamiento de las funciones, incluyendo también, los objetivos generales de la asignatura y los objetivos del contenido a tratar.

1.1. Tendencias en la enseñanza de las funciones

En el concepto función se distinguen dos aspectos: la función como correspondencia y como expresión analítica. La dependencia funcional fue apreciada por el hombre de forma intuitiva, desde épocas remotas, en la relación causal de los fenómenos. Muchos matemáticos trataron de expresar esta dependencia.

Cuando se estudia la evolución histórica del concepto función (Ribnikov, 1987), se pueden determinar los principales problemas por los cuales atravesó el concepto función a lo largo del desarrollo de la matemática y conocer los orígenes de las creencias que se pusieron de manifiesto y que por su carácter son ontológicas (Aguilar, 2001).

Los principales problemas se pueden resumir de esta manera:

- Se prestó mayor atención al aspecto de la función como expresión analítica que al de función como correspondencia de forma más general.
- La idea de función como expresión analítica era dominante.

- Se consideraba que todas las funciones eran expresables analíticamente.

Estos problemas, sin lugar a dudas, han influido notablemente en el tratamiento metodológico que se ha dado en la escuela a la formación y desarrollo de este concepto, provocando que los alumnos manifiesten la creencia de identificar el concepto con alguna expresión analítica.

Aunque el concepto función se trata de forma explícita en la Secundaria Básica, la Enseñanza Primaria juega un importante papel en el proceso de elaboración de este concepto, ya que en ella se establece de forma intuitiva las primeras ideas sobre conjuntos y correspondencias, conceptos necesarios para definir el primero. Por ello, se considera que el currículo de matemática de la Enseñanza Primaria en Cuba se adapta al pensamiento natural del hombre desde su infancia, aspecto este que favorece la asimilación del concepto función.

El estudiante se enfrenta por primera vez a la definición del concepto función en la Secundaria Básica. No obstante, la atención prestada al proceso de enseñanza aprendizaje de dicho concepto en esta enseñanza difiere en los diferentes planes de estudio.

A finales de la década del 50 y principios de la del 60, se realizaron reuniones importantes donde se abordaron los problemas de la matemática en la segunda enseñanza.

Las principales reuniones celebradas, en la década del 60, con el objetivo de unificar criterios en cuanto a qué impartir de matemática en la Secundaria Básica fueron, según L. A. Santaló (1967):

- El Seminario de Royaumont, celebrado del 23 de noviembre al 4 de diciembre de 1959 en Francia, con el título de “New thinking in school mathematics”.

- La Reunión de Dubrovnik, del 21 de agosto al 19 de septiembre de 1960 en Yugoslavia, donde se preparó el informe titulado “Synopses for modern secondary school mathematics”.
- El Seminario de Aarhus, del 30 de mayo al 2 de junio de 1960 en Dinamarca, el cual se dedicó a la enseñanza de la geometría del nivel secundario.
- La Segunda Conferencia sobre Educación Matemática en Asia, entre el 20 y el 27 de enero de 1960 en la India (la primera Conferencia se había celebrado en el mismo lugar entre el 22 y el 28 de febrero de 1956)
- La Reunión de Bolonia sobre la enseñanza de la Matemática, celebrada del 4 al 7 de octubre de 1961 en Italia
- La Primera Conferencia Interamericana sobre Educación Matemática, del 2 al 9 de diciembre de 1961, celebrada en Colombia.

En todas estas reuniones hubo una general coincidencia respecto a la necesidad de cambiar el contenido de los programas vigentes para la enseñanza de la matemática en el nivel secundario.

Sin embargo, cuando se estudió el resumen hecho por L. A. Santaló (1967) de otro de los documentos importantes, el Informe Kemeny, se pudo comprobar que la Secundaria Básica carecía en esta década de un estudio riguroso sobre las funciones. Según este autor, el informe se dio a conocer en el Congreso Internacional de Matemática de Edimburgo en 1958, donde la Comisión Internacional para la Enseñanza de la Matemática decidió que las subcomisiones nacionales estudiaran cuáles tópicos de Matemática y qué aplicaciones debían incluirse en los Programas de la Secundaria Básica. Las respuestas debían comunicarse a la Comisión para ser discutidas en el próximo congreso internacional.

Santaló (1967) destaca que contestaron a la encuesta 21 naciones, que las respuestas fueron tenidas en cuenta en un importante informe que el profesor

John G. Kemeny presentó al Congreso Internacional de Matemática de Estocolmo en 1962, actuando como relator del tema y que en opinión de la mayoría de los países que contestaron, se recomendaba la modernización del lenguaje y de la estructura conceptual de la matemática y que dichos tópicos eran:

- a) Elementos de la teoría de conjuntos.
- b) Introducción a la lógica.
- c) Probabilidades y Estadística.
- d) Álgebra Moderna.

Lo que se trataría en elementos de la teoría de conjuntos, según Santaló (1967), era: el concepto de conjunto, así como la unión, intersección y complemento de conjuntos. En la unidad de Álgebra Moderna, en caso de ser necesaria su enseñanza, se comprobó la tendencia unánime de introducir temas referentes a las estructuras algebraicas, pero nada que se acercara a la idea de profundizar en el concepto función.

De una manera u otra esto tuvo su influencia en la escuela cubana. En revisión realizada a una “Guía para el Maestro” para profesores de Secundaria Básica, elaborada por el profesor Luis J. Davinson (1964), Inspector Nacional de Matemática, se comprobó que en la década del 60 se hacían grandes esfuerzos en Cuba por brindarle al maestro orientaciones metodológicas para el desarrollo del Programa de Matemática de la Secundaria Básica, e incluso, con recomendaciones generales que dejaban clara la intención de poner al estudiante en el centro del proceso de enseñanza aprendizaje.

También, se dan las orientaciones metodológicas por unidades. Sin embargo, a pesar de que las funciones estaban incluidas en la unidad “Ecuaciones Literales. Fórmulas. Funciones y sus gráficos”, correspondiente al Álgebra de tercer año, no aparecían para esta unidad, sus recomendaciones. Se desconoce, por no haberlo encontrado, si existe algún otro documento donde se recogen estas orientaciones.

Para profundizar en el tema, se entrevistó a profesores de matemática que ejercieron por esa época y a decir de estos en esta etapa se impartían a los profesores cursos de capacitación para comenzar con profundidad el estudio de las funciones en la Secundaria Básica.

El estudio investigativo realizado hasta el momento permitió determinar que en la matemática de la Secundaria Básica, hasta aproximadamente finales de la década del 60, no se trataba con rigurosidad el concepto de función dentro del proceso de enseñanza aprendizaje de esta asignatura.

A partir de este momento se produce una transformación en el enfoque de la matemática en el país, y ello constituyó un factor decisivo a favor de un mejor tratamiento del concepto de función en el nivel de Secundaria Básica. Esto fue comprobado en la revisión de algunos textos de esta etapa, donde aparecían los contenidos correspondientes a funciones de manera más explícita y con un grado de profundidad mayor. La definición de función, aunque mantenía su esencia, variaba de unos autores a otros. Por ejemplo, se encuentran algunas como las siguientes:

- *“Cuando dos variables están relacionadas de tal manera que a cada valor de una de ellas corresponde uno o más valores de la otra, se dice que la segunda variable depende o que es función de la primera” (González, 1967).*
- *“Una función de A en B es una relación binaria “R” en $A \times B$ tal que:*
 - ✓ *el dominio de R es A,*
 - ✓ *cada elemento de A es primera coordenada de sólo un par ordenado en R” (Mc Fadden, 1969).*
- *Si con cada elemento de un conjunto A está de algún modo asociado exactamente otro elemento de un conjunto B, entonces esta asociación es una función de A en B” (Mc Fadden, 1969).*
- *“Una función es un conjunto de pares ordenados en los que no se repite nunca la misma primera coordenada” (Mc Fadden, 1969).*

En la Separata 1 de noveno grado, editada por el MINED en 1970, aparece que:

- *“Una relación binaria de X en Y es una función si y sólo si, a todo elemento $x \in X$, corresponde un sólo o ningún elemento $y \in Y$ ”* (MINED, 1970c).

Esta última definición no tiene en cuenta el concepto de correspondencia, además, en la forma que está redactada, pueden quedar elementos en el conjunto de partida “ X ” sin asociar, e incluso, la alternativa que aparece en la definición da la posibilidad que ningún elemento del conjunto “ X ” esté asociado con elemento alguno del conjunto “ Y ”.

Se diferenció el concepto de “función” del concepto de “aplicación”. Se consideraba el concepto de aplicación subordinado al de función, o sea la aplicación como una función con dominio pleno. En esta separata aparece que *“Una relación binaria del conjunto X en el conjunto Y es una aplicación sí y sólo sí a todo elemento $x \in X$ corresponde un elemento único $y \in Y$ ”* (MINED, 1970c).

Los conceptos de función y de aplicación estaban subordinados al concepto de “relación binaria”, el cual se definía a través de pares ordenados.

En muchas ocasiones se hacía referencia a funciones representadas a través de una relación escrita en forma tabular, en otras se utilizaban indistintamente los términos de aplicación y de función para designar una misma forma de representación, lo cual el autor considera que resultaba muy engorroso para ser comprendido por los estudiantes. Téngase en cuenta que estos tres conceptos son comparables, compatibles y que están en la relación de subordinantes y subordinados. Además, el lenguaje y la simbología utilizada se complican mucho más.

El libro “Conjuntos, relaciones y funciones” de Myra Mc Fadden (1969), se encuentra dentro de la enseñanza programada, por lo que presenta el contenido en forma de un programa que podía ser enfrentado de forma autodidacta. El

contenido del texto se presenta a través de “cuadros”, comenzando por los conjuntos, pasando por las relaciones hasta llegar a las funciones. Esta estructura brindaba al lector la posibilidad de aprender, siempre que fuera capaz de estudiar y responder, generalmente, de forma repetitiva, cada uno de los cuadros.

En este libro, aunque una definición de función se da a partir del concepto de relación binaria, también se dan otras definiciones (ver definiciones citadas anteriormente), lo que sin lugar a dudas, favorece la mejor comprensión del concepto. Además, a diferencia de la separata antes analizada, no se hace distinción entre el concepto de aplicación y el de función, pues se consideran a las funciones con dominio pleno.

No obstante, la terminología y el lenguaje utilizados, aunque en mucho menor grado, todavía resultaban engorrosos para los estudiantes del nivel medio.

A pesar de las críticas que se han realizado, se reconoce la atención brindada en este primer intento de profundizar en el estudio de las funciones, pues se trabajó con la confección de tablas, diagramas, diferentes formas de representación, se analizaron algunas propiedades de las funciones como la inyectividad, sobreyectividad, biyectividad, la monotonía, los ceros, la composición de funciones, el cálculo de valores funcionales, etcétera.

El perfeccionamiento del Sistema Nacional de Educación (1975 – 1980), devino en momento propicio para la introducción de nuevos Programas de Matemática (MINED, 1979 a-i), los cuales se caracterizaban por:

1. Ser una adaptación de la enseñanza media alemana (RDA).
2. Una mejor estructuración del sistema de conocimientos.
3. Una elevación significativa del contenido.
4. Estar sustentado sobre la base de sólidos fundamentos científicos y didácticos.

Con este nuevo plan de estudio, se daban al profesor, además de las recomendaciones por unidades, aclaraciones generales sobre la enseñanza de la matemática en cada uno de los grados, específicamente, algunos problemas del contenido de la formación matemática que se debían proporcionar en cada uno de ellos y sobre algunos problemas de la didáctica y de la metodología de la enseñanza de la matemática. Los contenidos sobre las funciones se atendían en la Unidad No. 5. “Funciones Afines”.

En el libro de texto de Matemática de octavo grado, aparece la siguiente definición: “*Un conjunto de pares ordenados $(x; y)$, con $x \in X$ e $y \in Y$ se llama función o aplicación de X en Y si a cada elemento $x \in X$ le corresponde exactamente un elemento $y \in Y$* ” (MINED, 1979 b).

Como se puede observar, aquí los conceptos de aplicación y de función son idénticos. Además, no se habla tampoco de relación binaria, lo que hace al lenguaje y a la simbología, más asequible para los estudiantes.

En las Indicaciones Metodológicas Complementarias para la simplificación de los programas, al referirse al conocido “Plan Alemán”, se señala: “*Sin embargo, en las prácticas escolares se presentaron dificultades y la eficiencia del aprendizaje ha sido baja como revelan las visitas de inspección y los resultados de las investigaciones realizadas*” (MINED, 1987).

En estas indicaciones, el concepto función y el análisis de funciones fueron aspectos centrales en todo el curso de Matemática. Los alumnos debían dominar las propiedades de las funciones y las formas de representar una función. En particular, debían ser capaces de relacionar las propiedades de la función con su representación gráfica y obtener aquellas a partir de una representación mental clara de la segunda.

Con las nuevas indicaciones se da un paso de avance en el tratamiento de los contenidos sobre funciones, ya que anteriormente el concepto de número real se introducía después de las funciones y con estas indicaciones se introduce primero, lo que significa una ventaja enorme para el análisis de algunas propiedades y para la representación gráfica de las funciones.

Otro aspecto positivo fue el de proponer un conjunto de ejercicios, además de los que aparecían en el libro de texto, como sugerencias para la ejercitación. Además, aparece por primera vez el concepto función lineal como funciones definidas por una ecuación de la forma $y = mx$, introducida a partir de la proporcionalidad directa. La función afín, definida por la ecuación $y = mx + n$, no se consideraba como una función lineal.

Como parte del perfeccionamiento continuo del Sistema Nacional de Educación, fue elaborado por un colectivo de autores del MINED en 1990 un nuevo plan de estudio de matemática para la Secundaria Básica, teniendo en cuenta los logros y deficiencias del Plan anterior. En 1992, se le hicieron adecuaciones al Programa de Matemática de este Plan (MINED, 1992). Como resultado de ello, se obtuvo un plan de estudio caracterizado por responder de forma más objetiva a las condiciones de la educación cubana.

Desde el curso escolar 1999 - 2000, se están aplicando nuevas transformaciones del Programa de Matemática de la Secundaria Básica y a partir del curso 2002 - 2003 se producen estas en el Preuniversitario. Con las nuevas transformaciones el concepto de función y el estudio de las funciones numéricas no sufren cambios sustanciales.

En esta nueva concepción, el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto función, en particular el concepto función lineal y sus propiedades se desarrolla en el noveno grado y en el Preuniversitario continúa el estudio de esta temática, pues en el décimo grado se estudian las funciones lineales y cuadráticas, en el oncen

grado se continúa el estudio del concepto de función ya que se trabajan las funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas. Y en el duodécimo grado se sistematiza el estudio de las mismas. De cada una de ellas se analizan la representación gráfica y las propiedades tales como: dominio, imagen, ceros, monotonía, signos, paridad, inyectividad y periodicidad.

No hay dudas que el trabajo con las funciones, en la escuela cubana, requiere de un esfuerzo por parte del profesor y del estudiante, de forma que para lograr su fijación debe existir una interrelación continua entre estos, así como la relación que se pueda establecer entre los propios estudiantes en el aula, y se considera que para lograr este propósito se hace necesario tener en cuenta los presupuestos teóricos de la teoría socio cultural de Vigotsky y en particular el concepto de Zona de Desarrollo Próximo.

1.2. Enfoque histórico-cultural como sustrato teórico de carácter psicológico del aprendizaje de las funciones en la asignatura de Matemática

Como es conocido por todos, el hombre está dotado del pensamiento racional y del lenguaje. Éstos juegan un papel determinante en su desarrollo individual. Pero estas actitudes pueden permanecer muy poco desarrolladas en condiciones sociales desfavorables cuando se carece de una correcta educación. En correspondencia con estas consideraciones, el enfoque histórico cultural de Vigotsky constituye un fundamento psicológico que permite hacer más activo el proceso de enseñanza aprendizaje (Vigotsky, 1982; Davidov y Radzиковsky, 1984).

Precisamente, la enseñanza no debe basarse en una transmisión puramente superficial y mecánica, pues el proceso de asimilación se tiene que desarrollar por parte del alumno y con ayuda del profesor y demás estudiantes. El maestro no solamente debe impartir la materia, también debe enseñar al alumno cómo aprender, a que pueda concentrarse cuando lo desee, a conseguir la información

que necesita y a que actúe con sabiduría, pero además debe trabajar en función de las dificultades de cada estudiante, de aquí que deba prestarle la debida atención a lo que piensan sus alumnos, en lugar de disertar expositivamente todo el conocimiento que tiene.

Teniendo en cuenta estos presupuestos, en el trabajo se tiene en cuenta el conocido concepto de Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) dado por Vigotsky y que se define como la distancia que media entre el plano social y el plano psicológico individual; entre lo que el alumno puede hacer con ayuda y lo que el alumno puede hacer por sí mismo; distancia que media entre el desarrollo alcanzado por el alumno y el desarrollo potencial del alumno, y tal vez el concepto que más aplicaciones sugiere en el campo de la educación.

Este concepto condujo a una reestructuración del concepto de aprendizaje, que se expresa en:

- El aprendizaje no existe al margen de las relaciones sociales.
- El buen aprendizaje no ocurre fuera de los límites de la ZDP.
- El aprendizaje y la educación conducen al desarrollo.
- El aprendizaje es un proceso que conlleva al desarrollo de la personalidad.

Sobre el trabajo en la ZDP se puede decir que, cuando el alumno logra hacer por sí mismo una tarea (plano psicológico individual) el proceso continúa, es decir, se le deben proponer tareas de mayor complejidad que tenga que hacerla con ayuda (plano social) hasta lograr hacerlo nuevamente, por sí mismo y así sucesivamente logrando cada vez más el desarrollo.

Además, esta teoría tiene aspectos positivos relativos al aprendizaje tales como:

- El papel activo del alumno en el proceso de enseñanza aprendizaje (construye su conocimiento).
- Ambas desarrollan la personalidad del alumno.

- El alumno realiza actividades con objetos del medio (experimentación, la computadora).
- Papel del maestro en el aprendizaje del alumno.
- Se debe caracterizar inicialmente al alumno (diagnóstico).
- Estimulan la independencia y creatividad del alumno.
- Conceden importancia a la motivación en el proceso de enseñanza aprendizaje.
- El aprendizaje debe ir en espiral.

Al hacer un análisis de los presupuestos de esta escuela se puede concluir que la misma está en correspondencia con la propuesta de esta tesis, pues el conjunto de tareas que se elaboró, así como su aplicación tuvo en cuenta estos presupuestos teóricos, sobre todo el concepto de ZDP, ya que las tareas docentes están dirigidas a que el estudiante, en un inicio, trabaje con ayuda del profesor y luego pueda por sí solo investigar con el programa de Geometría Dinámica CABRI GEOMETRE II los aspectos relativos al concepto de función.

1.3. Fundamentos teóricos y metodológicos que sustentan el empleo de las tareas docentes en el desarrollo del proceso de enseñanza- aprendizaje de la matemática

La tarea docente ha sido utilizada en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática desde hace mucho tiempo, tal vez no con esta denominación pero sí en lo que respecta a la esencia y al objetivo que persigue la misma, que es poner al estudiante en el centro del proceso de enseñanza aprendizaje y lograr que pueda participar activamente en la búsqueda del conocimiento.

En un análisis realizado por Majmutov (1983), a mediados de la década de los setenta del siglo XX, se revelan las limitaciones que aún existían alrededor de la categoría tarea docente, las que se expresan a través de:

- Una marcada intención en producir una separación entre las categorías tarea docente y problema docente.
- El establecimiento de diferencias sustanciales entre la tarea docente como categoría didáctica y el problema como categoría psicológica–didáctica–lógica, lo que se refleja en el siguiente planteamiento “... *(la tarea) es como la forma, como la capa o la expresión externa del problema*”. Esta concepción de la tarea docente no permite considerar al problema docente como una tarea en sí mismo, pues se plantea que en el marco de la categoría tarea es imposible revelar el mecanismo de los actos internos (lógico–psicológico) del alumno, lo que se fundamenta a través de los siguientes razonamientos:
 - La tarea se encuentra fuera del sujeto y no se relaciona directamente con él.
 - No toda tarea contiene datos que puedan provocar la contradicción en el propio pensamiento del alumno.
 - El contenido de los conceptos nuevos se expresa no solo en forma de tareas docentes, puede hacerse también en forma de preguntas y ejercicios, y en imágenes visuales o combinación de las imágenes visuales con la palabra. Pues el pensamiento se efectúa no solo en relación con la solución de una tarea.
 - La contradicción que surge en el pensamiento del alumno cuando se plantea la tarea puede eliminarse mediante la acción del maestro, es decir, con la explicación de la esencia del nuevo concepto.
 - Se limita la diversificación de la tarea docente, pues desde este punto de vista los ejercicios, la búsqueda y procesamiento de información etc. no constituyen tareas, ni tampoco el problema docente el cual es comprendido como “... un reflejo (forma de manifestación) de la contradicción lógico psicológico del proceso de asimilación, lo que determina el sentido de la búsqueda mental, despierta el interés hacia la investigación (explicación) de la esencia de lo desconocido y conduce a la asimilación de un concepto nuevo o de un modo nuevo de acción” .

Se coincide con Majmutov (1983) cuando fundamenta estas limitaciones al plantear:

- “El hecho de que en la literatura pedagógica el concepto contradicción se relacione solamente con el concepto tarea, que no incluye al sujeto del conocimiento, es un testimonio de la imperfección del aparato de categorías de la didáctica ...”
- “La esencia de aplicar tareas cognoscitivas como un modo para lograr mayor actividad docente cognoscitiva en los alumnos, reside en la selección de un sistema de tareas problémicas y en la dirección sistemática del curso de su solución. Lo dicho no excluye, en general, la aplicación de tareas no problémicas en el proceso docente; se trata de hallar una combinación racional de ellas”.
- “De este modo, la pregunta problémica y la tarea problémica son distintas formas de expresión del problema docente (...). Por esta razón, una de las direcciones importantes en la investigación de las vías para organizar la enseñanza está constituida por la búsqueda de la tipología de las tareas cognoscitivas, ...” .

Por otro lado, en las dos últimas décadas las investigaciones realizadas alrededor de las categorías tarea y problemas docentes han experimentado un crecimiento notable, y en todas ellas se pone de manifiesto el análisis de las limitaciones referidas anteriormente, existiendo plena coincidencia con aspectos tan importantes como: la necesidad y utilidad de establecer una tipología de tareas y considerar el problema docente como la tarea de mayor potencialidad para la formación y desarrollo integral de los educandos durante la realización del proceso de enseñanza aprendizaje. En Cuba, por solo mencionar algunos, se refieren a los aspectos antes señalados autores como: Concepción (1989), Álvarez de Zayas (1999), Gómez (2008), Garcés (2003).

Concepción (1989) define la tarea “como un eslabón que enlaza la actividad del profesor y del alumno para la formación del sistema de conceptos”. La misma

queda restringida a la actividad del estudiante y el profesor en la formación de los conocimientos, sin incluir la comunicación en esa interrelación.

Para Gómez (2008) la tarea “es una determinada situación en la cual existen nexos, relaciones, cualidades de y entre objetos que no son accesibles directamente o inmediatamente a la persona”.

Una visión holística sobre la tarea docente es la expresada por Carlos M. Álvarez de Zayas cuando plantea: “... es la célula del proceso docente educativo, porque en ella se presentan todos los componentes y leyes del proceso y además cumple la condición de que no se puede descomponer en subsistemas de orden menor ya que al hacerlo se pierde su esencia: la naturaleza social de la formación de las nuevas generaciones que subyace en las leyes de la pedagogía” (Álvarez de Zayas, 1996).

Las principales limitaciones que se manifiestan en todos los análisis, hasta aquí realizados son:

- Se reconocen y se critican las posiciones asumidas por determinados autores, pero no se aportan concepciones que cambien estas posiciones.
- Cuando se brinda una nueva concepción se hace de forma tan global que no ofrece muchas opciones desde el punto de vista metodológico.
- Existe plena conciencia de que un cambio en el proceso de enseñanza aprendizaje acorde con las actuales necesidades y exigencias sociales, requiere de un cambio esencial en la concepción y formulación de la tarea docente, porque es en la tarea docente donde se concretan las acciones y operaciones a realizar por los alumnos para lograr los objetivos.

Luego de hacer una valoración de las diferentes caracterizaciones de la tarea docente, el autor asume la caracterización realizada por Álvarez de Zayas al tener en cuenta que en la misma se valora la tarea docente como el núcleo fundamental dentro del proceso de enseñanza, en la que se presentan y se integran tanto los

componentes personales (estudiante, profesor, grupo), como los no personales (objetivo, contenido, método, medios, evaluación) y tiene en cuenta las leyes del proceso. En la tarea docente el estudiante hace suyo el objetivo, lo personaliza en su método o estilo de aprendizaje, su contenido, sus medios, su forma y autocontrol para resolverla.

Por otro lado, las características de la tarea docente son consecuencias del concepto acción, “como componente fundamental de la actividad” (Leontiev, 1982). Entre estas características se destacan:

1. Se estructuran sobre la base de objetivos jerárquicamente determinados.
2. Su planteamiento tiene un carácter consciente y planificado.
3. Está necesariamente relacionada con el concepto de motivo.
4. Se realiza a través de una secuencia de determinadas acciones objetivamente condicionadas que se superponen e interrelacionan de diversas formas.

En esta caracterización se reafirma la concepción de que la tarea docente es la instancia donde se integran los componentes del proceso de enseñanza aprendizaje (Álvarez de Zayas, 1999; Concepción y Rodríguez, 2005). Por tanto se puede afirmar que: es en la tarea docente donde se plantean determinadas exigencias a los estudiantes, las cuales repercuten tanto en la adquisición de conocimientos, en el desarrollo del intelecto, así como en la formación de cualidades y valores.

Esto se manifiesta a través de los tres rasgos esenciales que adquiere la tarea docente en el proceso de enseñanza aprendizaje, los que se pueden expresar como: la diversidad, la interactividad y la multilateralidad. A continuación se caracteriza cada una de ellos:

La diversidad: es entendida como la variedad de enfoques y tipos de tareas que se pueden planificar durante el proceso de enseñanza aprendizaje. En este

sentido las investigaciones realizadas sobre la dirección de este proceso, a partir del trabajo con las tareas docentes, han planteado la necesidad de establecer determinadas tipologías y/o clasificaciones, ante todo, para dejar bien claro los rasgos externos e internos de los distintos tipos de tareas docentes y sus propiedades específicas, así como para determinar el carácter de la actividad mental que provoca en los alumnos, uno u otro tipo de tarea.

La interactividad: se manifiesta mediante las formas en que se relacionan los componentes personales y no personales que intervienen en el proceso de enseñanza aprendizaje. Addine, et al, (1997) plantean que los primeros (componentes personales) son las relaciones que se producen entre los sujetos que participan de tal proceso: alumno – alumno, profesor – alumno, profesor – profesor y profesor – grupo. Los componentes no personales del proceso son los objetivos, el contenido, los métodos, los medios, las formas organizativas y la evaluación.

Las tareas docentes no se pueden concebir aisladas de los sujetos que intervienen en el proceso de enseñanza aprendizaje, pues a partir de las características individuales y colectivas es que se determinan:

- Las necesidades y motivaciones.
- Las exigencias y nivel de profundidad de las tareas.
- Los tipos de tareas en los que se debe hacer énfasis.
- Las formas de trabajo (individual o colectivo) que se ha de emplear en cada momento.
- Los niveles de ayuda y orientación que son necesarios y el momento preciso para ofrecerlos.

Un aspecto significativamente importante a tener en cuenta y que es determinante para el establecimiento de las relaciones interpersonales correctas es: la creación de un clima de confianza donde no exista el temor a reconocer el error, solicitar

ayuda, admitir el desconocimiento de algo, reconocer el éxito individual y colectivo y expresar la disposición de alcanzar los objetivos propuestos. Un papel decisivo para poder lograr este clima de confianza le corresponde al profesor.

La multilateralidad: la tarea docente en el proceso de enseñanza aprendizaje, constituye el medio a través del cual se va a dar cumplimiento a los grandes objetivos que se plantean en el programa de estudio. Con el fin de profundizar mejor en su estudio y análisis estos objetivos se han agrupado en tres grandes campos: objetivos en el campo del saber y el poder, los objetivos en el campo del desarrollo intelectual y los objetivos en el campo de la formación y desarrollo político–ideológico y de valores.

Estos tres campos en los que se ha referido el trabajo con las tareas docentes solo se dan por separados con el fin de profundizar en sus características y particularidades, en la práctica estos constituyen una unidad dialéctica, que se sustenta sobre la base de un fin común: la formación multilateral del estudiante.

Para clasificar las tareas se analizaron las propuestas de Pidkasisty (1986) y Concepción (1989), las que se consideran con un alto valor metodológico para planificar el trabajo docente:

- **Reproductivas:** Este tipo de tareas requiere de una información obligatoria sobre su realización, que el alumno convierte en procedimiento de solución para lo cual incorpora conocimientos y habilidades ya adquiridos. El estudiante reproduce el conocimiento y la estructura de éste. Esta tarea lo prepara para la búsqueda de medios con vista a la aplicación del conocimiento en nuevas situaciones.
- **Productivas:** Durante el cumplimiento de estas tareas, se obtiene una nueva información sobre el objeto, utilizando como instrumento para ello conocimientos y procedimientos adquiridos. Obtienen experiencia en la

búsqueda y se apropian de elementos de creación pero no desarrollan la creatividad integralmente.

- **Creativas:** Aquí el alumno realiza una profunda aplicación de sus conocimientos y procedimientos en situaciones nuevas que requieren de la creatividad al desarrollar en ellas sus propios razonamientos en la elaboración del procedimiento para la acción. Puede llegar a plantear y solucionar nuevos problemas.

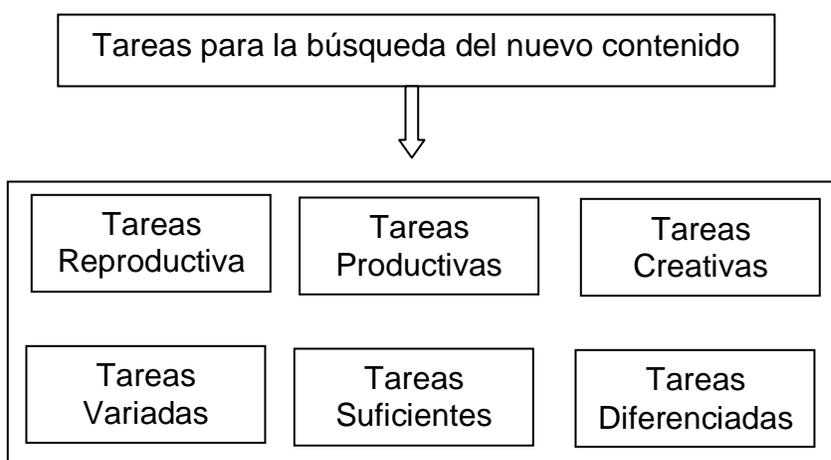
Se coincide con Silvestre y Zilberteín (2002), sobre las características de las tareas docentes, por lo que considera que deben ser:

- **Variadas:** de forma que se presenten diferentes niveles de exigencias que promuevan el esfuerzo intelectual creciente en el alumno, desde el ejercicio sencillo hasta la solución de problemas, el planteamiento de hipótesis, la concepción y ejecución de proyectos, la creación de problemas.
- **Suficientes:** de modo que asegure la ejercitación necesaria tanto para la asimilación del conocimiento como para el desarrollo de habilidades. Si el alumno ha de aprender, ha de aprender haciendo. Este haciendo es efectivo si el alumno está preparado para vencer las dificultades, si es adecuado el control y la orientación para diferenciar error y resultados que debió alcanzar.
- **Diferenciadas:** de forma tal que la tarea esté al alcance de todos, que facilite la atención de las necesidades individuales de los alumnos, tanto para los que necesitan una mayor dosificación de las tareas, como tareas de mayor nivel de exigencia que impulsen el desarrollo de los alumnos más avanzados, además de considerar los intereses y motivaciones de los alumnos.

También, esta clasificación se puede complementar con (Concepción; Rodríguez 2005):

- **Tareas para la búsqueda del nuevo contenido:** el estudiante redescubre un nuevo contenido, ya sea un concepto, un teorema o un procedimiento.
- **Tareas para el desarrollo de habilidades:** Con estas se ejercitan las operaciones de determinadas habilidades en situaciones cambiantes y creciente nivel de complejidad.
- **Tareas para la sistematización del contenido:** persigue profundizar la complejidad del contenido.

Por lo tanto, a partir de las clasificaciones dadas, por estos autores, y teniendo en cuenta que uno de los objetivos esenciales del programa de Geometría Dinámica CABRI GEOMETRE II, es la búsqueda de proposiciones y planteamiento de conjeturas se propone que las tareas deben tener la siguiente clasificación.



Como se puede observar, se propone que las tareas sean del tipo reproductivas, productivas y creativas y que a la vez deben ser, para cada tipo, variadas, suficientes y diferenciadas.

1.4. Características de la introducción del ordenador en la enseñanza de la matemática. El programa CABRI GEOMETRE II. Potencialidades

A finales de la primera mitad del siglo XX comienzan a aparecer las primeras computadoras que en aquel entonces eran máquinas muy grandes y costosas. En la segunda mitad de este siglo surgen las llamadas minicomputadoras y con ellas los primeros intentos de aplicarlas a la enseñanza.

En el Seminario Nacional para Educadores desarrollado por el MINED en noviembre del 2005 se reconoció al "...software educativo como una aplicación informática concebida especialmente como medio integrado al proceso de enseñanza aprendizaje..." (MINED, 2005).

El uso de programas computarizados permite incrementar las potencialidades de estos medios de activación y motivación de los estudiantes hacia el aprendizaje desarrollador, dando posibilidades de medición de gran cantidad de conocimientos, de acelerar los resultados, de diagnosticar simultáneamente a una considerable cantidad de estudiantes, de motivarlos más hacia el aprendizaje y darles puntos de apoyo para caminar solos hacia la búsqueda o desarrollo del saber.

La aparición de herramientas tan poderosas como la calculadora gráfica y la computadora están comenzando a influir fuertemente en los intentos por orientar la educación matemática adecuadamente, de forma que se aprovechen al máximo tales instrumentos de trabajo, pues las mismas ofrecen posibilidades para almacenar informaciones y contrastarlas, para proporcionar rápida retroalimentación, para simular situaciones, etc. y, muy particularmente, para conectar con el interés que los nuevos medios despiertan en los alumnos. Es claro que, por diversas circunstancias tales como costo, novedad, falta de preparación de los profesores, negativas de algunos, etc., no se ha logrado encontrar modelos plenamente satisfactorios. Este es uno de los retos importantes del momento presente, es por ello que desde ahora se puede presentir que la forma de enseñar y los contenidos a impartir tienen que experimentar algunas reformas.

Muchos son los autores que reconocen el papel que juega el ordenador en los

ambientes educativos específicamente en la enseñanza de la matemática (Cruz, 1997), "...*aún cuando se recomienda cordura en su empleo afín de minimizar los riesgos que traen aparejado el uso de estos recursos, no solo en la enseñanza de las matemáticas sino, en todas las disciplinas docentes.*" (Coloma, 1998).

Son varios los países del mundo que están aplicando el uso del Logo en la enseñanza primaria como un lenguaje asequible para los alumnos. Este lenguaje tiene gran importancia pues permite a los niños interactuar con la computadora y así estructurar sus conocimientos mediante razonamientos. Otros de los lenguajes utilizados es el Scheme específicamente en matemática, este lenguaje es similar al Logo, pero ofrece mayor flexibilidad, simplicidad y potencialidades para la resolución de problemas algebraicos (Izquierdo y Fernández, 1997).

Las siguientes conclusiones fueron elaboradas después de consultadas las investigaciones desarrolladas en Venezuela (Ríos, 1998) y en Brasil (Gravina y Santa Rosa, 1998; Sidericoudes, 1998):

- Sin dudas el uso de los ordenadores van a revolucionar la enseñanza de la matemática, para ello se debe entender al computador como una herramienta de aprendizaje y un medio de comunicación entre el estudiante y el profesor.
- La elaboración y validación de conjeturas y pruebas, la formulación de problemas y el descubrimiento de propiedades son elementos que se podrá enfatizar con el uso de la computadora.
- Se requiere un entrenamiento previo de los profesores, no sólo en lo tecnológico, sino especialmente en el aspecto didáctico, debido a la negativa de algunos profesores hacia estos medios, reforzada en algunos casos por su uso inadecuado.
- Otro aspecto crucial, lo constituye una reforma curricular que elimine los tópicos obsoletos, incompatibles con las nuevas tecnologías.
- El uso de la tecnología se debe complementar con la aplicación de los

métodos tradicionales ya que no todos los conceptos son adecuados para ser explorados a través de la computadora.

- A pesar de estas limitaciones, el uso integrado de la tecnología en la enseñanza de la matemática tiene un enorme potencial motivador para el estudiante y el profesor, lo cual se traducirá en mejores resultados a corto plazo, aunque para ello se tendrá que revisar los actuales sistemas de evaluación que, generalmente, refuerzan el aprendizaje de técnicas y cálculos repetitivos, debilitando el aspecto conceptual y creativo.
- Los resultados alcanzados llevarán al alumno a construir nuevos conocimientos. Aprender de ese modo es “aprender haciendo”, que caracteriza una acción contextualizada y significativa.

Los obstáculos para la adopción de los medios informáticos en el medio escolar, lo que la Informática puede dar a la docencia, lo que el profesor puede hacer con este medio y trata la planificación de un aula especializada, de la validación del software y de la preparación de los alumnos, fueron abordados por Antunes (1998) en un trabajo investigativo desarrollado en Portugal.

También, se revisaron trabajos desarrollados en el continente asiático presentados en el Congreso Internacional de Educación Matemática (Thanh, 1998; Shang, 1998; Chong, 1998; Green, 1998; Cheung, 1998). Los mismos abogan, de manera general, por el uso de la computación en las actividades docentes de matemática y los resultados obtenidos son similares a los ya descritos anteriormente.

En las condiciones actuales de Cuba, transformar radicalmente la clase de matemática con el uso activo de los ordenadores no es del todo posible, pero se pueden dar pasos que vayan preparando el camino para cuando existan todas las condiciones materiales, es decir, en la actualidad, se ha introducido esta tecnología en la escuela, pero no son suficientes y antes de que llegue el momento hay que resolver desde el punto de vista psicológico y didáctico cómo usarlo, hasta qué punto contribuye a un aprendizaje significativo y cualitativamente

superior, en qué proporciones deberán combinarse el uso del lápiz y el papel y el trabajo con calculadoras y computadoras personales, qué contenidos (conocimientos + habilidades) habrá que introducir o renovar, entre otros problemas.

También, para favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje, hay que determinar las “proporciones” entre las habilidades a desarrollar en los estudiantes con y sin el uso de estas tecnologías. Será necesaria una revisión de los contenidos de enseñanza, no tan sólo de aquellos conocimientos que tienen prioridad para su aprendizaje, sino también de las habilidades que se deberán formar; distinguiendo aquellas que a pesar del uso de los medios de cómputo, son necesarias en la formación matemática del estudiante.

El profesor con el uso del recurso informático podría elaborar ejercicios que difieren de los del libros de texto y de los planes de clase; no hay por qué seguir seleccionando ejercicios con resultados “cómodos”, pues ese criterio cambiaría. Podrían y deberían plantearse problemas reales a los estudiantes, lo cual coadyuvaría a reforzar la motivación y a cambiar las creencias de estos sobre el estudio de las matemáticas, entre otras ventajas.

Como se ha podido observar, luego de lo analizado, la enseñanza de la matemática se ha visto enriquecida por el desarrollo de una gran cantidad de software para computadoras y la utilización de las mismas es altamente deseable en la enseñanza y el aprendizaje, pues las posibilidades que brinda la informática son (Azinia, 1998):

1. *Interactividad e inmediatez.*
2. *Capacidad de almacenamiento y de recuperación de la información.*
3. *Múltiples formas de representación en un mismo medio: textual, gráfica, tabular, auditiva, icónica, espacial.*
4. *Polivalencia, versatilidad.*

A pesar de estas ventajas, como ya se ha planteado, existen deficiencias y retos que se deben enfrentar y que se pueden resumir en las siguientes (Negrón C. et al., 2001):

- Es necesario considerar la necesidad de la actualización permanente de los docentes y de los alumnos que se forman como profesores, en la utilización de los recursos informáticos como irrenunciables auxiliares del proceso de enseñanza aprendizaje, en la formación y constante actualización en la matemática como ciencia, en la disciplina particular que imparte y en el aspecto psicopedagógico.
- Revisión de los contenidos de enseñanza, no sólo de aquellos conocimientos que tienen prioridad para su aprendizaje, sino también de las habilidades que se deberán formar; distinguiendo aquellas, que a pesar del uso de los medios de cómputo, son necesarias en la formación matemática del estudiante. Además, se deben tener en cuenta las limitaciones del tiempo académico, que es uno de los problemas que más aqueja a los docentes de todos los niveles de enseñanza.

En resumen, el impacto tecnológico en los ámbitos educativos es un hecho irreversible y caracterizará el quehacer pedagógico en un futuro cercano. Él plantea retos a los docentes, a los investigadores en Educación Matemática y a toda la estructura de dirección que toma las decisiones en cuanto a la introducción de equipos y software en el proceso de enseñanza aprendizaje. Los ritmos de desarrollo y la presencia en toda la vida humana de los recursos informáticos obligan a las instituciones a tenerlos en cuenta y tener que transformar la propia concepción educacional, pero este fenómeno tiene bondades y peligros, asociados al uso que sea capaz de hacerse de ellos y la forma en que se administre para que sea patrimonio de todos y no sólo de una parte.

1.4.1. El programa CABRI GEOMETRE II. Potencialidades.

La enseñanza de la matemática y en particular la geometría y el trabajo con funciones se han visto enriquecidos por el desarrollo de una gran cantidad de

software para computadoras y la utilización de las mismas es altamente deseable en la enseñanza y el aprendizaje. Entre estos se encuentran los programas de Geometría Dinámica, tales como: el Geometer's Sketchpad y el CABRI GEOMETRE II. Por las potencialidades que brinda este último en el trabajo con las funciones fue seleccionado para desarrollar esta investigación, que además está insertado dentro del software "EUREKA" dirigido a la enseñanza y aprendizaje de la matemática en el Preuniversitario.

CABRI GEOMETRE II es un programa que permite "hacer geometría" tanto al estilo sintético como al estilo euclídeo. El software permite experimentar, analizar situaciones geométricas de muy diverso tipo, comprobar resultados, inferir, refutar y también, aunque parezca mentira, demostrar. Se pueden dibujar lugares geométricos y envolventes a familias de curvas, concepto dejado de lado tradicionalmente por la dificultad de visualizar trayectorias recorridas por objetos que cumplen ciertas propiedades.

Permite realizar animaciones y construir gráficas de funciones asociadas a problemas geométricos lo que es muy interesante para familiarizar a los alumnos con el concepto de función, gráfica de una función y sus propiedades. Además, es muy dinámico a la hora de realizar animaciones de gráficos y configuraciones permitiendo observar los cambios establecidos, así como también poder ver una situación en forma global, visualizando los gráficos y sus diferentes elementos.

También, este programa brinda la posibilidad de capturar los procedimientos, es decir, son grabados los procedimientos de los alumnos en su trabajo de construcción, y mediante la solicitud de el alumno él puede repasar la "historia" del desarrollo de su construcción, esto permite revisar sus acciones e identificar dónde cometió los errores, lo que contribuirá a su desarrollo metacognitivo.

Opciones del CABRI GEOMETRE II.

Se abordarán específicamente las opciones que van a permitir realizar el estudio sobre las funciones.

1. En el **menú principal** presenta opciones importantes tales como:
 - **Revisar construcción**, que permite, como el nombre lo indica, revisar la construcción realizada paso a paso. Esto permite al profesor analizar cuál o cuáles fueron los caminos que siguió el alumno para hacer el ejercicio propuesto y determinar dónde se equivocó. También, le permite al estudiante analizar los caminos herrados, contribuyendo así a su metacognición.
 - **Ocultar y Mostrar atributos** que permite un mejor diseño de los objetos que están en el boceto.
 - **Configuración de herramientas...** que permite al profesor adaptar cada menú del programa en dependencia de la clase que vaya a impartir o de las actividades que vayan a desarrollar los estudiantes. Puede adaptarse el sistema a las condiciones de cada grado.
 - Con **F1** muestra en la parte inferior del boceto una ayuda al usuario de las diferentes opciones con las que va a trabajar.
2. El trabajo con la **barra de herramienta** es cómodo, pues los 11 grupos de herramientas están diseñados con un icono, el cual cambia en dependencia de la opción escogida en el grupo. Además, al activar el icono se puede realizar esta opción las veces que desees, sin tener que volver al menú y no es necesario marcar los objetos.
3. Cuando escoges una opción el sistema te muestra un letrero indicándote los elementos por donde vas a ejecutar la construcción.
4. El **tercer grupo** de herramienta permite construir vectores y polígonos regulares, incluyendo los estrellados.
5. En el **cuarto grupo** de herramienta da la posibilidad de construcción de las cónicas.
6. El **quinto grupo** de herramienta permite trazar la suma de vectores. Presenta la opción de transferencia de medidas de gran importancia en

diferentes construcciones como la de los lugares geométricos. Además, permite construir familias de envolventes de curvas.

7. En el **sexto grupo** se incluye la transformación geométrica **inversión**.
8. La construcción de macros resulta sencilla y es de gran utilidad.
9. El **octavo grupo** de las herramientas está dirigido a la comprobación de propiedades como el paralelismo, perpendicularidad, alineación, equidistante y si un punto pertenece o no un objeto.
10. El trabajo con la calculadora resulta muy sencillo.
11. El **décimo grupo** presenta la opción marca de ángulos, la cual muestra en el boceto una marca al ángulo seleccionado. También, tiene la opción de Fijar o Liberar un punto en la construcción. Por último, presenta la posibilidad de animación múltiple.
12. El **grupo 11** de herramientas da la posibilidad de mejorar la presentación en el boceto de la construcción realizada, pues tiene posibilidades de color (15 colores), relleno (15 colores), grosor del objeto, punteado y modificar apariencia de puntos, marcas de ángulo, segmentos, ejes de coordenadas (cartesianos y polares) y comentarios.
13. Puedes escoger las opciones de los grupos de herramientas sin tener que seleccionar los objetos a utilizar en la acción a realizar.

Para la realización de las tareas propuestas se hará uso de algunas opciones del CABRI GEOMETRE II, las cuales se pueden consultar en el anexo 4.

Por último, se considera que estos programas pueden ser usados con efectividad en los contenidos de geometría y funciones que se imparten en la escuela cubana. Por las facilidades, desde el punto de vista didáctico, que ofrecen los mismos pueden ser utilizados tanto por los profesores como por estudiantes y mediante los cuales se pueden realizar diferentes actividades docentes, entre ellas: laboratorios, trabajos extraclases, trabajos investigativos, además, permiten al profesor construir ejemplos para ilustrar conceptos, métodos y motivar a los alumnos hacia la solución de problemas reales, etc.

Además, dentro de los **objetivos generales** de la asignatura Matemática en el nivel Medio Superior se encuentra: *“Desarrollar hábitos de estudio y técnicas para la adquisición independiente de nuevos conocimientos y la racionalización del trabajo mental con ayuda de los recursos de las **tecnologías de la informática y la comunicación**, que le permitan la superación permanente y la orientación en el entorno natural, productivo y social donde se desenvuelve” (Programa de Matemática, p. 6-7, 2004).*

Por otra parte, en las **indicaciones metodológicas generales** de la asignatura Matemática, se plantea la utilización de las tecnologías de la informática y la comunicación con el objetivo de adquirir información y racionalizar el trabajo de cálculo, pero también con **finés heurísticos**. Y se insiste que otro elemento a tener en cuenta en la planificación de las clases es la introducción coherente del software educativo, los sistemas de aplicación y los asistentes matemáticos como EQUATION y el GEÓMETRA, los cuales deben ser utilizados por los alumnos dentro y fuera de las clases, a partir de la certera orientación de los docentes.

De aquí que, el uso de las nuevas tecnologías constituye, en la actualidad, una prioridad dentro de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática del Preuniversitario. Por otro lado, en los programas actuales de matemática para las EMCC, se contempla el estudio de las funciones lineales, cuadráticas, cúbicas, con radicales, trigonométricas, de proporcionalidad inversa, modulares, exponenciales y logarítmicas, y dentro de los objetivos generales relacionados con la temática de las funciones están:

- ✓ Sistematizar las propiedades (monotonía, paridad, inyectividad, sobreyectividad, biyectividad) de las funciones a estudiar.
- ✓ Determinar las propiedades fundamentales de las funciones estudiadas.
- ✓ Representar gráficamente las funciones estudiadas.
- ✓ Transferir de una representación a otra de las funciones, es decir, de sus propiedades a su representación analítica, gráfica o descriptiva (en el lenguaje

común) y viceversa, aplicando estos conocimientos a situaciones de la práctica u otras ciencias.

1.5. Caracterización de los alumnos de la EMCCH

Los estudiantes que ingresan al centro están comprendidos en las edades entre los 15 y 18 años de vida, por lo que están atravesando por la difícil etapa de la adolescencia, período en que sufren numerosos cambios físicos, mentales, de la conducta y la personalidad. Es la etapa en que comienzan a dejar de ser niños para ir adentrándose en la juventud, es como una etapa transitoria, por lo que sus ambiciones, preferencias, gustos, prioridades cambian constantemente y en ocasiones no tienen bien definido cual es el objetivo final de sus actos.

En medio de estas características, que son comunes a todos los estudiantes del nivel medio superior, se encuentran los camilitos que se quieren formar como futuros oficiales de las FAR, un hombre con una personalidad fuerte, con convicciones acorde con los principios de la Revolución, que sienta amor por su profesión y por su patria, con una cultura general integral como lo exigen los momentos actuales.

¿Qué condiciones y características deben tener los alumnos que ingresan a las EMCC?

Se debe partir de su estado de salud, es importante que sean alumnos saludables, aptos, sin severos problemas o trastornos creados por alguna que otra enfermedad, que les impida adaptarse a las exigencias del centro. No pueden tener problemas en visión, audición ni en la expresión oral. Tener una preparación física fuerte, capaces de soportar y someterse a cualquier tipo de ejercicio por más complicado y riguroso que sea, esta es la base para salir airoso en las clases de preparación militar y física respectivamente. Para lograr esto y seleccionar con calidad al alumno nuestro, se someten a una prueba de eficiencia física rigurosa que define la entrada a la escuela.

Como otra exigencia que deben cumplir está, la preparación para enfrentarse a los programas de estudio en las diferentes asignaturas, por lo que tienen que estar aptos mentalmente con una capacidad intelectual alta o promedio que les permita obtener resultados satisfactorios en las clases. Tienen que realizar exámenes de ingreso en las asignaturas de Matemática, Español e Historia y resultar aprobado.

Deben tener una preparación cultural y política acorde con los principios y en el momento actual. Otras características están dadas en la disposición incondicional de cumplir con las actividades de formación vocacional que se desarrollan en las escuelas como: la realización de sociedades científicas, participación en concursos de conocimientos, visitas y trabajo en las secundarias básicas como apoyo a la captación de nuevos estudiantes, recogida de café, asistir a actos políticos y paradas militares, guardias en cualquier lugar asignado en la escuela, etc.

Como se puede observar los egresados tienen que ser alumnos integrales, dispuestos a cumplir con cualquier tarea que se le asigne, manteniendo una buena disciplina militar. La selección es heterogénea, pues ingresan al centro preferentemente los hijos de obreros, campesinos, oficiales de las FAR y el MININT, intelectuales y en menor escala hijos de dirigentes.

Es un PRE militar con una formación vocacional exigente hacia la vida militar, solo si se cumplieran con todas estas exigencias se estará ingresando a los estudiantes que verdaderamente necesitan las EMCC.

CAPÍTULO 2. PROPUESTA DE TAREAS PARA EL TRABAJO CON EL PROGRAMA DE GEOMETRÍA DINÁMICA CABRI GEOMETRE II EN LA UNIDAD # 2: FUNCIONES, DEL ONCENO GRADO DE LA EMCCH.

En este capítulo se aborda la situación del aprendizaje del concepto de función y se realiza una propuesta de tareas docentes dirigidas a la fijación del contenido, donde el estudiante durante la clase en el laboratorio, en la biblioteca o en tiempo de máquina puede hacer uso del mismo, permitiendo esto que la enseñanza sea más efectiva y por tanto incida positivamente en su aprendizaje. Por último, se corrobora la efectividad de la aplicación de las tareas docentes.

2.1. Situación actual del aprendizaje

Para profundizar en el problema, se observaron 6 clases a profesores de onceno grado (anexo 1), se aplicó un diagnóstico inicial (anexo 2) a estudiantes de onceno grado y una encuesta a profesores (anexo 3) de la escuela entre cinco y treinta años de experiencias.

Análisis del diagnóstico inicial aplicado.

El instrumento aplicado a los estudiantes incluye tres preguntas, la primera tiende a evaluar si los estudiantes son capaces de reproducir verbalmente la definición del concepto función. La segunda pregunta del cuestionario, pretende averiguar si los mismos identifican una función a través de su gráfico y la tercera está encaminada a identificar el tipo de función a partir de su ecuación, representar la función y determinar algunas de sus propiedades.

Se aplicó el diagnóstico a 30 estudiantes con los siguientes resultados:

Respecto a la pregunta 1.

- De los estudiantes evaluados solo 5 lograron responder de manera correcta la pregunta lo que representa un 16,6 %.

Respecto a la pregunta 2.

- El 46, 6 % reconoce una función a través de su gráfico, es decir, 14 estudiantes respondieron correctamente la pregunta.

Respecto a la pregunta 3.

- El 76, 6 % identifica el tipo de función (23 estudiantes).
- El 66, 6 % realiza correctamente la construcción de su gráfico (20 estudiantes).
- El 66, 6 % determina correctamente el conjunto imagen (20 estudiantes).
- El 50 % analiza correctamente los signos de la función así como la monotonía (15 estudiantes).
- El 60 % comprueba de forma correcta la pertenencia del punto a la función (18 estudiantes).

Si se observa la tabla 3 (Anexo 2) se aprecia que la prueba diagnóstico la aprobaron solo 14 estudiantes y de ellos hubo nueve alumnos que tuvieron calidad en sus respuestas (85 o más puntos). Además, la media del grupo fue aproximadamente de 58 puntos y se puede observar que los datos estuvieron dispersos con respecto a la media, pues la desviación estándar fue de 27, 36 puntos (tabla 2), de aquí que si se analiza la mediana se puede observar que estuvo en 46, 5 puntos (tabla 2), lo que significa que la mitad del grupo estuvo por debajo de esta puntuación y además 16 estudiantes obtuvieron por debajo de 60 puntos lo que representa aproximadamente un 66, 68 % de desaprobados (tabla 1). Todo esto corrobora que existen dificultades en el aprendizaje del trabajo con funciones.

Principales dificultades detectadas en el aprendizaje de las funciones.

De acuerdo a los resultados del diagnóstico aplicado a los estudiantes, a la revisión realizada a preguntas escritas, trabajos de control y pruebas finales, se puede concluir que los principales problemas que manifiestan los escolares en cuanto al aprendizaje de las funciones son:

1. A pesar de repetir de memoria la definición no manifiestan dominio de las principales características del concepto.

2. No identifican el concepto de función a partir del gráfico.
3. No son capaces de realizar la construcción del gráfico de la función, así como de asociar estas al análisis u obtención de sus propiedades.

Análisis de la encuesta aplicada.

La encuesta (anexo 3) se aplicó a catorce profesores de experiencia que han trabajado en el grado. De forma general se conocen las fases de la estructura metodológica para la formación de conceptos, pero muchas veces no se utilizan a la hora de enseñar un concepto. En el caso del tratamiento al concepto función, se utiliza la vía deductiva que se sugiere en las transformaciones, o sea, dar el concepto y a partir de aquí reconocerlo en diferentes situaciones.

De los catorce profesores encuestados, tres consideran que sus alumnos reconocen mejor el concepto función en una ecuación, cuatro dicen que es en una correspondencia fuera del campo matemático y siete de ellos que es en una representación gráfica, lo cual está en correspondencia con el instrumento aplicado a los estudiantes. Diez de ellos consideran que sus estudiantes no son capaces de repetir verbalmente la definición de forma correcta, lo que corrobora lo demostrado por los estudiantes en el instrumento.

Las interrogantes 7, 8 y 9 tenían como propósito buscar la información que poseen los profesores de matemática sobre la elaboración de tareas docentes, la forma en que conciben las tareas en el desarrollo de las clases de matemática; el interés que manifiestan hacia el conocimiento de este tema y los criterios que poseen acerca de la preparación recibida para enfrentar un cambio en la concepción de la clase a través del empleo de tareas docentes utilizando los sistemas de aplicación, en particular el CABRI GEOMETRE II.

De estas últimas interrogantes, así como de una entrevista realizada a estos profesores para profundizar en el tema se obtuvieron los siguientes resultados:

1. No existe una concepción clara de lo que es una tarea docente, pues es dominante la idea de relacionarla, solamente, con las actividades que se orientan para ser realizadas durante el estudio individual.
2. Predomina la idea de no concebir tareas docentes dentro de una clase de nuevo contenido.
3. No existe variedad en los enfoques y tipos de tareas docentes, la mayoría de las tareas se conciben como ejercicios de aplicación, muy pocos las relacionan con problemas de la vida cotidiana.
4. En general reconocen no tener conocimientos sobre los sistemas de aplicación en la enseñanza de la matemática y en particular del CABRI GEOMETRE II y manifiestan el deseo de poder adquirirlos.

Análisis de las clases observadas.

Se observaron 6 clases, de onceno grado, previamente seleccionadas de acuerdo con las características del contenido. Esto permitió observar con mayor eficiencia posible los aspectos contenidos en la guía (anexo 1). Los aspectos observados se resumen en:

- Existe poca motivación para realizar las actividades en las clases, debido a la falta de una base orientadora que conlleve al estudiante a la búsqueda de los conceptos y las propiedades de las funciones.
- Los docentes proponen actividades en sus clases que están en correspondencia con las exigencias respecto al contenido de las funciones, no obstante no se propicia, en ocasiones, la participación activa del estudiante en la búsqueda del contenido referido a las funciones estudiadas, pues las actividades propuestas son formales.
- No se aprovechan, en las clases, las potencialidades de los asistentes matemáticos para el trabajo con las funciones, en particular el CABRI GEOMETRE II, que aparece en el software EUREKA.

Debido a los resultados obtenidos por los diferentes instrumentos utilizados en la investigación y por la importancia de la aplicación de las tareas docentes en el

proceso de enseñanza aprendizaje de las funciones en el onceno grado, se proponen a continuación varias tareas docentes que favorecerán a la consolidación de estos conocimientos.

2.2. Propuesta de tareas dirigidas a la Unidad # 2: Funciones, en la EMCCH

En el epígrafe se proponen un conjunto de tareas docentes con el uso del CABRI GEOMETRE II, para el desarrollo del proceso de enseñanza aprendizaje de las funciones en el onceno grado de la EMCCH, a partir del análisis teórico metodológico del concepto de función, así como de las características, rasgos y aspectos de las tareas docentes.

La introducción de tareas docentes para el trabajo de sistematización en el proceso de aprendizaje de la matemática favorece la asimilación gradual de los contenidos, ayuda a los estudiantes a lograr un alto nivel de rendimiento en las tareas propuestas en los exámenes ministeriales.

Las tareas que se proponen no constituyen un patrón fijo, pues pueden ser adaptadas y enriquecidas constantemente en dependencia de la función que sea objeto de estudio, de las características de los estudiantes y del nivel de preparación que se logre, proporcionándole al profesor una valiosa guía que le permite evaluar el cumplimiento de los objetivos propuestos.

En la elaboración de las tareas docentes que conforman la propuesta se tuvieron en cuenta:

- Objetivo.
- Conocimiento.
- Habilidad a desarrollar.
- Contenido de la tarea.
- Indicaciones metodológicas.

Se hacen estas consideraciones, ya que resulta un trabajo novedoso que no solo impactará en el estudiante, sino que requerirá de una adecuada autopreparación de los docentes antes de su utilización en clases, dada la dinámica y variedad de opciones que posee este sistema de aplicación.

La propuesta de tareas se ejemplifica, en la tesis, con el concepto de función cúbica, no obstante se hizo un trabajo similar con las demás funciones que se estudian en el oncenno grado de la EMCCH.

Para estudiar las propiedades fundamentales de las funciones a través de su representación gráfica, utilizando el CABRI GEOMETRE II, es necesario primeramente orientar a los estudiantes los pasos a seguir para realizar la construcción de funciones, en este caso la función cúbica:

Procedimiento para trazar la función cúbica:

- Dibujar un sistema de coordenadas en el boceto (oncenno grupo-mostrar ejes).
- Colocar un punto sobre el eje de las “x” y determinar sus coordenadas (segundo grupo-punto sobre objeto y noveno grupo-ecuaciones y coordenadas).
- Con la calculadora determinar la imagen del punto por la función cúbica (noveno grupo-calcular).
- Transferir la medida al eje “y” (quinto grupo-transferencia de medidas).
- Trazar rectas perpendiculares a los ejes coordenados por el punto del eje “x” y por el punto del eje “y” (el punto que se obtuvo al transferir la medida, quinto grupo-recta perpendicular).
- Determinar del punto de intersección de las rectas perpendiculares (segundo grupo-puntos de intersección).
- Trazar el lugar geométrico que describe el punto al moverse el punto inicial en el eje “x” (quinto grupo-lugar geométrico).

Tarea 1:

Objetivo: Enunciar las propiedades de la función cúbica a partir de la construcción de su gráfico, haciendo uso del programa de Geometría Dinámica CABRI GEOMETRE II, lo cual contribuirá a desarrollar la imaginación y el pensamiento lógico de los estudiantes.

Conocimiento: Funciones. Dominio e imagen. Ceros. Valor máximo y mínimo.

Habilidades: Construir gráfico, determinar el dominio e imagen de la función, el cero de la función y los valores máximos y mínimos.

Contenido de la tarea:

1. Grafica la función $y = x^3$.
2. Activa la traza del punto que recorre el eje "x" y del punto que recorre el eje "y".
3. Colorea con rojo el punto del eje "x" y con azul el punto del eje "y".
4. Mueve el punto del eje "x". ¿Qué observas en los ejes de coordenadas a medida que mueves el punto?
5. ¿En cuántos puntos corta la gráfica al eje "x"?
6. ¿Qué nombre recibe este punto de intersección?
7. ¿Cómo determinarías analíticamente las coordenadas de este punto de intersección?
8. ¿Cuál es el mayor (menor) valor que toma la gráfica sobre el eje "y"?

Indicaciones metodológicas.

Con esta tarea el alumno puede observar que las proyecciones de la gráfica de la curva sobre los ejes de las abscisas y de las ordenadas es precisamente todo el eje. Esto da la posibilidad al estudiante de llegar a la conclusión de que el **dominio** y la **imagen** de la función son los todos **números reales**.

Además, al observar el gráfico de la función se percatará que la curva corta al eje de las abscisas en $x = 0$, siendo este el **cero** de la función y que para calcularlo bastaría con igualar la función a cero y resolver la ecuación obtenida, dando así un procedimiento para su determinación. Aquí se le puede preguntar que definan

el cero de una función, es decir, no es más que el punto del dominio que tiene imagen cero.

También, debe quedar claro al estudiante que esta función no alcanza **ni máximo ni mínimo**, lo que se puede observar en la gráfica de la función.

La tarea se puede transformar al limitar el dominio a un intervalo y hacer un trabajo similar, sobre todo a la determinación del dominio y la imagen de la nueva función y el análisis del valor máximo y del valor mínimo.

Además, la tarea permite, en función del diagnóstico del estudiante, eliminar algunos de los incisos previstos, por ejemplo, si el alumno domina el concepto de cero, los pasos 5 y 6 pueden sustituirse por las preguntas ¿cuál es el cero de la función y por qué?, esto permite que el propio alumno determine analíticamente el cero, lo que está explícito en el paso 7, de esta forma se está trabajando con la ZDP del mismo.

Tarea 2:

Objetivo: Definir la paridad de la función cúbica a partir de la construcción de su gráfico, haciendo uso del programa de Geometría Dinámica CABRI GEOMETRE II, lo cual contribuirá a desarrollar la imaginación y el pensamiento lógico de los estudiantes.

Conocimiento: Funciones. Simetría de la función. Paridad.

Habilidad: Identificar el concepto de simetría y definir que es impar.

Contenido de la tarea:

1. A la función anterior aplícale una rotación con centro en el origen de coordenadas y un ángulo de rotación de 180° .
2. ¿Qué observas?
3. ¿A qué conclusión puedes arribar?
4. ¿Cuándo una función es impar, gráfica y analíticamente?

Indicaciones metodológicas.

Para analizar la **simetría** es necesario orientar, en primer lugar, cómo realizar una rotación con centro en el origen de coordenada:

Procedimiento para realizar una rotación con centro en el origen de coordenadas.

- Con edición numérica, especificar con qué ángulo se realizará la rotación (décimo grupo-edición numérica).
- Ir a la opción rotación y marcar un punto sobre la curva y sobre el origen de coordenadas (sexto grupo-rotación).

El estudiante podrá observar que el gráfico imagen coincide con el gráfico original. Lo que le permitirá concluir que la función es **simétrica** respecto al origen de coordenadas. Y de aquí se deduce gráficamente la propiedad de que la función es **impar**.

Analíticamente, debe afirmar que una función es impar cuando al calcular las imágenes para un valor del dominio y su opuesto estas son opuestas también.

La tarea permitirá sistematizar los conocimientos del estudiante sobre los movimientos del plano. Aquí es posible preguntarle si existe otro movimiento del plano que hace el mismo efecto en el gráfico de la función. En este caso se debe precisar, con el alumno, que la simetría central hace el mismo efecto y se puede realizar con la opción de simetría central. Para ello solo basta con marcar el centro de rotación y el punto que se le va a determinar la imagen.

Además, para la determinación analítica de la paridad se hace necesario, si el alumno lo requiere, explicarle que analicen qué sucede cuando se sustituye en la ecuación de la función x por $-x$, para ello, se debe tener presente el diagnóstico lo que permitirá trabajar en la ZDP de cada estudiante.

Tarea 3:

Objetivo: Identificar la monotonía de la función cúbica a partir de la construcción de su gráfico, haciendo uso del programa de Geometría Dinámica CABRI GEOMETRE II, lo cual contribuirá a desarrollar la imaginación y el pensamiento lógico de los estudiantes.

Conocimiento: Funciones. Monotonía de la función.

Habilidad: Identificar concepto de función monótona y concluir que es monótona creciente.

Contenido de la tarea:

1. Determina las coordenadas de los puntos que se mueven en los ejes de las abscisas y de las ordenadas.
2. Mueve el punto del eje de las abscisas de manera que los valores de la x aumenten. ¿Qué sucede con los valores de las y ?
3. ¿A qué conclusión puedes arribar?
4. ¿Cuándo una función es monótona creciente?

Indicaciones metodológicas.

Con esta tarea el estudiante se va a percatar que en la medida que se mueve el punto sobre el gráfico de la función el valor de la abscisa y de la ordenada varían, es decir, aumentan o disminuyen lo que permitirá recordar o llegar al concepto de monotonía de la función.

Este concepto se puede elaborar conjuntamente con los estudiantes, pero también cada alumno de manera individual lo puede elaborar y luego llegar de manera colectiva a la definición de este concepto, es decir, la tarea también permite hacer un trabajo colectivo sobre el concepto de monotonía.

De esta forma el estudiante puede concluir que la función es **monótona creciente** en todo su dominio y afirmar que esto se cumple siempre que:

$$\text{Si } x_1 < x_2, \text{ entonces } f(x_1) < f(x_2) \text{ o Si } x_1 > x_2, \text{ entonces } f(x_1) > f(x_2)$$

Tarea 4:

Objetivo: Identificar la propiedad inyectiva de una función a partir de la construcción del gráfico de la función cúbica, haciendo uso del programa de Geometría Dinámica CABRI GEOMETRE II, lo cual contribuirá a desarrollar la imaginación y el pensamiento lógico de los estudiantes.

Conocimiento: Funciones. Inyectividad.

Habilidad: Identificar concepto de función inyectividad, así como concluir que es inyectiva.

Contenido de la tarea:

1. Trace varias rectas paralelas al eje de las abscisas.
2. ¿En cuántos puntos corta cada recta a la gráfica de la función?
3. ¿A qué conclusiones puedes llegar?
4. Analíticamente, ¿cuándo una función es inyectiva?

Indicaciones metodológicas.

De esta manera como cada recta corta a la función en un solo punto puede concluir que es **inyectiva** y que no sería inyectiva si la cortara en más de un punto. Además destacar que una función es inyectiva si cumple que:

Si $x_1 \neq x_2$, entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$, (para valores diferentes del dominio, imágenes diferentes).

Esta tarea se puede realizar con solo el trazado de una recta paralela al eje “x” por un punto de la curva y luego al mover el punto de la curva se percatará que la recta solo la corta en un punto. A partir de aquí, el estudiante puede llegar a la conclusión de la inyectividad de la función, pues si tiene determinado las coordenadas del punto de la curva se percatará que:

Si $x_1 \neq x_2$, entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$ o Si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$

Como se puede observar, de esta forma se está trabajando con aspectos de la lógica, con el contrarrecíproco, aspecto este de gran importancia en el aprendizaje

de la matemática y que permite el desarrollo del pensamiento lógico de los estudiantes.

Por otro lado, la tarea dará pie a la determinación de la inversa de la función.

Tarea 5:

Objetivo: Identificar el comportamiento de la función alrededor del cero de la misma, a partir de la construcción del gráfico, haciendo uso del programa de Geometría Dinámica CABRI GEOMETRE II, lo cual contribuirá a desarrollar la imaginación y el pensamiento lógico de los estudiantes.

Conocimiento: Funciones. Signos.

Habilidad: Identificar el comportamiento de los signos de la función alrededor de su cero.

Contenido de la tarea:

1. Coloca un punto en el eje “x” y determina sus coordenadas.
2. Mueve el punto del eje de las abscisas de manera que los valores de la “x” sean mayores que el cero de la función. ¿Qué signo toman los valores de las “y”?
3. Realiza esta misma operación pero para los valores menores que el cero de la función.
4. ¿A qué conclusiones puedes llegar?

Indicaciones metodológicas.

El estudiante debe destacar que cuando los valores de “x” son mayores (o están a la derecha) que el cero de la función, los valores de “y” son **positivos**, y por el contrario si son menores, entonces los valores de “y” son **negativos** (o están a la izquierda).

También, pueden deducir que en el intervalo donde la función tiene el gráfico por encima del eje “x” es **positiva** y si está por debajo entonces es **negativa**.

Debe quedar bien claro que cuando una función no tiene ceros, entonces para realizar el comportamiento de los signos se tomarán los valores del dominio de definición.

Las tareas analizadas hasta ahora estuvieron dirigidas a la determinación de propiedades globales de las funciones, a continuación se proponen tareas donde se valorará otro aspecto importante en el estudio de las funciones, el efectos de los parámetros **a**, **b** y **c** sobre el gráfico de la función y en sus propiedades, es decir, en el caso particular de la función $f(x) = x^3$ se hará el análisis de la función de la forma:

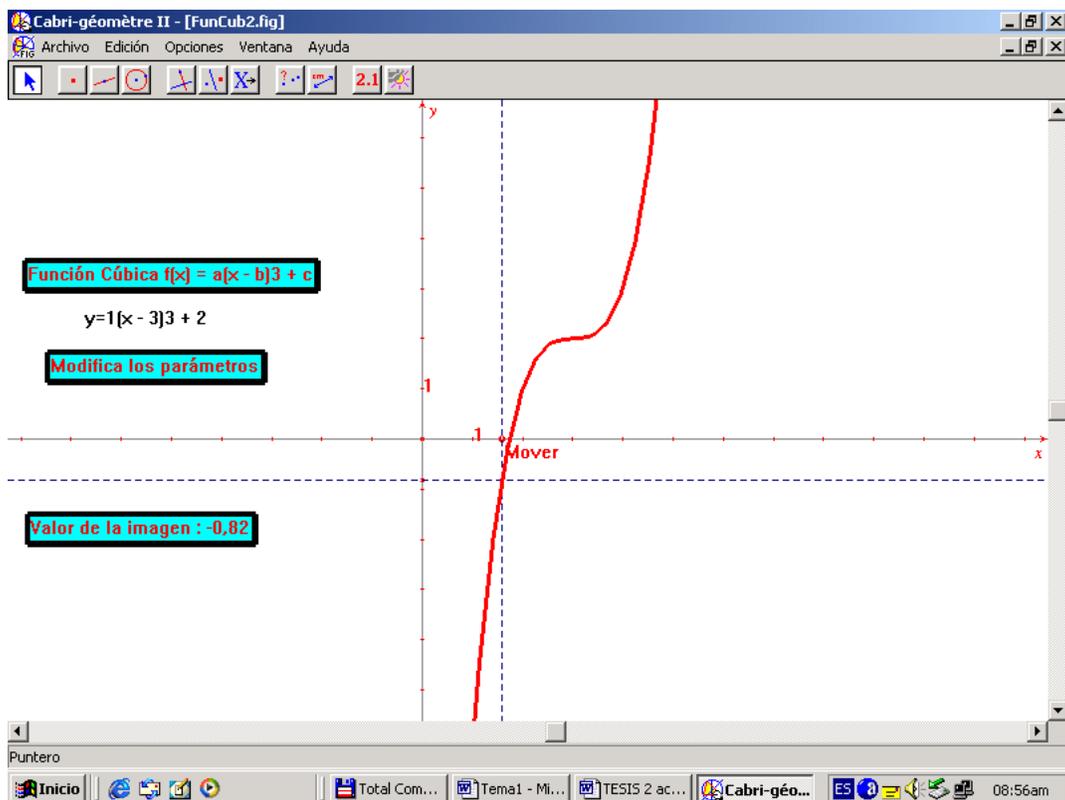
$$f(x) = a(x - b)^3 + c \quad (a \neq 0)$$

El estudio se hará por etapas a partir del gráfico de la función $y = x^3$ y con el uso de varias tareas docentes. Estas permitirán al estudiante variar los parámetros **a**, **b** y **c** en la ecuación de la función y podrá observar cómo varía la gráfica de la función $y = x^3$, lo que le permitirá obtener las propiedades de las diferentes funciones que se obtienen.

Estas tareas tienen como objetivo el siguiente:

Objetivo: Determinar la variación que ocurre en la función a partir de los valores de los parámetros **a**, **b** y **c** en la ecuación de la función, haciendo uso del programa de Geometría Dinámica CABRI GEOMETRE II, lo cual contribuirá a desarrollar la imaginación y el pensamiento lógico de los estudiantes.

A continuación se brinda al estudiante la gráfica de la función cúbica para que responda las tareas docentes de la 6 a la10.



Tarea 6:

Conocimiento: Funciones. Traslación en el eje “x”.

Habilidad: Relacionar gráficos y propiedades al variar los parámetros.

Contenido de la tarea:

- Asigna los siguientes valores a los parámetros a , b y c , $a = 1$, $b = -2$ y $c = 0$.
- Observa qué sucede con el gráfico de la función $y = x^3$.
- ¿Quién es el nuevo cero de la función?
- Determina las propiedades de la función que obtuviste.

Indicaciones metodológicas.

Aquí se debe destacar que cuando b toma el valor de -2 el gráfico de la función $y = x^3$ se traslada dos unidades en sentido negativo del eje de las “x” y que si b tomara valores positivos, entonces se desplazaría tantas unidades en sentido positivo en el mismo eje.

A partir del gráfico el estudiante puede reconocer las siguientes propiedades de la función $y = (x + 2)^3$.

Propiedades.

Dominio: $x \in \mathbb{R}$

Imagen: $y \in \mathbb{R}$

Cero: $x = -2$

Máximo o mínimo: no alcanza máximo ni mínimo.

Simetría: es simétrica respecto al punto $(-2; 0)$, por lo tanto no es par ni impar.

Monotonía: monótona creciente.

Es una función inyectiva.

Signo: para $x < -2$ negativa
para $x > -2$ positiva

Es importante que el alumno le de varios valores al parámetro **b** para poder llegar a las propiedades descritas anteriormente.

Tarea 7:

Conocimiento: Funciones. Contracción y dilatación en el eje "x".

Habilidad: Relacionar gráficos y propiedades al variar los parámetros.

Contenido de la tarea:

- a) Asigna los siguientes valores a los parámetros, $a = 1/2$, $b = 0$ y $c = 0$.
- b) Observa qué sucede con el gráfico de la función $y = 1/2x^3$
- c) Determine las propiedades de la función que obtuvo.

Indicaciones metodológicas.

En esta actividad se le asignan diferentes valores de **a**, para que el estudiante observe cuando se contrae o se dilata una función incluyendo valores entre cero y uno.

A partir del gráfico el estudiante puede reconocer las siguientes propiedades de la función $y = 1/2 x^3$, y concluir que:

Propiedades.

Dominio: $x \in \mathbb{R}$

Imagen: $y \in \mathbb{R}$

Cero: $x = 0$

Máximo o mínimo: no alcanza máximo ni mínimo.

Simetría: es simétrica respecto al origen de coordenada por lo tanto es impar.

Monotonía: monótona creciente.

Es una función inyectiva.

Signo: para $x < 0$ negativa
para $x > 0$ positiva

Puede concluir además que su gráfico se obtiene por una contracción de razón $1/2$ a partir del gráfico de $y = x^3$

Es importante que el alumno le de varios valores al parámetro **a** para poder llegar a las propiedades descritas anteriormente.

Tarea 8:

Conocimiento: Funciones. Reflexión en el eje "x".

Habilidad: Relacionar gráficos y propiedades al variar los parámetros.

Contenido de la tarea:

- a) Asigna los siguientes valores a los parámetros, $a = -1$, $b = 0$ y $c = 0$.
- b) Observa qué sucede con el gráfico de la función $y = -x^3$.
- c) Determine las propiedades de la función que obtuvo.

Indicaciones metodológicas.

A partir del gráfico el estudiante puede reconocer las siguientes propiedades de la función $y = -x^3$.

Propiedades.

Dominio: $x \in \mathbb{R}$

Imagen: $y \in \mathbb{R}$

Cero: $x = 0$

Máximo o mínimo: no alcanza máximo ni mínimo.

Simetría: es simétrica respecto al origen de coordenada luego es impar.

Monotonía: monótona decreciente.

Es una función inyectiva.

Signo: para $x < 0$ positiva
para $x > 0$ negativa

Puede concluir que el gráfico se obtiene por una reflexión respecto al eje de abscisas, a partir del gráfico de $y = x^3$.

En este caso es posible variar la tarea y que determine la imagen de la gráfica por una simetría respecto al eje de las abscisas.

Tarea 9:

Conocimiento: Funciones. Traslación en el eje “y”.

Habilidad: Relacionar gráficos y propiedades al variar los parámetros.

Contenido de la tarea:

- a) Asigna los siguientes valores a los parámetros, $a = 1$, $b = 0$ y $c = 1$.
- b) Observa qué sucede con el gráfico de la función $y = x^3 + 1$.
- c) Determine las propiedades de la función que obtuvo.

Indicaciones metodológicas.

A partir del gráfico el estudiante puede reconocer las siguientes propiedades de la función $y = x^3 + 1$.

Propiedades.

Dominio: $x \in \mathbb{R}$

Imagen: $y \in \mathbb{R}$

Cero: $x = -1$

Máximo o mínimo: no alcanza máximo ni mínimo.

Simetría: es simétrica respecto al punto $(0; 1)$, luego no es par ni impar.

Monotonía: monótona creciente.

Es una función inyectiva.

Puede concluir que el gráfico se obtiene mediante una traslación de una unidad en el sentido del eje de ordenadas, a partir del gráfico de $y = x^3$, en esta actividad se le orienta al estudiante asignarle diferentes valores a c incluyendo los negativos para que observe la traslación en sentido negativo del eje de las "y".

En este caso es posible variar la tarea y plantearle que determine la imagen de la función $f(x) = x^3$ por una traslación dado el vector de traslación.

Tarea 10:

Conocimiento: Funciones. Traslación en ambos ejes.

Habilidad: Relacionar gráficos y propiedades al variar los parámetros.

Contenido de la tarea:

- Asigna los siguientes valores a los parámetros, $a = 2$, $b = 2$ y $c = 3$.
- Observa qué sucede con el gráfico de la función $y = 2(x+2)^3 + 3$.
- Determine las propiedades de la función que obtuvo.

Indicaciones metodológicas.

A partir del gráfico el estudiante puede reconocer las siguientes propiedades de la función $y = 2(x+2)^3 + 3$.

Propiedades.

Dominio: $x \in \mathbb{R}$

Imagen: $y \in \mathbb{R}$

Cero: $x = -3,14$

Máximo o mínimo: no alcanza máximo ni mínimo.

Simetría: es simétrica respecto al punto $(-2; 3)$, luego no es par ni impar.

Monotonía: monótona creciente.

Es una función inyectiva.

El estudiante puede concluir que el gráfico se obtiene mediante una contracción del gráfico de razón 2 y traslación de dos unidades en el eje de la abscisas y de tres unidades en el eje de las ordenadas, a partir del gráfico de $y = x^3$.

A manera de resumen, el alumno puede plantear que el efecto de cada parámetro en el gráfico de la función $f(x) = a(x - b)^3 + c$ respecto al gráfico $y = x^3$, es como sigue:

Parámetro a:

Dilatación o contracción: según sea $|a|$ mayor que 1 o $0 < a < 1$.

Reflexión: respecto al eje de abscisas si $a < 0$

Parámetro b:

Traslación en la dirección positiva del eje de abscisas si $b > 0$

Traslación en la dirección negativa del eje de abscisas si $b < 0$

Parámetro c:

Traslación en la dirección positiva del eje de ordenadas si $c > 0$

Traslación en la dirección negativa del eje de ordenadas si $c < 0$

Estas últimas tareas permitirán trabajar en la ZDP de los estudiantes, pues el profesor puede distribuirlas y transformarlas en función de los conocimientos que

posea cada alumno sobre el tema y sobre los conocimientos que posea del CABRI GEOMETRE II.

Se puede concluir que con el uso de estas tecnologías en la enseñanza de las funciones en el Preuniversitario y usando este tipo de actividades, donde el estudiante interactúa con el programa, se logran los objetivos propuestos de una forma más productiva, pues el propio estudiante va descubriendo las diferentes propiedades y va observando cómo varía el gráfico de la función en dependencia de la variación de los diferentes parámetros que intervienen en la ecuación de la función.

Para las demás funciones que son objeto de estudio en el Preuniversitario como la modular, raíz cuadrada, raíz cúbica, de proporcionalidad inversa, exponencial, logarítmica, entre otras, se realizó un trabajo similar al ejemplificado con la función cúbica, haciendo uso del programa de Geometría Dinámica CABRI GEOMETRE II adaptándola a sus características.

2.3. Valoración de la factibilidad y la pertinencia de las tareas docentes

En este epígrafe se presentan los resultados de la evaluación de las tareas docentes dirigidas a desarrollar los contenidos de funciones de la Unidad 2 del onceno grado con el uso del programa de Geometría Dinámica CABRI GEOMETRE II y su aplicación en la práctica educativa. Se expone el cuasi - experimento realizado con una muestra de estudiantes del pelotón 1 de la compañía 5 del onceno grado de la EMCCH.

El criterio de experto, es una alternativa que el investigador puede emplear para someter sus resultados investigativos al análisis de especialistas competentes y, de este modo, obtener juicios de valor sobre el aporte que propone. Se aplica el mismo para determinar si la propuesta de tareas docentes es viable en la Unidad 2 del onceno grado de la EMCCH.

Para dar cumplimiento a esta tarea se desarrollaron los siguientes pasos:

Se elaboró el contenido de la consulta (anexo 5) y se seleccionaron a 20 posibles expertos, para lo cual se tuvo en cuenta su coeficiente de competencia, siendo el coeficiente k de los mismos entre 0, 59 y 1 de los 20 se seleccionaron 15 de alta competencia. Además, se realizó una caracterización de aspectos profesionales de los mismos. Para el cálculo del coeficiente k (anexo 6) se aplicó la hoja de Excel, propuesta por Crespo y Aguilasocho (2004).

Se aplicó la consulta a los expertos seleccionados (anexo 7), para conocer el nivel de coincidencia para la relevancia de la propuesta elaborada. Luego de tabulados los resultados y utilizado la hoja de cálculo de Excel (anexo 8) propuesta por Crespo y Aguilasocho (2004) se obtuvieron los siguientes resultados:

- ✓ Los expertos consideran bastante adecuado el ajuste de las tareas a las exigencias del onceno grado.
- ✓ Es muy adecuado la explicitación de las tareas propuestas para su aplicación.

- ✓ La aplicación de las tareas en las clases de Matemática de la Unidad 2 del onceno grado la consideran bastante adecuada.
- ✓ Coinciden que la asequibilidad de las tareas es muy adecuado para su aplicación en las clases del onceno grado.
- ✓ La correspondencia de las tareas con el nivel de razonamiento de los estudiantes de onceno grado es bastante adecuado.
- ✓ Las tareas propuestas están bien graduadas para la Unidad 2 del onceno grado.
- ✓ Los expertos consideran que estas tareas pueden contribuir en gran medida a estimular la independencia cognoscitiva de los estudiantes.
- ✓ La propuesta es bastante adecuada para favorecer el desarrollo de las habilidades para el nivel de enseñanza.

La experimentación constituye una de las principales formas, si no la principal, para comprobar determinadas hipótesis científicas, en esta investigación se realizó un cuasi experimento para corroborar la efectividad de las tareas docentes propuestas.

Diseño del cuasi - experimento para la concreción de las tareas docentes.

1. Etapa preparatoria.

El cuasi experimento que se realizó tuvo como principal **objetivo**:

Determinar la influencia de las tareas docentes elaboradas, en el aprendizaje de las funciones por parte de los estudiantes mediante la utilización del programa de Geometría Dinámica CABRI GEOMETRE II.

Y como **hipótesis** para el experimento se formuló la siguiente:

Si se aplican las tareas docentes elaboradas, para desarrollar los contenidos sobre funciones, en un grupo del onceno grado de la EMCCH, con el uso del programa de Geometría Dinámica CABRI GEOMETRE II, entonces se obtendrán

resultados positivos en el aprendizaje de estos contenidos por parte de los estudiantes del grupo.

Selección de la muestra.

La muestra del cuasi - experimento está compuesta por 30 alumnos del pelotón 1 de la compañía 5, la cual se determinó de manera intencional. La selección del grupo estuvo dada porque el investigador trabajó de manera directa con el mismo.

Se determinó como **grupo experimental** los 30 estudiantes de la muestra y como **grupo control** los alumnos del pelotón 2 de la compañía 5.

Selección de las variables.

Como **variable independiente** se determinó:

Las tareas docentes para desarrollar los contenidos de funciones que se imparten en la Unidad 2 del onceno grado, con el uso del programa de Geometría Dinámica CABRI GEOMETRE II.

Como **variable dependiente**:

El aprendizaje de los contenidos sobre funciones, por parte de los estudiantes, que se imparten en la Unidad 2 del onceno grado.

Como **variables ajenas**:

La experiencia de los profesores.

Horario docente.

Motivación, por parte de los alumnos, por la asignatura.

Nivel de asimilación de los estudiantes.

2. Etapa de ejecución.

Para llevar a cabo el cuasi experimento se contó con las tareas docentes elaboradas, el laboratorio de computación de la escuela y el programa de Geometría Dinámica CABRI GEOMETRE II.

Luego de diseñar las tareas docentes y su enriquecimiento a través del criterio de expertos, el docente – investigador implicado directamente en la dirección del aprendizaje de la matemática de estos alumnos hizo posible que se planificaran las etapas para la implementación.

Se presentaron las tareas docentes elaboradas a los diferentes factores que intervienen en el proceso investigativo y docente: estructuras de dirección del centro y del departamento docente. Se aplicaron entrevistas, encuestas y se recogieron opiniones favorables tanto de las tareas docentes como de su aplicación.

Para el control de las variables se aplicó el control por distribución de frecuencias, cuyas características se adaptan a las condiciones del cuasi experimento aplicado y para ello se llevó un registro de las experiencias de cada actividad docente, control de los resultados individuales y grupales en cada clase y aplicación del diagnóstico de salida (prueba de control, anexo 9) que permitió valorar cómo se manifestó el proceso de asimilación de los conocimientos sobre funciones con el uso de las tareas utilizando el programa CABRI GEOMETRE II, a través de las propias actividades docentes y de estudio independiente.

Además, las variables ajenas fueron controladas pues, el profesor desarrolló los contenidos tanto en el grupo control como en el grupo experimental, el horario docente en que se desarrollaron las actividades, en ambos grupos, fue adecuado para este tipo de actividad. Ambos grupos están formados por estudiantes que su nivel de asimilación y motivación por las asignaturas es similar, es decir, existe homogeneidad en estos dos aspectos, lo que no influyó en los resultados del cuasi experimento.

3. Etapa de interpretación de los resultados y conclusiones.

Luego de aplicada la propuesta de tareas para la Unidad 2 del octavo grado, se aplicó una prueba de comprobación (anexo 9) con el objetivo de corroborar cómo fue la influencia de la propuesta de tareas en el aprendizaje del contenido de funciones que se impartió en esta Unidad.

Para corroborar estadísticamente los resultados luego de ejecutar las tareas se aplicó la Prueba de Hipótesis de Independencia Chi Cuadrado y para obtener los cálculos se utilizó el sistema de estadística Statgraphics Plus 5.1, cuyos resultados se muestran a continuación:

Frecuencia observada:

	Aprobados	Desaprobados	Total
Grupo Experimental	27	3	30
Grupo Control	18	12	30
Total	45	15	60

Las **hipótesis estadísticas** planteadas fueron:

H₀: Los resultados obtenidos en el aprendizaje no dependen de las tareas aplicadas.

H₁: Los resultados obtenidos en el aprendizaje dependen de las tareas aplicadas.

El **nivel de significación** escogido fue de un 0.05

El **estadístico** fue
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^k \frac{(f_{obs} - f_{esp})^2}{f_{esp}}$$

La **regla de decisión** para esta prueba fue:

Se rechaza H_0 si χ^2 calculado es mayor que el χ^2 tabulado.

Luego de aplicar dicha prueba los resultados dados por el Statgraphics Plus 5.1 fueron los siguientes:

Resumen del Statgraphics Plus 5.1

Contraste de Chi-cuadrado

Chi-cuadrado	GL	P-Valor
7.20	1	0.0171
5.69	1	0.0137 (con la corrección de Yates)

Contraste exacto de Fisher para tablas 2x2:

P-Valor a una cola = 0.00766581

P-Valor a dos colas = 0.0153316

El test Chi Cuadrado realiza un contraste de hipótesis para determinar si se rechaza o no la idea de que la fila y la columna seleccionadas son independientes. Dado que el p-valor es inferior a 0.05, se puede rechazar la hipótesis de que las filas y columnas son independientes con un nivel de confianza del 95%. En consecuencia, la fila observada para un caso particular tiene relación con su columna.

NOTA: se ha utilizado el p-valor con la corrección de Yates porque podría ser más preciso para una tabla 2x2. También, se ha realizado el test exacto de Fisher. Como en el test Chi Cuadrado, p-valores inferiores a 0.05 indican una relación significativa entre la fila y columna seleccionadas.

En el anexo 10 aparece la gráfica que muestran los resultados de la prueba de comprobación.

Conclusiones de la prueba de hipótesis.

Como se puede observar, además del resumen dado por el programa Statgraphics Plus 5.1, el Chi Cuadrado Calculado fue de $\chi^2 = 7.20$ y el Chi Cuadrado Tabulado es de $\chi^2 = 3.841$, por lo que se rechaza la hipótesis nula y por tanto se puede asegurar que con un 95 % de confianza los resultados obtenidos por el grupo dependen de las tareas aplicadas.

Los resultados de la aplicación en la práctica de las tareas elaboradas fueron satisfactorios, pues se logra un avance en el aprendizaje de los contenidos sobre el concepto de función por parte de los estudiantes y que se resumen:

- Dominio del concepto de función.
- Construir, a partir de la ecuación, el gráfico de la función correspondiente.
- Dado el gráfico o la ecuación de una función determinar las propiedades de la misma.
- Redescubrieron, con el uso del programa CABRI GEOMETRE II, las diferentes proposiciones que se estudiaron en la unidad objeto de estudio.
- Se logró que los estudiantes aplicaran las propiedades redescubiertas a la solución de ejercicios.

CONCLUSIONES

En el mundo actual la escuela no puede estar al margen de los avances tecnológicos, el uso de las calculadoras y computadores proveen al estudiante de herramientas para la interacción, que es quizás, una de las posibilidades más prometedoras del uso de la tecnología como apoyo educacional y la tendencia de los últimos años ha sido la de crear aplicaciones de propósito educativo que permitan esta interactividad y un ejemplo es precisamente el programa de Geometría Dinámica CABRI GEOMETRE II, el cual brinda este tipo de facilidad.

El tema que se investigó tiene su dificultad a la hora de ser tratado en el aula por vías tradicionales y no hay dudas que el uso de esta tecnología puede contribuir a mejorar los resultados del aprendizaje del mismo, aunque hay que tener presente la comunicación que debe existir entre el estudiante y el educador para lograr la construcción del concepto deseado.

Del estudio realizado se pudo constatar las dificultades que existen en el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto de función en el Preuniversitario y en particular en la EMCCH, lo que se corroboró a través de los diferentes instrumentos de investigación aplicados. Además, se pudo precisar como ha variado la forma de tratar este concepto a través de las últimas décadas tanto en Cuba como en otros países y cuáles han sido las tendencias para su tratamiento.

A partir de las deficiencias detectadas se propuso un conjunto de tareas docentes para el estudio de esta Unidad en el oncenno grado de la EMCCH, con el uso del programa de Geometría Dinámica CABRI GEOMETRE II y que se ejemplifica, en el trabajo, con la función cúbica. Estas tareas docentes tienen su fundamento psicológico en la teoría socio cultural de Vigotsky y en particular en la aplicación del concepto de ZDP.

Las tareas docentes propuestas pueden y deben ser enriquecidas por los profesores y estudiantes que la usen, teniendo en cuenta siempre el diagnóstico de cada grupo y de cada alumno en particular, pues el trabajo con la ZDP así lo exige.

La propuesta se aplicó a un grupo de la EMCCH con resultados satisfactorios, lo que se corroboró con el criterio de experto y la realización de un cuasi experimento, obteniéndose como resultado de la Prueba de Hipótesis Chi Cuadrado, la dependencia en el aprendizaje de los estudiantes del conjunto de tareas aplicadas, con un 95% de confianza.

RECOMENDACIONES

Continuar aplicando el programa de Geometría Dinámica CABRI GEOMETRE II en otros temas de la matemática escolar del Preuniversitario.

Proyectar cursos de superación a los profesores de matemática de la EMCCH, sobre el uso del programa de Geometría Dinámica CABRI GEOMETRE II.

BIBLIOGRAFÍA

- AGUILAR, A. (2001). Un Modelo Didáctico para el Estudio y Transformación de las Creencias Limitativas acerca de la Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática en la Formación de Profesores. Tesis de Maestría, ISP "José de la Luz y Caballero", Holguín.
- ADDINE, F. et al. (1997). Didáctica y Optimización del Proceso de Enseñanza Aprendizaje, (material de estudio para el curso homónimo de la Maestría en Educación). IPLAC, La Habana, Cuba.
- ÁLVAREZ DE ZAYAS, C. M. (1996). Hacia una Escuela de Excelencia. Editorial Academia, La Habana, Cuba.
- ÁLVAREZ DE ZAYAS, C. (1999). La educación en la vida. Editorial. Pueblo y Educación, La Habana.
- ÁLVAREZ, C. (1995). Metodología de la Investigación Científica. Centro de Estudios de Educación Superior "Manuel F. Gran", Universidad de Oriente, Santiago de Cuba.
- ANTUNES, R. (1998). Planificar un aula informatizada. Escuela Secundaria Raúl Proenza, Caldas da Rainha, Portugal, IV Congreso RIBIE, Brasilia.
- ARCE, C. (1991). "Ordenadores en el aula de Matemáticas." En: Ciencias Matemáticas, Vol.II, No.1. San José de Costa Rica; pp. 1-10.
- ARCE, C. (1994). "Gráficos por computadora: un valioso recurso para el aprendizaje de la matemática". En: Memorias de la VIII Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en Matemática Educativa, Universidad de San José de Costa Rica.
- ARREDONDO, A. (2008). Propuesta de tareas docentes para desarrollar los contenidos de geometría en el IV semestre de los CSIJ. Tesis en opción al título de Master en Didáctica de la Matemática, I.S.P. "José de la Luz y Caballero", Holguín, Cuba.
- AZINIAN, H. (1998). Capacitación docente para la aplicación de tecnologías de la información en el aula de geometría. Universidad de Buenos Aires, IV Congreso RIBIE, Brasilia.

- BALLESTER, S. et al. (1992). Metodología de la Enseñanza de la Matemática. Tomo I, Editorial Pueblo y Educación, Habana, Cuba.
- BALLESTER, S. et al. (1994). Metodología de la Enseñanza de la Matemática. Tomo II, Editorial Universitaria, México.
- BARNET, L. (1995). Aprendizaje Cooperativo y las Estrategias Sociales. En: Revista Aula de Innovación Educativa, No.36, Mayo, Barcelona, España.
- BARRON, A. (1993). Aprendizaje por Descubrimiento. En: Revista de Enseñanza de las Ciencias, No.1, Vol.11, España.
- CALA, E. L. (2002). El sistema de tareas como una alternativa metodológica dirigida a la formación y desarrollo del concepto función en los escolares del noveno grado de la secundaria básica. Tesis en opción al título de Master en Didáctica de la Matemática, I.S.P. "José de la Luz y Caballero", Holguín, Cuba.
- CAMPISTROUS, L. et al. (1990). Matemática 11no. grado, Editorial Pueblo y Educación, Habana, Cuba.
- COLOMA, O. (1998). Una alternativa didáctica para el aprendizaje de los contenidos relativos a funciones mediante computadoras. Tesis en opción al título de Máster en Didáctica de la Computación, I.S.P. "José de la Luz y Caballero", Holguín.
- CONCEPCIÓN, M. R. (1989). El Sistema de Tareas como medio para la formación y desarrollo de los conceptos relacionados con las disoluciones en la Enseñanza General Media. Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas, Holguín, Cuba.
- CONCEPCIÓN, M. R.; RODRÍGUEZ, F. (2005). Rol del profesor y sus estudiantes en el proceso de enseñanza aprendizaje. Ediciones Holguín (ISBN 959 – 221 – 192 – 2), Holguín.
- CRESPO, T; AGUILASOCHO, D. (2004). El empleo del Excel para el procesamiento de criterios de expertos utilizando el método Delphy. Artículo, Villa Clara.
- CRUZ, L. (1997): Sistema computarizado para la enseñanza y el aprendizaje de las secciones cónicas. Tesis en opción al título de máster en didáctica de la computación I .S P "José de la Luz y Caballero ", Holguín.

- CRUZ, L. et al. (1999): Sistema Computarizado para la Enseñanza-Aprendizaje de las Secciones Cónicas. En: Revista Educación pp. 14-21, No 97, mayo-agosto, Ciudad de la Habana.
- CHEUNG, K. (1998). Una Exploración en la Introducción de Informática en el Aula de Matemática de Escuelas de Macau. En: Actas del Congreso Internacional de Educación Matemática del Continente Asiático, Macau.
- DAVIDOV, V.; A. RADZIKOVSKY. (1984). La obra científica de L. S. Vygotsky y la Psicología moderna. En: Revista de Educación Superior Contemporánea, No.3. La Habana.
- DAVINSON, LUIS J. (1964). Guía para el Maestro. Enseñanza Secundaria Básica. Ministerio de Educación, Ciudad Libertad, Cuba.
- ESTRADA, M. et al. (2002). La Enseñanza de la Geometría Asistida por Computadoras en la Secundaria Básica Cubana. En: Revista Electrónica LUZ, No. 1, ISP "José de la Luz y Caballero", Holguín.
- FIGUEREDO, M. (2009). Propuesta de tareas docentes para desarrollar los contenidos de geometría en la Unidad 3 de octavo grado. Tesis en Opción al Título de Máster, UCP "José de la Luz y Caballero", Holguín.
- GARCÉS, W. (1997). El Sistema de Tareas como Modelo de Actuación Didáctica en la Formación Inicial del Profesor de Matemática. Tesis en opción al Título de Master en Didáctica de la Matemática, ISP José de la Luz y Caballero, Holguín, Cuba.
- GARCÉS, W. (2000). Una metodología para la elaboración de sistemas de tareas. Su influencia y concepción en la formación inicial del profesorado de Matemática Computación. Actas de COMPUMAT 2000, Universidad Pedagógica de Manzanillo, Cuba, Universidad de Cuenca del Plata, Argentina.
- GARCÉS, W. et al. (1999). El sistema de tareas como Modelo de Actuación Didáctica en la formación de profesores de Matemática Computación. Evento Internacional Pedagogía '99, La Habana, Cuba.
- GARCÉS, W. (2003). El Sistema de Tareas como modelo de actuación didáctica en la formación de profesores de matemática. Tesis Doctoral, ISPH, Holguín.
- GIL, D., GUZMAN, M. (1993). La Enseñanza de las Ciencias y la Matemática.

- Tendencias e Innovaciones. Editorial Popular S.A., Madrid.
- GÓMEZ, A. (2008). Curso Didáctica de las Ciencias Exactas. Módulo III. Educación Preuniversitaria, Material Base, Holguín.
- GONZÁLEZ, M. O. (1967). Álgebra Elemental Moderna. Vol. 1, Editora Pedagógica. Cuba.
- GONZÁLEZ, A. (s.f.). El método Delphi y el procesamiento estadístico de los datos obtenidos de la consulta a los expertos. Material de apoyo a la docencia, ISP "José de la Luz y Caballero". Holguín.
- GONZÁLEZ-MANET, E. (1995). "La nueva era de las tecnologías informativas". En: Revista Educación, Cuba.
- GRAVINA, M. A; SANTAROSA, L.M. (1998). A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados. IV Congreso RIBIE, Brasilia.
- GREEN. D. (1998). Las implicaciones de calculadoras con medios para la Manipulación Simbólica y la Geometría Dinámica. United Kingdom. En: Actas del Congreso Internacional de Educación Matemática del Continente Asiático.
- IZQUIERDO, N.; FERNÁNDEZ, C. (1997). El uso de computadoras y supercalculadoras en la enseñanza de la matemática. En: Tendencias Iberoamericanas en la Educación Matemática, ISP "Enrique José Varona", Facultad de Ciencias, Dpto. de Matemática-Computación, Ciudad de la Habana.
- LEONTIEV, A. N. (1982). Actividad, conciencia y personalidad. Editorial Pueblo y Educación, Ciudad de la Habana.
- LÓPEZ, E., (2000). Variante Curricular de la Didáctica de la Matemática en los ISP. Ponencia presentada en COMPUMAT-2000, Sociedad Cubana de Matemática y Computación, Manzanillo, Cuba.
- MAJMUTOV, M. I., (1983). La Enseñanza Problémica. Editorial Pueblo y Educación, La Habana, Cuba.
- MC FADDEN, MYRA (1969). Conjuntos, Relaciones y Funciones. Curso Programado de Matemática Moderna. Editorial Ciencia y Técnica, La Habana.
- MINED (Ministerio de Educación) Cuba (1999). Programa de Matemática para las Secundarias Básica Seleccionadas, Impresión Ligera, La Habana, Cuba.

- MINED (1970). Matemática. Separata uno. Noveno Grado. Editorial Pueblo y Educación, La Habana.
- MINED (1979 a). Matemática. Séptimo grado. Editorial Pueblo y Educación, Ciudad Habana.
- MINED (1979 b). Matemática. Octavo grado. Editorial Pueblo y Educación, Ciudad Habana.
- MINED (1979 c). Matemática. Noveno grado. Editorial Pueblo y Educación, Ciudad Habana.
- MINED (1979 d). Orientaciones Metodológicas séptimo grado. Editorial Pueblo y Educación, Ciudad Habana.
- MINED (1979 e). Orientaciones Metodológicas octavo grado. Editorial Pueblo y Educación, Ciudad Habana.
- MINED (1979 f). Orientaciones Metodológicas noveno grado. Editorial Pueblo y Educación, Ciudad Habana.
- MINED (1979 g). Programa séptimo grado. Editorial Pueblo y Educación, Ciudad Habana.
- MINED (1979 h). Programa octavo grado. Editorial Pueblo y Educación, Ciudad Habana.
- MINED (1979 i). Programa octavo grado. Editorial Pueblo y Educación, Ciudad Habana.
- MINED (1987). Indicaciones Metodológicas Complementarias para la Simplificación de los programas. Editorial Pueblo y Educación, Ciudad Habana.
- MINED (1992). Adecuaciones a los programas. Editorial Pueblo y Educación, Ciudad Habana.
- MINED (2005). Seminario Nacional para Educadores. Ciudad de la Habana.
- MUÑOZ, F. et al. (1989). Orientaciones Metodológicas Matemática 7mo. Grado. Editorial Pueblo y Educación, La Habana, Cuba.
- MUÑOZ, F. et al. (1990 a). Matemática 8vo. Grado. Editorial Pueblo y Educación, Habana, Cuba.
- MUÑOZ, F. et al. (1990 b). Orientaciones Metodológicas 8vo. Grado. Editorial Pueblo y Educación, La Habana, Cuba.

- NEGRÓN, C. et al. (2001). El Uso de los Medios de Computo como una Alternativa para la Enseñanza de la Matemática. Proyecto de Investigación, I.S.P. "José de la Luz y Caballero", Holguín.
- NEGRÓN, C. et al. (2002). El uso del ordenador en la solución de problemas matemáticos. En: CD Evento Internacional de Matemática Educativa e Informática, Universidad de Camaguey, Camaguey.
- NEGRÓN, C. et al. (2003). El uso del programa Cabri Geometre en la enseñanza del Análisis Matemático. En: CD Evento Internacional COMPUMAT, ISP, Santi Spíritus, Cuba.
- NEGRÓN, C; ESTRADA, M. (2000). Aprendiendo a descubrir la computadora. En Actas de Evento Internacional COMPUMAT, Universidad Cuenca de Plata, ISP "Blas Roca Calderio", Manzanillo, Cuba.
- NEYRA, M. (2009). Propuesta de tareas docentes para el trabajo interdisciplinario entre la Matemática y la Química. Tesis en opción al Título de Máster en Ciencias de la Educación, Sede Universitaria Pedagógica de Educación Media Superior Escuela Militar "Camilo Cienfuegos", Holguín, Cuba.
- PCC (Partido Comunista de Cuba) (1976). Tesis y Resoluciones Primer Congreso del Partido Comunista de Cuba. Editorial de Ciencias Sociales, La Habana, Cuba.
- PIDKASISTI, P. I. (1986). La actividad cognoscitiva independiente de los alumnos en la enseñanza. Editorial Pueblo y Educación, Ciudad de la Habana.
- PROENZA, J; DOMÍNGUEZ, D. (2001). Una Alternativa Didáctica para la Enseñanza de la Geometría con la Computadora. Trabajo de Curso, ISP "José de la Luz y Caballero", Holguín.
- Programa de Matemática (2006). Décimo Grado. EMCC, Holguín.
- Programa de Matemática (2006). Duodécimo Grado. EMCC, Holguín.
- Programa de Matemática (2006). Onceno Grado. EMCC, Holguín.
- RIBNIKOV.; K. (1987). Historia de las Matemáticas. Editorial, MIR, Moscú.
- RIOS, J. (1998). El uso de la tecnología en la clase de Matemática. Escuela de Matemática. Universidad Metropolitana, Caracas, IV Congreso RIBIE, Brasilia.

- RIZO, C. (1989). Sistema de Conocimientos, Hábitos y Habilidades. Su Comprobación. En: III Seminario Nacional del MINED, La Habana, Cuba.
- SANTALÓ, L. A. (1967). La Matemática moderna en la escuela primaria y la Secundaria Básica. MINED, Ciudad Habana.
- SHANG, R.; CHONG, T. (1998): La Valoración de la computadora Prueba al Nivel Terciario, Singapore. En: Actas del Congreso Internacional de Educación Matemática del Continente Asiático.
- SIDERICOUDES, O (1998): A formalização de conceitos da geometria analítica a través do micromundo Logo. Núcleo de Informática Aplicada à Educação – NIED. Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, São Paulo, IV Congresso RIBIE, Brasil.
- THANH, N. (1998): Un Ambiente Interactivo para la Resolución de Problemas de Geometría: la Concepción, Realización y Experimentación, Vietnam. En: Actas del Congreso Internacional de Educación Matemática del Continente Asiático.
- SILVESTRE, M. y ZILBERSTEIN, J. (2002). Hacia una didáctica desarrolladora. Editorial Pueblo y Educación, La Habana.
- VIGOTSKI, L. (1966). Pensamiento y Lenguaje. Ediciones Revolucionaras, La Habana.
- VIGOTSKI, L. (1979). El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. Grupo Editorial Grijaldo, Barcelona.
- VIGOTSKY, L. (1982). Pensamiento y Lenguaje. Editorial Pueblo y Educación, Ciudad Habana.
- VIGOTSKI, L. (1993). El Desarrollo de los conceptos científicos en la infancia. Fotocopia de aprendizaje, documento 7, Barcelona, España.

ANEXO 1

Guía de observación de clases

Objetivo: Evaluar cómo se manifiesta la asimilación de conocimientos sobre las funciones con los métodos tradicionales, así como la aplicación de tareas docentes y el uso de los sistemas de aplicación en función de elevar la calidad del aprendizaje de los estudiantes.

Sujetos de observación:

Docentes de onceno grado de la EMCCH.

Nombre del docente: _____.

Aspectos a controlar:

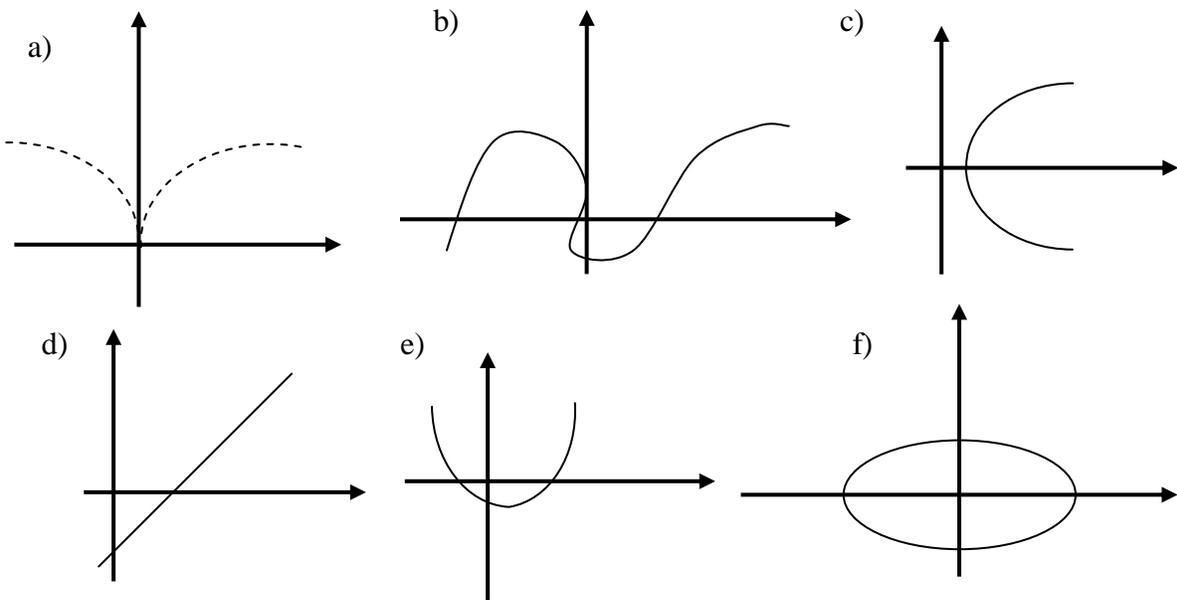
1. En la base orientadora de la actividad a realizar en la clase, se motiva o propicia la importancia del estudio de las funciones.
2. Analizar si las actividades planificadas por los docentes en los diferentes momentos de la clase responden a las exigencias del contenido.
3. Si las potencialidades que ofrecen los asistentes matemáticos se aprovechan para la consolidación de los conocimientos sobre funciones.

ANEXO 2

Diagnóstico Inicial sobre el tema de funciones

1- Un concepto muy importante que está presente en muchos órdenes de la vida es el concepto de función estudia por ti en la Secundaria Básica y en el décimo grado. Escriba la definición de este.

2- ¿Cuál de las siguientes representaciones gráficas constituye una función? Justifica cada caso.



3- Dada la función $f(x) = x^2 - 4x - 5$

- ¿Qué tipo de función representa?
- Representala gráficamente.
- Determina su imagen.
- Analiza sus signos y monotonía.
- Comprueba si el punto $P(-1; 0)$ pertenece a la función.

Tabla 1

Resultados de la prueba de diagnóstico aplicada

Notas	FA	FR	FAA	FRA	PM
0 – 24	4	0.1334	4	0.1334	12
24 – 48	12	0.4	16	0.5334	36
48 – 72	4	0.1334	20	0.6668	60
72 – 96	8	0.2666	28	0.9334	84
96 – 120	2	0.0666	30	1	108
Total	30	1			

Tabla 2

Resumen Estadístico para las Notas

Media	58,0333333
Mediana	46,5
Moda	45
Desviación estándar	27,3615428
Varianza de la muestra	748,654023
Curtosis	-1,44630984
Coefficiente de asimetría	0,19033516
Rango	81
Mínimo	18
Máximo	99
Cuenta	30

Tabla 3

Notas de los estudiantes

Notas
20
24
18
20
35
45
46
40
35
30
30
40
45
45
47
45
60
65
70
65
80
85
89
95
90
95
96
90
97
99

ANEXO 3

Encuesta a profesores del décimo y onceno grado

Compañero profesor, necesitamos su cooperación para responder estas preguntas correspondientes a una investigación que estamos realizando sobre la asimilación del contenido relacionado con funciones. Por favor, responda con la mayor sinceridad posible. No es necesario que escribas su nombre.

1. ¿Cómo consideras las sugerencias metodológicas que se proponen en los programas vigentes de Matemática para tratar el concepto de función?

Muy pobres_____ Pobres _____ Adecuadas_____ Buenas_____

2. ¿Cómo el alumno identifica mejor el concepto de función?

_____ En una ecuación.

_____ En una correspondencia establecida en la vida cotidiana.

_____ En una representación gráfica.

3. ¿Los estudiantes son capaces de repetir correctamente la definición aprendida?

Ninguno ____ Muy pocos _____ Pocos _____ La mayoría_____ Todos_____

4. ¿Cómo consideras la asimilación de este contenido en tus estudiantes?

_____ Buena

_____ Regular

_____ Mala

5. ¿Los estudiantes son capaces de identificar el gráfico de las funciones estudiadas y de ellas obtener sus propiedades?

Ninguno ____ Muy pocos _____ Pocos _____ La mayoría_____ Todos_____

6. ¿Los estudiantes son capaces de realizar el esbozo gráfico de las funciones estudiadas?

Ninguno ___ Muy pocos _____ Pocos _____ La mayoría_____ Todos_____

7. ¿Estimula usted la búsqueda del conocimiento, el desarrollo del intelecto y la formación de valores a través de la variedad de tareas docentes durante el desarrollo de la clase?

Nunca_____ A veces_____ Pocas veces_____ Casi siempre_____ Siempre_____

8. ¿Está usted preparado para introducir en la enseñanza de la Matemática los sistemas de aplicaciones en las clases sobre funciones?

No preparado___ Poco preparado___ Preparado___ Muy preparado

9. ¿Conoce usted las ventajas que ofrece el CABRI GEOMETREII para el trabajo con las funciones?

Ninguna ___ Muy pocas _____ Pocas _____ Las mayorías_____ Todas_____

ANEXO 4

Material de apoyo a la docencia para el uso del CABRI GEOMETRE II

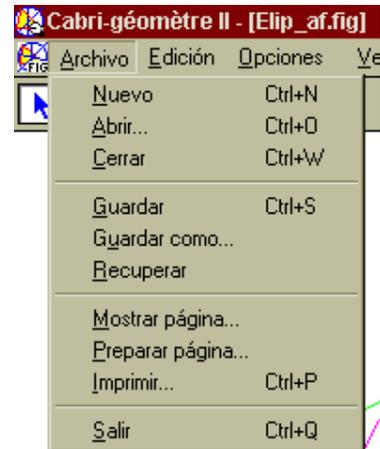
MENÚ PRINCIPAL.

A continuación se presenta la Pantalla Principal del software. La ventana posee una barra de menú como cualquier programa que trabaja bajo entorno de Windows:



El primer menú es el de **Archivo**:

- **Nuevo** (Ctrl. + N) se utiliza para un nuevo boceto.
- **Abrir** (Ctrl. + O): abrir un nuevo archivo.
- **Cerrar** (Ctrl. + W): cerrar un boceto.
- **Guardar** (Ctrl. + S): grabar un archivo abierto.
- **Guardar como...:** grabar por primera vez un archivo.
- **Recuperar:** recupera la forma original de la figura luego de haber hecho alguna transformación.
- **Mostrar página...:** muestra el boceto completo y da la posibilidad de mover el dibujo.
- **Preparar página...:** permite preparar la página para la impresión.
- **Imprimir...**(Ctrl. + P): permite imprimir el boceto.
- **Salir** (Ctrl. + O): salir del sistema.



Menú **Edición**:

- **Deshacer** (Ctrl. + Z): deshace cualquier acción que se ejecute en la pantalla del software.
- Para **Cortar**, **Copiar**, **Pegar** o **Borrar** cualquier figura o parte de ella.
- **Seleccionar todo** (Ctrl. + A): selecciona todo lo que está en el boceto.

- Para **Revisar** la construcción o **Regenerar** (Ctrl. + F) las figuras (dibujos).



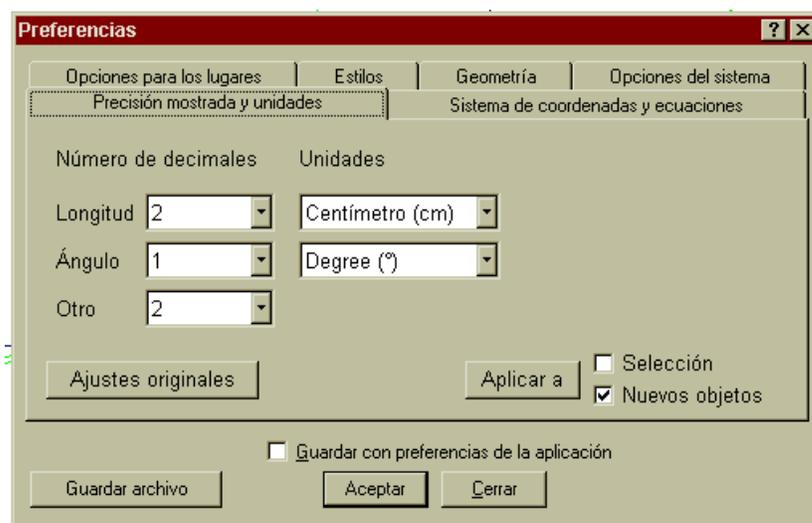
Menú Opciones:

- **Ocultar/Mostrar atributos:**

Muestra y oculta la barra de atributos, que aparece en la parte izquierda de la pantalla:

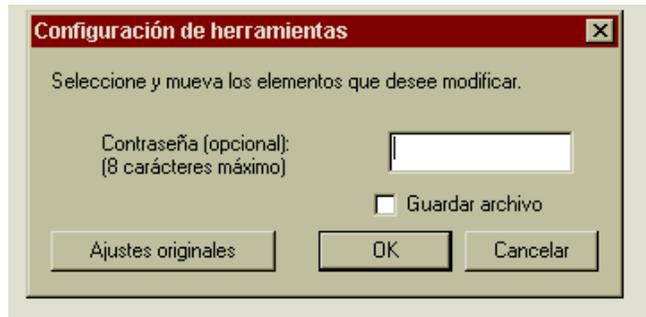


Preferencias...: da opciones para cambiar la apariencia de la pantalla.



- **Configuración de**

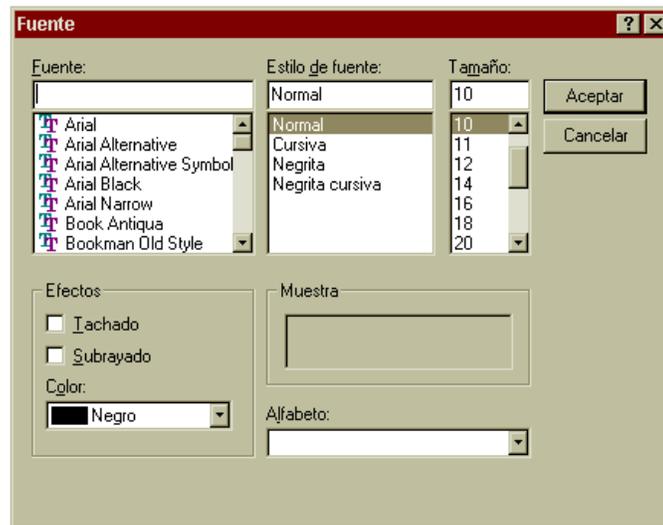
herramientas...: permite configurar las herramientas de trabajo. Opción importante para el trabajo con el sistema en los diferentes grados de la enseñanza, pues se pueden



escoger los elementos necesarios a trabajar en la clase o grado.

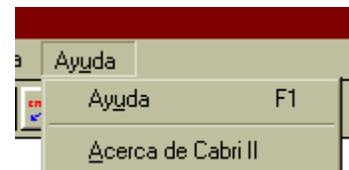
- **Idioma...:** Permite cambiar el idioma de trabajo.

- **Fuentes...:** Permite cambiar la fuente de trabajo.



Menú Ayuda:

- **Ayuda (F1):** Muestra una ayuda debajo del boceto de trabajo.
- **Acerca de Cabri II:** Informa, de manera breve, sobre el software y sus creadores.





1.2. HERRAMIENTAS.

En esta parte se mostrarán las herramientas del CABRI GEOMETRE II que se utilizarán específicamente en el estudio de las propiedades de las funciones, así como en la construcción de sus gráficos. Lo importante es ir descubriendo las potencialidades de estas a medida que avanza la complejidad de las construcciones. Es importante destacar que para poder acceder a estas herramientas hay que mantener el clic izquierdo del ratón fijo. El Cabri posee 11 grupos de herramientas (en cada grupo aparecerá solo las opciones que serán utilizadas en el estudio de las funciones).

1.2.1. Primer grupo ("Puntero"):

Puntero:

Sirve para:

1. Seleccionar objetos ya construidos.
2. Para cambiarlos de posición (siempre y cuando no se trate de objetos dependientes).



Un objeto seleccionado se puede cambiar de color, etc.

Para seleccionar objetos distintos de una sola vez hay que mantener pulsada la tecla SHIFT o con el puntero seleccionar una zona rectangular, además, esto permite copiarla y pegarla en otro archivo o bien en un programa de dibujo para incluir posteriormente la imagen geométrica en un texto.

1.2.2. Segundo grupo ("Puntos"):



Punto: Dibuja un punto.

Punto sobre objeto: Sirve para colocar un punto sobre un objeto.

Punto de intersección: Determina el punto de intersección de dos objetos marcados.

1.2.3. Tercer grupo ("Rectas"):

Recta: Dibuja una recta.

Segmento: Dibuja segmentos a partir de dos puntos.



1.2.4. Cuarto grupo ("Curvas"):

No se utilizará ninguna opción.

1.2.5. Quinto grupo ("Construir"):

Recta perpendicular: Dibuja una recta que pasa por un punto y es perpendicular a otra recta. Hay que marcar un punto y una recta (el orden no importa).

Recta paralela: Dibuja una recta que pasa por un punto y es paralela a otra recta. Hay



que marcar un punto y una recta (el orden no importa).

Transferencia de medidas: Si hemos obtenido la medida de un segmento, o bien un número con "edición numérica", o bien tenemos un número como resultado de un cálculo realizado con la "calculadora" de Cabri, se puede transferir esa medida (longitud) a:

- Una semirrecta; obtenemos un punto a la distancia indicada del origen de la semirrecta.
- A un punto para así dibujar la circunferencia de centro el punto y de radio la medida.
- A una circunferencia señalando la circunferencia, un punto de la misma para obtener un nuevo punto a la distancia indicada medida sobre la circunferencia en sentido antihorario.

Esta opción es de utilidad en el trazado de funciones como lugar geométrico, pues para el mismo se necesita transferir el valor de la imagen de un punto del eje x por la función que deseamos trazar, luego del cálculo realizado con la calculadora, lo que permitirá obtener gráficamente el punto que describirá la curva.

Lugar geométrico: Permite trazar un lugar geométrico. Para ello debes:

- a) Ubicar un punto sobre un objeto (segmento, recta, semirrecta, eje coordenado, circunferencia, etc.), que será el camino a recorrer.
- b) Construir el punto que va a describir el lugar geométrico ligado a este primer punto.
- c) Escoger la opción **lugar geométrico** en el menú (quinto grupo).
- d) Seleccionar el punto que describirá el lugar geométrico y el punto que se moverá.

1.2.6. Sexto grupo ("Transformar"):

Simetría axial: Permite obtener simetrías respecto a un eje.

Simetría: Permite obtener simetrías



respecto a un punto.

Rotación: Se utiliza para rotar objetos. Con la herramienta correspondiente se selecciona el objeto que se desee girar, el centro de rotación y el ángulo de rotación (este ángulo se puede escribir con "edición numérica").

1.2.7. Séptimo grupo ("macros"; macro = proceso automático):

No se utilizará esta opción.

1.2.8. Grupo octavo ("Comprobar propiedades"):

No se utilizará esta opción.

1.2.9. Grupo noveno ("Medir"):

Ecuación y coordenadas:

Muestra la ecuación de una recta, circunferencia o de una cónica obtenida con "cónica". También permite ver las coordenadas de un punto.



Calcular: Abre una calculadora que permite operar con números introducidos directamente, pero también con medidas de segmentos, ángulos, áreas, números escritos con "edición numérica". Dispone de las funciones más habituales. Al pulsar en el símbolo "=" se obtiene el resultado que se puede arrastrar manteniendo el ratón pulsado a cualquier lugar de la pantalla. (Ese resultado se



puede transferir o volver a utilizar para otras construcciones o cálculos).

1.2.10. Grupo décimo

("VER"):

Etiqueta: Sirve para denotar objetos (puntos, etc.). Por ejemplo para denotar los vértices de un triángulo.



Comentarios: Se utiliza para añadir texto, generalmente explicaciones. El tamaño de la ventana de texto se puede modificar con el ratón (actuando sobre el borde). Si se quisiera modificar el tamaño más tarde basta pulsar dos veces con la herramienta puntero y después modificar el tamaño. Para modificar las propiedades de la fuente, se selecciona el texto y se utiliza en la barra de menús: "Opciones/Fuente/.....".

Edición numérica: Sirve para añadir números. Posteriormente se puede modificar su valor pinchando con la herramienta puntero dos veces seguidas sobre el número.

Traza activada/desactivada: Al activar la traza de un punto u otro objeto, éste marca su rastro al ser movido. Para desactivar la traza se selecciona el objeto por segunda vez con la misma herramienta. Una traza se borra al modificar el tamaño de la ventana o al pinchar sobre las barras de desplazamiento vertical u horizontal. Esta opción es útil para el trazado de determinado lugar geométrico.

Animación: Hace que un punto u objeto se desplace independientemente del resto de la escena. Se pincha sobre el punto y se añade un muelle en la dirección contraria a la de la fuerza instantánea que queremos que actúe sobre el objeto. La longitud del muelle es proporcional a la de la fuerza. Para aumentar o disminuir la velocidad se utilizan las teclas "+" o "-". La animación se interrumpe pinchando en cualquier lugar.

1.2.11. Grupo undécimo ("Dibujo"):

Ocultar/Mostrar: Permite ocultar objetos.

Generalmente se utiliza para ocultar elementos que han servido para realizar la construcción y que, por ello, no pueden ser eliminados. La opción en de interés, pues en ocasiones existen

en el boceto muchos trazos lo que dificulta, en ocasiones, la visualización de la construcción y esta opción permite "eliminar" del boceto los trazos que no se quieran mostrar.



Color: Permite colorear un objeto

Rellenar: Permite rellenar un objeto con un color escogido.

Grosor: Permite cambiar el grosor del contorno de un objeto, tiene tres opciones.

Punteado: Se selecciona un modelo de punteado y después el objeto que queramos modificar.

Modificar apariencia: Permite modificar la apariencia de: puntos, marcas de ángulo, segmentos, ejes de coordenadas (cartesianos y polares) y comentarios.

Ocultar ejes/Mostrar ejes: Permite añadir unos ejes de coordenadas. Se pueden trasladar moviendo el origen, girar en conjunto girando el eje de abscisas, y el eje de ordenadas se puede girar independientemente. La escala se puede cambiar arrastrando la unidad y cambiándola de lugar. La herramienta "transferencia de medidas" se puede utilizar para transferir medidas a los ejes.

Nuevos ejes: Permiten añadir otros ejes de coordenadas.

Definir cuadrícula: Se selecciona el sistema de ejes coordenados y muestra la cuadrícula. Para volver a ocultarla basta seleccionar uno de sus puntos y pulsar "Supr".

Anexo 5

Encuesta para determinar el coeficiente de competencia de los posibles expertos

Nombre:

Compañero profesor, usted ha sido seleccionado como posible experto para emitir su opinión acerca de la viabilidad que tienen las tareas propuestas para el logro del aprendizaje de los contenidos de funciones en el onceno grado en la EMCCH.

Se necesita, como parte del método empírico de investigación “Criterio de Experto”, responda las siguientes preguntas de la forma más objetiva posible:

1. Marque con una “x” en la tabla siguiente, el valor que se corresponda con el grado de conocimiento que usted posee sobre el problema del insuficiente trabajo con la computadora en el tema de funciones que se realiza en el onceno grado en la EMCCH (considere la escala que se muestra de manera ascendente).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

2. Realice una autovaloración del grado de influencia que cada una de las fuentes que se presentan a continuación, han tenido en su conocimiento y criterio sobre la temática que se investiga.

Fuentes del conocimiento	Alta	Media	Baja
Conocimiento teórico que usted posea sobre la temática.			
Experiencia de trabajo.			
Trabajo de autores nacionales consultados.			
Trabajo de autores extranjeros consultados.			
Su propio conocimiento sobre el estado actual del problema.			
Dominio de la metodología de la enseñanza de la matemática.			

Tabla 1

Procesamiento de los expertos

EXPERTO #	G.C.I.	F1	F2	F3	F4	F5	F6
1	9	1	1	2	1	1	2
2	10	1	1	1	1	1	1
3	9	1	1	1	1	2	1
4	8	2	2	2	2	1	1
5	9	1	1	1	2	1	1
6	9	1	1	2	2	1	2
7	10	1	1	1	1	1	1
8	7	2	2	3	3	2	2
9	5	2	2	3	3	3	3
10	8	2	1	2	3	2	1
11	9	3	3	3	3	2	3
12	10	1	1	1	1	1	2
13	10	1	1	1	1	1	1
14	9	2	2	3	3	3	2
15	10	1	1	1	1	2	1
16	10	1	1	1	1	1	2
17	8	2	2	3	3	2	1
18	9	3	3	3	2	3	1
19	8	2	1	2	3	1	1
20	9	1	1	2	2	1	1

VALORES:

1 ALTO

2 MEDIO

3 BAJO

Anexo 6

Cálculo del coeficiente de competencia

EXPERTO	KC	KA	K	F1	F2	F3	F4	F5	F6
1	0,9	0,97	0,935	0,2	0,4	0,04	0,05	0,2	0,08
2	1	1	1	0,2	0,4	0,05	0,05	0,2	0,1
3	0,9	0,96	0,93	0,2	0,4	0,05	0,05	0,16	0,1
4	0,8	0,86	0,83	0,16	0,32	0,04	0,04	0,2	0,1
5	0,9	0,99	0,945	0,2	0,4	0,05	0,04	0,2	0,1
6	0,9	0,96	0,93	0,2	0,4	0,04	0,04	0,2	0,08
7	1	1	1	0,2	0,4	0,05	0,05	0,2	0,1
8	0,7	0,77	0,735	0,16	0,32	0,025	0,025	0,16	0,08
9	0,5	0,68	0,59	0,16	0,32	0,025	0,025	0,1	0,05
10	0,8	0,885	0,8425	0,16	0,4	0,04	0,025	0,16	0,1
11	0,9	0,56	0,73	0,1	0,2	0,025	0,025	0,16	0,05
12	1	0,98	0,99	0,2	0,4	0,05	0,05	0,2	0,08
13	1	1	1	0,2	0,4	0,05	0,05	0,2	0,1
14	0,9	0,71	0,805	0,16	0,32	0,025	0,025	0,1	0,08
15	1	0,96	0,98	0,2	0,4	0,05	0,05	0,16	0,1
15	1	0,98	0,99	0,2	0,4	0,05	0,05	0,2	0,08
15	0,8	0,79	0,795	0,16	0,32	0,025	0,025	0,16	0,1
18	0,9	0,565	0,7325	0,1	0,2	0,025	0,04	0,1	0,1
19	0,8	0,925	0,8625	0,16	0,4	0,04	0,025	0,2	0,1
20	0,9	0,98	0,94	0,2	0,4	0,04	0,04	0,2	0,1

CANTIDAD DE EXPERTOS CON COMPETENCIA ALTA	15
CANTIDAD DE EXPERTOS CON COMPETENCIA MEDIA	5
CANTIDAD DE EXPERTOS CON COMPETENCIA BAJA	0

Anexo 7

Encuesta a expertos:

Compañero profesor, usted ha sido seleccionado como experto para emitir su opinión acerca de la propuesta de tareas docentes para el desarrollo de los contenidos del concepto de función con el uso del CABRI GEOMETRE II en la asignatura de Matemática en la EMCCH en el onceno grado. Responda con la mayor sinceridad posible. No es necesario que escriba su nombre.

En la tabla que se presenta a continuación, marque con una “x” la evaluación que consideres tienen los aspectos que se señalan acerca de la propuesta que estudió, atendiendo a las siguientes categorías:

M.A: Muy Adecuado. B.A: Bastante Adecuado. A: Adecuado.

P.A: Poco Adecuado. I: Inadecuado

Nro.	Aspectos	M.A	B.A	A	P.A	I
1	Ajuste de las tareas a las exigencias del nivel.					
2	Explicitación de las tareas para su aplicación en el onceno grado.					
3	Aplicación de las tareas a las clases de Matemática del onceno grado.					
4	Asequibilidad de los enfoques de las tareas que se proponen para desarrollar el concepto de función.					
5	Correspondencia de las tareas con el nivel de razonamiento de los estudiantes del onceno grado.					
6	Graduación de las tareas propuestas.					
7	Estimulación de la independencia cognoscitiva de los alumnos.					
8	Uso de las tareas para la fijación del concepto de función en el onceno grado.					
9	Favorecen las tareas al desarrollo de las habilidades para el nivel de enseñanza.					

Resultados de la aplicación de la encuesta a expertos:

Categorías

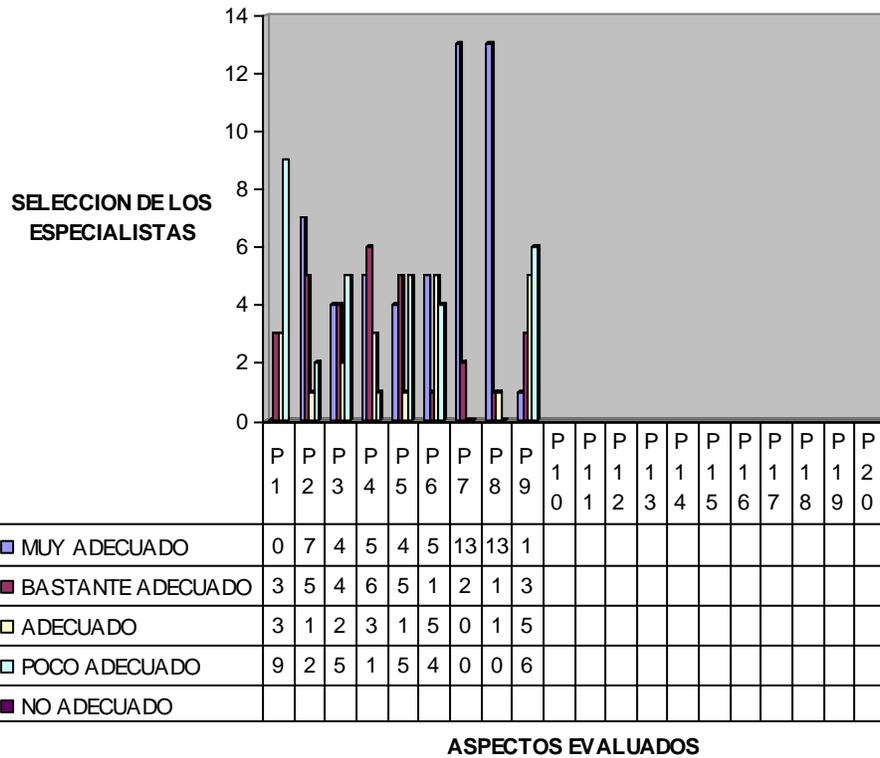
ASPECTOS	MUY ADECUADO	BASTANTE ADECUADO	ADECUADO	POCO ADECUADO	NO ADECUADO
1	0	3	3	9	0
2	7	5	1	2	0
3	4	4	2	5	0
4	5	6	3	1	0
5	4	5	1	5	0
6	5	1	5	4	0
7	13	2	0	0	0
8	13	1	1	0	0
9	1	3	5	6	0

Anexo 8

Procesamiento de la Información de los Expertos

ASPECTOS	MUY ADECUADO	BASTANTE ADECUADO	ADECUADO	POCO ADECUADO	NO ADECUADO
1		X			
2	X				
3		X			
4	X				
5		X			
6		X			
7	X				
8	X				
9		X			

VALORACIONES DE LAS TAREAS DOCENTES CON EL USO DEL CABRI GEOMETRE II



Anexo 9

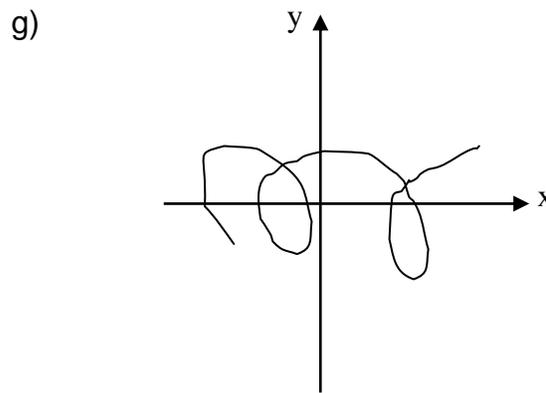
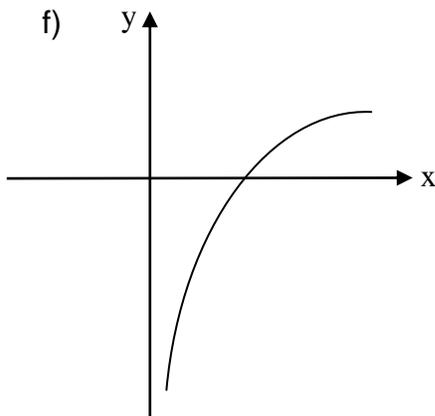
Prueba de Comprobación

1. Determina cuales de las siguientes correspondencias, conjuntos y gráficos corresponden a una función. Justifica cada caso.

$$\begin{array}{lll} \mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N} & \mathbb{R} \xrightarrow{h} \mathbb{R} & \mathbb{R}_+^* \xrightarrow{i} \mathbb{R} \\ \text{a) } X \longrightarrow X + 1 & \text{b) } X \longrightarrow X/2 & \text{c) } x \longrightarrow \sqrt{x} \end{array}$$

d) $f_2 = \{ (3;1), (4;0), (3;-1), (4;1), (2;5) \}$

e) $H = \{ (x; y) : y = 2x - 5; x \in \mathbb{R} \}$



2. Identifica los siguientes gráficos con las ecuaciones que se dan a continuación:

a) $y = x^2 - 1$

b) $y = \cos x$

c) $y = x^3$

d) $y = \sqrt{x-2}$

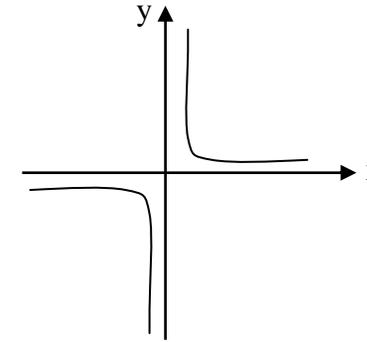
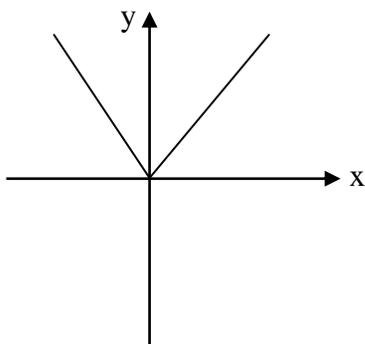
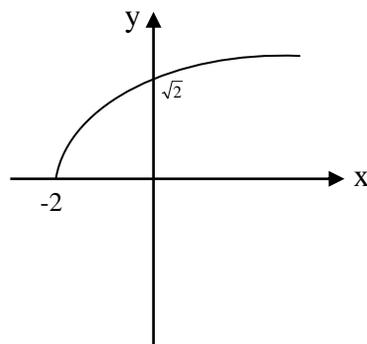
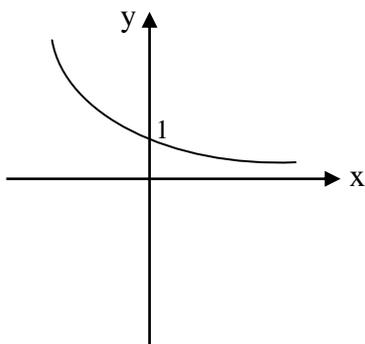
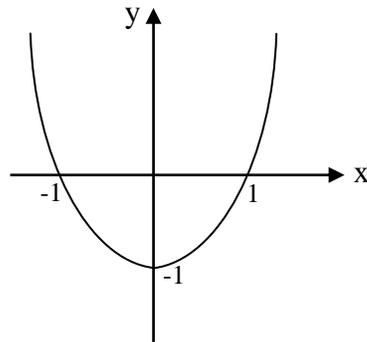
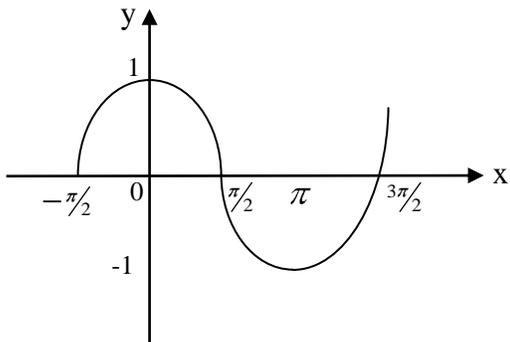
e) $y = \sqrt{x+2}$

f) $y = |x|$

g) $y = \log x$

h) $y = \text{sen } x$

i) $y = 2^x$



3. Dada la función $f(x) = x^3 + 2$, responde:

- ¿Por qué esta ecuación representa una función?
- Representéla gráficamente, usando el CABRI GEOMETRE II.
- Determine el cero de la función.
- Determina la imagen y la monotonía.
- Analice la paridad.

Anexo 10

Resultados de la Prueba de Comprobación

Gráfico de Mosaico

