UNIVERSIDAD DE HOLGUÍN "OSCAR LUCERO MOYA"
FACULTAD DE INFORMÁTICA Y MATEMÁTICA

Problema de contorno para funciones polianalíticas en la clase de Lipschitz

TRABAJO DE DIPLOMA

Yulieth Ramírez Leyva

Holguín, 2014

UNIVERSIDAD DE HOLGUÍN
OSCAR LUCERO MOYA

UNIVERSIDAD DE HOLGUÍN "OSCAR LUCERO MOYA"
FACULTAD DE INFORMÁTICA Y MATEMÁTICA

Problema de contorno para funciones polianalíticas en la clase de Lipschitz

TRABAJO DE DIPLOMA

Autor: Yulieth Ramírez Leyva

Tutor: Dr.Cs. Ricardo Abreu Blaya

Holguín, 2014

$\mathcal{A}$...

Mis padres Elisa y Víctor

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a:

-Dr.Cs Ricardo Abreu Blaya, mi tutor.
-Mis padres Elisa y Víctor. A mis hermanos Yanet y Ramón.
-A todos los que de una forma u otra colaboraron con la realización de este trabajo, especialmente a mis amigas Lianet De la Cruz Toranzo y Tania Rosa Gómez Santiesteban.

RESUMEN

El problema de contorno de Riemann ha sido investigado en la teoría de las funciones analíticas sobre la clase de Hölder. Una generalización de esta teoría y de las funciones de Hölder lo constituyen la teoría de las funciones polianalíticas y la clase de funciones de Lipschitz respectivamente. El presente trabajo tiene como objetivo extender el problema de contorno de Riemann en la teorías de las funciones analíticas a la teoría de las funciones polianalíticas sobre la clase de Lipschitz de exponente arbitrario. Esta problemática no ha sido tratada antes, por lo que el trabajo aporta una extensión de los elementos teóricos fundamentales del problema de contorno de Riemann a la teoría de las funciones polianalíticas. Además, se resuelve el problema del salto y el problema de Dirichlet para funciones polianalíticas sobre la clase de Lipschitz de exponente arbitrario.

ABSTRACT

The Riemann boundary problem has been researched in the analytical theory of the Hölder´s class functions. Applications of this theory are both the polyanalytical functions´ theory and the Lipschtz functions´ class respectively. This paper aims to extend the Riemann boundary problem of the analytical functions toward the polyanalytical functions on Lipchitz functions. This problem has not been treated before, so the work provides an extension of the basic theoretical elements of the problem of jump and the Dirichlet problem for polianalytic functions. Besides, the problem of the jump and the Dirichlet problems for polyanalytic functions on Lipschitz class are resolved to.

Índice de contenidos

Introducción

Bernhard Riemann fue un matemático que, a pesar de su corta vida, está considerado como uno de los integrantes de un grupo selecto de celebridades más universales, fecundos y originales creadores de todos los tiempos, que ocuparon la posición más excelsa del olimpo de las matemáticas. El problema de contorno de Riemann nombrado en su honor, es una clase de problema que se plantea durante el estudio de ecuaciones diferenciales en el plano complejo.

El problema de hallar dos funciones F^+ y F^- analíticas en los dominios Ω^+ y Ω^- respectivamente, incluido $z = \infty$, las cuales en un contorno Γ (cerrado y suave) satisfagan las correlaciones lineales:

$$F^+(t) = G(t)F^-(t) \tag{1}$$

o

$$F^+(t) = G(t)F^-(t) + g(t) \tag{2}$$

denominadas problema homogéneo y problema no homogéneo respectivamente, es conocido como problema de contorno de Riemann (ver[1] pp.110). Este problema se dio a conocer por primera vez en la obra de Riemann sobre ecuaciones diferenciales con coeficientes algebraicos. El problema homogéneo fue enunciado por él para el caso de n pares de funciones buscadas en relación con el problema de encontrar una ecuación diferencial cuyas integrales experimentan, en el recorrido alrededor de los puntos singulares, la sustitución lineal prefijada.
Riemann no se esforzó para resolver el problema planteado por él mismo. La primera resolución del problema homogéneo la ofreció Hilbert. Empleando las condiciones de que una función

compleja arbitraria es valor de contorno de una función analítica, Hilbert obtuvo una ecuación integral de Fredholm, la cual la satisface la condición del problema. Analizando esta ecuación, él demostró la alternativa: uno de los dos problemas con el coeficiente $G(t)$ y $\overline{G(t)}$ es resoluble.

Picard y Priválov (ver[1] pp.171) consideraban más tarde el caso general del problema de contorno y seguían el mismo camino de reducción del problema a una ecuación integral, aprovechando a título del aparato matemático, las integrales de tipo Cauchy. En lugar de la alternativa de Hilbert se obtenía aquí otra alternativa para los coeficiente $G(t)$ y $\frac{1}{G(t)}$. Este método se utiliza hasta ahora para la resolución del problema de Riemann con varias funciones incógnitas.

Plemelj muestra que en el caso de ser $\ln G(t)$ uniforme, la solución del problema homogéneo puede obtenerse explícitamente en las integrales de tipo de Cauchy. Carleman soluciona el problema de Riemann no homogéneo con coeficiente constante $G(t)$ para el caso en que el contorno esté representado por el segmento $[0, 1]$ del eje real. La resolución completa del problema de Riemann para un dominio simplemente conexo, fue propuesta por Gájov en 1937 en su artículo "Acerca del problema de contorno de Riemann". En 1941 Jvedelidze generalizó esta resolución para un dominio múltiplemente conexo. Los casos excepcionales del problema de contorno de Riemann se han considerado primeramente en las obras de Gájov, y luego, en una forma más general, en la obra de L.A.Chíkin.

Hanseman fue el primero en proponer el problema de Riemann con traslación. Por un procedimiento análogo al empleado por Hilbert para solucionar el problema de contorno de Riemann, Hanseman redujo el problema de traslación a la ecuación integral de Fredholm y obtuvo la misma alternativa que obtuvo Hilbert para el problema de Riemann.

El problema de contorno de Riemann tienen aplicaciones en:

1- Modelos integrables

El problema de dispersión espectral inversa o problemas inversos asociados al problema de Cauchy para ecuaciones en derivadas parciales de dimensión 2 en la línea, problemas periódicos o incluso problemas de frontera inicial, pueden indicarse como problemas de Riemann.

2- Polinomios ortogonales, Matrices aleatorias
Dado un peso en algún contorno, los polinomios ortogonales correspondientes pueden calcularse a través de la solución de un problema de factorización de Riemann. Además, se reduce la distribución de los valores propios de matrices aleatorias en varios conjuntos para cálculos de polinomios ortogonales.

Los problemas de contorno de Riemann han sido investigados en la teoría de las funciones analíticas sobre la clase de Hölder, una generalización de estas lo constituyen la teoría funciones polianalíticas y la clase de Lipschitz de exponente arbitrario respectivamente. En la literatura se recoge que las funciones polianalíticas (ver [2] pp.5) fueron consideradas por primera vez por el matemático ruso G.V.Kolossov (1867-1935), en sus estudios sobre la elasticidad. Recientemente este asunto vuelve a tomar interés a través de la teoría de los operadores y algunas propiedades interesantes de los espacios de funciones cuyos elementos son funciones polianalíticas.

Resulta interesante preguntarse si se puede estudiar el problema de contorno de Riemann sobre una clase más general que la clase de Hölder, por ejemplo, la clase de funciones de Lipschitz de exponente arbitrario introducida por Stein (ver [3]). Esta idea se formaliza a continuación:
Problema científico:
¿Cómo extender las técnicas de trabajo establecidas en la literatura en la solución de problemas de contorno de Riemann para funciones analíticas al caso más general de funciones polianalíticas sobre la clase de Lipschitz de exponente arbitrario?
Hacia su solución se encamina este trabajo investigativo. De modo que, se declara como **objeto**:
La Teoría del problema de contorno de Riemann.
Campo:
El problema de contorno de Riemann para funciones polianalíticas sobre la clase de Lipschitz de exponente arbitrario.
La autora propone el **objetivo general** de resolver el problema de contorno de Riemann para

funciones polianalíticas sobre la clase de Lipschitz de exponente arbitrario.
En correpondencia con el mismo, se declaran los **objetivos específicos**:

- Definir la transformada de Cauchy polianalítica sobre la clase de Lipschitz de exponente arbitrario.
- Determinar los valores límites de la transformada de Cauchy polianalítica sobre la clase de Lipschitz de exponente arbitrario.
- Enunciar las fórmulas de Plemelj-Sojotski para funciones polianalíticas sobre la clase de Lipschitz de exponente arbitrario.
- Resolver el problema del salto para funciones polianalíticas sobre la clase de Lipschitz de exponente arbitrario, como caso más simple del problema de contorno de Riemann.
- Resolver el problema de Dirichlet para funciones polianalíticas sobre la clase de Lipschitz de exponente arbitrario.

Preguntas científicas:

- ¿Se podrá generalizar la transformada de Cauchy analítica sobre la clase de Hölder a la teoría de funciones polianalíticas sobre la clase de Lipschitz de exponente arbitrario, es decir, existirá una transformada de Cauchy polianalítica?
- ¿Se podrán generalizar las fórmulas de Plemelj-Sojotski analíticas sobre la clase de Hölder a la teoría de funciones polianalíticas sobre la clase de Lipschitz de exponente arbitrario?
- ¿Será la transformada de Cauchy polianalítica solución del problema del salto para funciones polianalíticas sobre la clase de Lipschitz de exponente arbitrario? Si es así, ¿será única su solución?
- ¿Tendrá solución el problema de Dirichlet para funciones polianalíticas sobre la clase de Lipschitz de exponente arbitrario?

Tareas de investigación:

- Definir la transformada de Cauchy en la teoría de funciones polianalíticas sobre la clase de Lipschitz de exponente arbitrario.
- Hallar los valores límites de la transformada de Cauchy polianalítica.
- Extender las fórmulas de Plemelj-Sojotski.
- Demostrar que la transformada de Cauchy polianalítica es solución del problema del salto para funciones polianalíticas sobre la clase de Lipschitz de exponente arbitrario, y analizar su unicidad.
- Solucionar el problema de Dirichlet para funciones polianalíticas sobre la clase de Lipschitz de exponente arbitrario.

Aportes

- Se extienden los elementos teóricos fundamentales del problema de contorno de Riemann a la teoría de las funciones polianalíticas.
- Se soluciona el problema del salto y de Dirichlet para funciones polianalíticas.

Novedades científicas

- Se define la transformada de Cauchy polianalítica sobre la clase de Lipschitz de exponente arbitrario.
- Se soluciona el problema del salto funciones polianalíticas, a partir de la transformada de tipo de Cauchy polianalítica sobre la clase de Lipschitz de exponente arbitrario.
- Se soluciona el problema de Dirichlet para funciones polianalíticas sobre la clase de Lipschitz de exponente arbitrario.

La problemática investigada y los resultados alcanzados han sido expuestos por la autora, en eventos tales como XII Jornada Científica Estudiantil de la Facultad de Informática y Matemática, XII Jornada Científica Estudiantil de la Universidad de Holguín Oscar Lucero Moya, y en el XXI Forum Nacional de Estudiantes Universitarios de Ciencias Sociales, Naturales, Exactas y Humaníaticas.
La estructura de la tesis consta de Introducción, dos Capítulos, Conclusiones, Recomendaciones y Bibliografía.

En el Capítulo 1 se incorporan algunos resultados propios de esta investigación: la transformada de Cauchy para funciones polianalíticas, se determinan los valores límites de la transformada de Cauchy para funciones polianalíticas los cuales se enuncian mediante las fórmulas de Plemelj-Sojotski para las funciones polianalíticas sobre la clase de Lipschitz de exponente arbitrario.

En el Capítulo 2 se comprueba que la transformada de Cauchy para funciones polianalíticas es solución al problema del salto para las funciones polianalíticas sobre la clase de Lipschitz de exponente arbitrario; se analiza la unicidad de la solución y como una consecuencia inmediata de este análisis se enuncia un teorema de existencia. También se desarrolla un ejemplo del problema del salto en el caso particular que las funciones sean bianalíticas. Además se enuncia una condición necesaria para que la transformada de Cauchy sea solución del problema de Dirichlet para las funciones polianalíticas sobre la clase de Lipschitz de exponente arbitrario.

La transformada de Cauchy para funciones polianalíticas

1

La transformada de Cauchy para funciones polianalíticas

Inspirados en los resultados de Heinrich Begehr (véase [4]), se definirá aquí la transformada de Cauchy para funciones polianalíticas, que juega un papel similar al desempeñado por la clásica transformada de Cauchy para funciones analíticas. Es sumamente importante recordar algunas nociones básicas que serán de utilidad en esta investigación.

1.1. Conceptos básicos del análisis complejo

Podemos considerar un número complejo z como la expresión de la forma $x + iy$, donde x e y son números reales, e i, denominada la unidad imaginaria, la cual cumple la propiedad: $i^2 = -1$. Si $z = x + iy$, entonces x se llama parte real de z e y parte imaginaria de z y se denotan por $Re\{z\}$ e $Im\{z\}$, respectivamente. El símbolo z, que puede representar cualquier elemento del conjunto de los números complejos, es llamado una variable compleja. Una propiedad (ver [5]) importante que cumplen los números complejos es la siguiente:

Propiedad 1.1 *Sea $z = x + iy$ y $\overline{z} = x - iy$, entonces:*

$$|z| = |\overline{z}| \tag{3}$$

Definición 1.1 *Curva en* $\mathbb{C}$

Una curva Γ *en* $\mathbb{C}$ *es una aplicación* $\Gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ *continua, donde* $a, b \in \mathbb{R}$ *y* $a < b$.

Definición 1.2 *Curva suave*

Una curva suave es una línea simple (es decir, sin puntos múltiples) cerrada o abierta, cuya tangente cambia continuamente; además, esta línea no tiene puntos de retroceso.

Sea Γ una curva suave en el plano de la variable compleja z. Un dominio dispuesto dentro del contorno cerrado Γ, se denominará interior y se denotará con Ω^+, y un dominio complementario a $\Omega^+ \cup \Gamma$, en el que está contenido el punto infinitamente alejado, se denominará dominio exterior y se denotará con Ω^-.

Propiedad 1.2 *Suavidad del contorno* Γ

Para un contorno suave, la razón $\dfrac{ds}{dr}$, *donde* s *representa la longitud del arco de contorno y* r *la longitud de su cuerda; es una magnitud acotada, es decir,* $\left|\dfrac{ds}{dr}\right| \leq m$ *donde* m *es una constante positiva. Por consiguiente:* $|d\zeta| = |ds| \leq m|dr|$.

Nota 1.1 *Desde ahora se entiende que la curva estará recorrida en sentido positivo si se recorre en el sentido de las manecillas del reloj.*

Definición 1.3 *Función analítica*

Una función compleja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *se dice analítica en la región* Ω *si está definida en ésta; tiene derivada en cada punto de* Ω *y además satisface las condiciones de Cauchy-Riemann [6]:*

$$\left\{ \begin{array}{rcr} \dfrac{\partial u}{\partial x} & = & \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} & = & -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right.$$

Definición 1.4 *Función acotada*

Se dice que la función $f(z)$ *es acotada sobre un conjunto* $C \subset \mathbb{C}$ *si existe una constante* $M \in C$ *y* $M > 0$, *tal que* $|f(z)| < M \quad \forall z \in C$.

Observación 1.1 *Se designará con $f^+(z)$ el valor límites de la función $f(z)$, cuando el punto z va aproximándose desde el interior de Γ al punto t del contorno, y con $f^-(z)$ cuando dicha aproximación se realiza desde afuera. Para subrayar el sentido en el que se pasa al límite se denotará respectivamente $z \to t^+$ o $z \to t^-$. Los valores de las funciones correspondientes en el punto t del contorno, lo designaremos simplemente como $f(t)$; con la particularidad de que $f(t)$ significará una integral singular entendida en sentido del valor principal.*

Teorema 1.1 *Teorema de Liouville*
Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función analítica, tal que f es continua y acotada; entonces, resulta que f es constante.

Teorema 1.2 *Teorema de Painleve*
Sea Ω un dominio cerrado y Γ una curva suave. Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función continua en Ω y analítica en $\Omega \setminus \Gamma$ entonces f es analítica en Ω.

Definición 1.5 *Condición de Hölder*
Sea Γ una curva suave y sea $f(t)$ una función de puntos de dicha curva. Suele decirse que la función $f(t)$ satisface en la curva la condición de Hölder y se escribe $f(t) \in H^\alpha$, si para dos puntos $(t_1; t_2)$ cualesquiera de esta curva se verifica:

$$|f(t_2) - f(t_1)| < A|t_2 - t_1|^\alpha \tag{4}$$

donde A un número positivo y $0 < \alpha < 1$; los cuales se denominan costante y exponente de Hölder respectivamente.

Fórmulas de Cauchy

Son de gran importancia práctica las fórmulas de Cauchy que se expondrán a continiación.

Si $f(z)$ es una función analítica en Ω^+ y continua en $\Omega^+ \cup \Gamma$, entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \begin{cases} f(z), \ si \ z \in \Omega^+ \\ 0, \ si \ z \in \Omega^- \end{cases} \tag{5}$$

De lo contrario si $f(z)$ es una función analítica en Ω^- y continua en $\Omega^- \cup \Gamma$, entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \begin{cases} f(\infty), \ si \ z \in \Omega^+ \\ -f(z) + f(\infty), \ si \ z \in \Omega^- \end{cases} \tag{6}$$

Definición 1.6 *Transformada de Cauchy*
Sea Ω un dominio acotado cuyo borde es la curva suave cerrada Γ y f es una función continua sobre Γ, entonces se define la transformada de Cauchy como:

$$(C_\Gamma f)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \tag{7}$$

La misma representa una función analítica en todo el plano complejo, excepto en los puntos del contorno Γ.

Definición de valor principal de la integral curvilínea singular
Sea Γ un contorno suave y ζ, t las coordenadas compleja de sus puntos. Se examinará la integral curvilínea singular:

$$\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - t}d\zeta \tag{8}$$

Tomando por centro el punto t del contorno tracemos una circunferencia de radio δ, y sean t_1 y t_2 los puntos de intersección de esta con la curva; consideremos que el radio es tan pequeño que la circunferencia no tenga otros puntos de intersección con la curva Γ, salvo t_1 y t_2. Designemos con Γ_δ la parte del contorno Γ recortada por la circunferencia y calculemos la integral a lo largo del arco restante: $\displaystyle\int_{\Gamma-\Gamma_\delta}\frac{f(\zeta)}{\zeta - t}d\zeta$

Definición 1.7 *El límite de la integral*

$$\int_{\Gamma-\Gamma_\delta}\frac{f(\zeta)}{\zeta - t}d\zeta \tag{9}$$

cuando $\delta \to 0$, lleva el nombre de valor principal de la integral singular (8).

Es necesario recordar además los valores límites de la transformada de Cauchy en el contorno de integración, para ello se introducía [1] cierta función mediante el lema siguiente:

Lema 1.1 *Si la función $f(\zeta)$ satisface la condición de Hölder en el contorno Γ y el punto t no coincide con los extremos de Γ, la función*

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - f(t)}{\zeta - z} d\zeta \tag{10}$$

se porta al pasar por el punto $z = t$ del contorno, como una función continua.

En virtud de (5), usándose las igualdades:

$$\int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} 2\pi i, & z \in \Omega^{+} \\ 0, & z \in \Omega^{-} \\ \pi i, & z \in \Gamma \end{cases} \tag{11}$$

se tendrá que:

$$\Psi^{+}(t) = (C_{\Gamma} f)^{+}(t) - f(t) \tag{12}$$

$$\Psi^{-}(t) = (C_{\Gamma} f)^{-}(t) \tag{13}$$

$$\Psi(t) = (C_{\Gamma} f)(t) - \frac{1}{2} f(t) \tag{14}$$

Por el lema anterior se tiene que la función $\Psi(t)$ es continua por lo que sus valores $\Psi^{+}(t)$ y $\Psi^{-}(t)$ coinciden y dan lugar a las llamadas fórmulas de Plemelj-Sojotski.

$$(C_{\Gamma} f)^{+}(t) = \frac{1}{2} f(t) + (C_{\Gamma} f)(t) \tag{15}$$

$$(C_{\Gamma} f)^{-}(t) = -\frac{1}{2} f(t) + (C_{\Gamma} f)(t) \tag{16}$$

Al restar las ecuaciones (15) y (16) se obtiene la igualdad siguiente:

$$(C_{\Gamma} f)^{+}(t) - (C_{\Gamma} f)^{-}(t) = f(t) \tag{17}$$

la cual es una forma compacta de escribir las fórmulas de Plemelj-Sojotski y será usada en el capítulo siguiente.

Hasta aquí se han estudiado los valores límites de la transformada de Cauchy para funciones analíticas, pero es de interés definir la transformada de Cauchy para funciones polianalíticas sobre la clase de Lipschitz de exponente arbitrario. Ahora se analizarán las definiciones de función polianalítica y de funciones sobre la clase de Lipschitz de exponente arbitrario.

Definición 1.8 *Funciones polianalíticas*
Una función $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ se llama polianalítica[7] de orden n en algún dominio Ω del plano de la variable compleja z, si tiene derivada parcial (con respecto a x y a y) de orden menor o igual a n en Ω y si en este dominio satisface las condiciones de Cauchy-Riemann genaralizadas:

$$\frac{\partial^n f}{\partial \overline{z}^n} = 0, \quad donde \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{18}$$

Definición 1.9 *Multiíndice*
Un multiíndice es la n-upla ordenada $j = (j_1, j_2, j_3, ..., j_n)$ enla cual cada componente $j_i \geq\geq 0$,$\forall i = 1, 2, ..., n$. En lo adelante se utilizarán las notaciones siguientes

- $j! = (j_1!, j_2!, j_3!, ..., j_n!)$
- $|j| = (j_1 + j_2 + j_3 + ... + j_n)$
- $x^l = (x_1^{l_1} x_2^{l_2} x_3^{l_3} ... x_n^{l_n})$

Definición 1.10 *Funciones sobre la clase de Lipschitz de exponente arbitrario*
Sea $k \in \mathbb{N}$ y $k < \alpha \leq k+1$. Se dice que la función f, definida en Γ cerrado del plano complejo, pertenece a la clase de Lipschitz de exponente arbitrario [2], la cual se denota por $Lip(\alpha, \Gamma)$, si existen las funciones $f^{(j)}$, con $0 \leq |j| \leq k$ definida en Γ con $f^{(0)} = f$; y tal que si

$$f^{(j)}(x) = \sum_{|j+l| \leq k} \frac{f^{(j+l)}(y)}{l!}(x-y)^l + R_j(x,y) \tag{19}$$

entonces: $|f^{(j)}(x)| \leq M$ *y* $|R_j(x,y)| \leq M|x-y|^{\alpha-|j|}$ $\forall x, y \in \Gamma$, $|j| \leq k$. *Donde se tiene en cuenta que* j *y* l *denotan multíndices.*

1.2. Definición de la transformada de Cauchy para funciones polianalíticas.

La representación integral de una función es una de las herramientas fundamentales del Análisis. Esta es usada para detrminar las propiedades de las funciones representadas. En esta sección se definirá la transformada de Cauchy para funciones polianalíticas utilizando una representación integral obtenida por Begehr en su artículo (ver [4] pp230)

Representación integral o fórmula de Cauchy-Pompeiu
Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio regular y $f \in C^m(\Omega;\mathbb{C}) \cap C^{m-1}(\overline{\Omega};\mathbb{C}), 1 \leq m$. Entonces:

$$f(z) = \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{(\overline{z-\zeta})^\mu}{\mu!(\zeta - z)} \partial_{\overline{\zeta}}^\mu f(\zeta) d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_\Omega \frac{(\overline{z-\zeta})^{n-1}}{(n-1)!(\zeta-z)} \partial_{\overline{\zeta}}^n f(\zeta) d\xi d\eta \qquad (20)$$

La fórmula (20) generaliza a la fórmula de representación para funciones analíticas dada por la transformada de Cauchy analítica (7), para ello basta observar que si f es analítica $(n = 1)$, entonces $\partial_{\overline{\zeta}} f = 0$, lo que implica que $\partial_{\overline{\zeta}}^n f = 0$, por lo que el segundo sumando de la representación integral para funciones polianalíticas (20) se anula. Análogamente si f es polianalítica de orden n, se cumplirá que $\partial_{\overline{\zeta}}^n f = 0$ y se tendrá una representación integral de f a través de los puntos de la frontera Γ. Estas observaciones inspiran la definición de transformada de Cauchy para funciones polianalíticas sobre la clase de Lipschitz de exponente arbitrario (transformada de Cauchy polianalítica) siguiente

Definición 1.11 *Transformada de Cauchy polianalítica*
Sea $\Gamma \subset \mathbb{C}$ *una curva suave y* $f \in Lip(\Gamma, \alpha)$, $k < \alpha \leq k+1$. *Se define la transformada de Cauchy como:*

$$(C_\Gamma^{k+1} f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \sum_{\mu=1}^{k+1} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{(\overline{z-\zeta})^\mu}{\mu!(\zeta - z)} f_{\mu-1}^*(\zeta) d\zeta \qquad (21)$$

donde:

$$f^*_{m-1}(z) = \frac{1}{2^m}\sum_{p=0}^{m} i^{m-p}\binom{m}{p} f^{(p,m-p)}(z)$$

Obsérvese que las funciones $f^*_{\mu-1}$ contienen a las funciones $f^{(j)}$ tales que $|j| = \mu$.

1.2.1. Legitimidad de la definición

La siguiente proposición y su demostración implican que la definición (1.11) dada anteriormente es legítima. De este modo se obtiene una transformada de Cauchy alternativa para las funciones polianalíticas sobre la clase de Lipschitz de exponente arbitrario.

Proposición 1.1 *La función compleja (21) está correctamente definida para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$.*

Demostración 1.1 *Es importante observar que la transformada de Cauchy polianalítica (21) está integrada por la transformada de Cauchy analítica más la suma integral que surge de la representación integral de funciones polianalíticas, por tanto, para analizar la legitimidad de esta definición basta probar que dicha suma integral es acotada. Entonces si Γ es una curva cerrada y $z \in \Omega^+$, para todo z fuera de Γ se tiene que*

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu=1}^{k+1}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left|\frac{(\overline{z-\zeta})^\mu}{\mu!(\zeta - z)} f^*_{\mu-1}(\zeta)d\zeta\right| &\leq \sum_{\mu=1}^{k+1}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left|\frac{(\overline{z-\zeta})^\mu}{\mu!(\zeta - z)} f^*_{\mu-1}(\zeta)d\zeta\right| \leq \\
\sum_{\mu=1}^{k+1}\frac{1}{2\pi\mu! i}\int_\Gamma\left|\frac{(\overline{z-\zeta})^\mu}{(\zeta - z)}\right| |f^*_{\mu-1}(\zeta)||d\zeta| &= \sum_{\mu=1}^{k+1}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma |(\overline{z-\zeta})^{\mu-1}||f^*_{\mu-1}(\zeta)||d\zeta| \leq \\
\sum_{\mu=1}^{k+1}\frac{M^* d(\Gamma)^{\mu-1}}{2\pi i\mu!}\int_\Gamma |d\zeta| &\leq \sum_{\mu=1}^{k+1}\frac{M^* d(\Gamma)^{\mu-1}}{2\pi i\mu!} l(\Gamma) < +\infty
\end{aligned}$$

Observación 1.2 *Dado que las $f^*_{\mu-1}$, no son más que combinaciones lineales de las $f^{(p,m-p)}$, las cuales satisfacen $|f^{(p,m-p)}| \leq M$ por ser $f \in Lip(\alpha, \Gamma)$ se tendrá que $f^*_{m-1}(z) \leq M^*$. Además como $z \in \Omega^+$ y ζ está sobre la curva Γ, entonces la diferencia $(\zeta - z)$ estará acotada por el diámetro de la curva Γ $(d(\Gamma))$. Se denotará por $l(\Gamma)$ la longitud de la curva.*

Si $z \in \Omega^-$, entonces haciendo un razonamiento análogo y teniendo en cuenta que la diferencia $(\zeta - z)$ se puede acotar tomando una circunferencia (C) centrada en z y de radio $(r(C))$ mayor que el diḿetro de la curva Γ. Entonces se puede llegar a la acotación siguiente

$$\sum_{\mu=1}^{k+1} \frac{M^* r(C)^{\mu-1}}{2\pi i \mu!} l(\Gamma) < +\infty$$

Por tanto se ha obtenido una transformada de Cauchy alternativa para las funciones polianalíticas sobre las clases de Lipschitz de exponente arbitrario.

1.3. Valores límites de la transformada de Cauchy para funciones polianalíticas. Fórmulas de Plemelj-Sojotski para funciones polianalíticas

En este epígrafe se demuestra que el segundo sumando de la transformada de Cauchy polianalítica (21) representa una función continua al atravesar el contorno Γ. Por tanto, al escribir las fórmulas de Plemelj-Sojotski para funciones polianlíticas, resultan ser similares a las fórmulas de Plemelj-Sojotski para funciones analíticas.

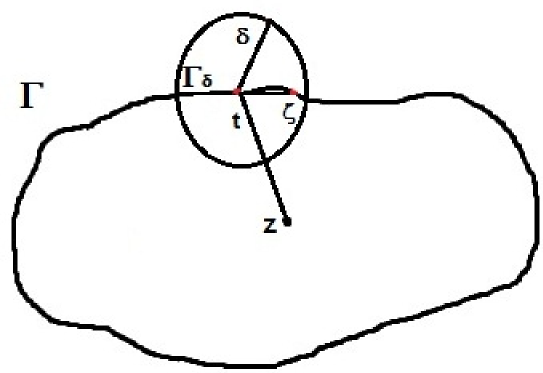
Valores límites de la transformada de Cauchy para funciones polianalíticas

Ahora se demostrará que el segundo sumando de la transformada de Cauchy polianalítica (21) es continuo al atravesar el contorno Γ, es decir

$$\lim_{z \to t} \sum_{\mu=1}^{k+1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(\overline{z - \zeta})^{\mu}}{\mu!(\zeta - z)} f^*_{\mu-1}(\zeta) d\zeta = \sum_{\mu=1}^{k+1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(\overline{t - \zeta})^{\mu}}{\mu!(\zeta - t)} f^*_{\mu-1}(\zeta) d\zeta \tag{22}$$

Para ello se comprobará primero que el miembro derecho de (22) está bien definido. Sea Γ_δ el trayecto del contorno Γ que queda dentro de un círculo de radio δ con centro en t. Entonces obsérvese $\Gamma = \Gamma_\delta \cup (\Gamma \setminus \Gamma_\delta)$. Se eligirá δ tan pequeño como se quiera y tal que el vector $\overrightarrow{t\zeta}$ esté contenido totalmente en dicho círculo. Luego, si se denota por $I(t)$ el miembro derecho de (22), se podrá dividir la comprobación en dos tramos Γ_δ y $\Gamma \setminus \Gamma_\delta$. Se puede denotar entonces

Figura 1:



$I_1(t) = I(t) \setminus \Gamma_\delta$ e $I_2(t) = I(t) \setminus (\Gamma \setminus \Gamma_\delta)$. Sea $t \in \Gamma$ entonces se analizará la acotación de I_1

$$|I_1| \leq \sum_{\mu=1}^{k+1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\delta} \left| \frac{(\overline{t-\zeta})^\mu}{\mu!(\zeta - t)} f^*_{\mu-1}(\zeta) d\zeta \right| \leq \sum_{\mu=1}^{k+1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\delta} \left| \frac{(\overline{t-\zeta})^\mu}{\mu!(\zeta - t)} \right| |f^*_{\mu-1}(\zeta)||d\zeta| \leq$$

$$\sum_{\mu=1}^{k+1} \frac{M^* m}{\pi i \mu!} \int_0^\delta r^{\mu-1} dr = \sum_{\mu=1}^{k+1} \frac{M^* m \delta^\mu}{\pi i \mu! \mu} \underset{\delta \to 0}{\to} 0$$

Si se utiliza la observación (1.2) y tomando además $|\zeta - t| = r$, utilizádose la propiedad de suavidad del contorno Γ (1.2) es posible llegar a la acotación de I_1 anterior. Una vez elegido el δ, se puede pasar a la acotación de I_2. En el trayecto $\Gamma \setminus \Gamma_\delta$ se tiene que $t \neq \zeta$, por lo cual la sumatoria que figura en I_2 es una función continua en el punto t por tanto tiene sentido hablar de límite. Por tanto se puede decir que el miembro derecho de (22) está bien definido. Entonces es posible comprobar la continuidad

$$\left| \sum_{\mu=1}^{k+1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\delta} \frac{1}{\mu!} \left[\frac{(\overline{z-\zeta})^\mu}{(\zeta - z)} - \frac{(\overline{t-\zeta})^\mu}{(\zeta - t)} \right] f^*_{\mu-1}(\zeta) d\zeta \right| \tag{23}$$

Para ello denotemos por I^* la diferencia (23) y utilizando los razonamientos de la comprobación anterior se denota por $I_1^* = I^* \setminus \Gamma_\delta$ e $I_2^* = I^* \setminus (\Gamma \setminus \Gamma_\delta)$.

Análisis para I_1^* si $z \in \Omega^+$

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{\mu=1}^{k+1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta}\frac{1}{\mu!}\left[\frac{(\overline{z-\zeta})^\mu}{(\zeta-z)}-\frac{(\overline{t-\zeta})^\mu}{(\zeta-t)}\right]f^*_{\mu-1}(\zeta)d\zeta\right| &\leq \sum_{\mu=1}^{k+1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta}\frac{1}{\mu!}\left|\frac{(\overline{z-\zeta})^\mu}{(\zeta-z)}-\frac{(\overline{t-\zeta})^\mu}{(\zeta-t)}\right||f^*_{\mu-1}(\zeta)||d\zeta| \leq \\
\sum_{\mu=1}^{k+1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta}\frac{1}{\mu!}\left|\frac{(\overline{z-\zeta})^\mu}{(\zeta-z)}\right|+\left|\frac{(\overline{t-\zeta})^\mu}{(\zeta-t)}\right||f^*_{\mu-1}(\zeta)||d\zeta| &\leq \sum_{\mu=1}^{k+1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta}\frac{|z-\zeta|^{\mu-1}+|t-\zeta|^{\mu-1}}{\mu!}|f^*_{\mu-1}(\zeta)||d\zeta| \leq \\
\sum_{\mu=1}^{k+1}\frac{M^*m}{2\pi i\mu!}\int_{\Gamma_\delta}[d(\Gamma)^{\mu-1}+r^{\mu-1}]dr &\leq \sum_{\mu=1}^{k+1}\frac{M^*m}{2\pi i\mu!}\left[\int_{\Gamma_\delta}d(\Gamma)^{\mu-1}dr+\int_{\Gamma_\delta}r^{\mu-1}dr\right] \leq \\
\sum_{\mu=1}^{k+1}\frac{M^*m}{2\pi i\mu!}2\left[\int_0^\delta d(\Gamma)^{\mu-1}dr+\int_0^\delta r^{\mu-1}dr\right] &= \sum_{\mu=1}^{k+1}\frac{MmR(\Gamma)^{\mu-1}\delta\delta^\mu}{\pi i\mu!\mu}
\end{aligned}$$

Haciendo uso de los razonamientos anteriores y utilizando la observación (1.2) y la propiedad de suavidad del contorno (1.2) se pudo llegar a la acotación anterior. Por tanto al elegir arbitrariamente $\epsilon > 0$, se puede tomar δ tal que sea $|I_1^*| \leq \dfrac{\epsilon}{2}$.

Análisis para I_1^* si $z \in \Omega^-$

Sea entonces $z \in \Omega^-$, utilizando los razonamientos del análisis cuando $z \in \Omega^+$ y teniendo en cuenta que si $z \in \Omega^-$ se puede tomar una circunferencia con centro en z y radio suficientemente grande que cubra a la curva Γ, tal que $z-\zeta$ está acotado. Por tanto al elegir arbitrariamente $\epsilon > 0$, se puede tomar un δ tal que sea $|I_1^*| \leq \dfrac{\epsilon}{2}$.

Ahora, eligido δ, se puede pasar a la acotación de $|I_2^*|$. En el trayecto $\Gamma - \Gamma_\delta$ se tiene $\zeta \neq t$, por lo cual la sumatoria de las integrales $|I_2^*|$ en el punto t es una función continua de z. Por consiguiente, se verifica la desigualdad $|I_2^*| \leq \dfrac{\epsilon}{2}$.

Finalmente se puede concluir:

$$\left|\sum_{\mu=1}^{k+1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta}\frac{1}{\mu!}\left[\frac{(\overline{z-\zeta})^\mu}{(\zeta-z)}-\frac{(\overline{t-\zeta})^\mu}{(\zeta-t)}\right]f^*_{\mu-1}(\zeta)d\zeta\right| \leq |I_1|+|I_2| < \epsilon$$

Lo cual prueba que existe el límite (22).

Fórmulas de Plemelj-Sojotski para funciones polianalíticas

Ahora ya estamos en condiciones de considerar el problema fundamental sobre la existencia de valores límites de la transformada de Cauchy en el contorno de integración Γ. Es conveniente considerar el contorno cerrado y suave. En caso de que el contorno resulte ser abierto, se completará con alguna curva hasta que resulte ser cerrado, haciendo en esta curva complementaria $f(\zeta) = 0$.

Teorema 1.3 *Sea Γ una curva cerrada suave y $f \in Lip(\alpha, \Gamma)$. La transformada de Cauchy polianalítica tiene valores límites continuos en Γ cuando $z \to t$ desde $\Omega_{\pm}$ respectivamente.*

Demostración 1.2 *En el epígrafe anterior se demostró que el segundo sumando de la transformada de Cauchy polianalítica (21) representa una función continua. Consecuentemente, $(C_\Gamma^{k+1} f)(z)$ representa una función polianalítica en $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ cuyas restricciones $(C_\Gamma^{k+1} f)(z)|_{\Omega^+}$ y $(C_\Gamma^{k+1} f)(z)|_{\Omega^-}$ son continuas en Ω^+ y Ω^- respectivamente. Los valores de frontera de las restricciones $(C_\Gamma^{k+1} f)^{\pm}(z)$pueden ser vistos como los valores límites usuales, los cuales están dados por*

$$(C_\Gamma^{k+1} f)^+(t) = \frac{1}{2} f(t) + \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\mu!(\zeta - t)} d\zeta + \sum_{\mu=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{(\overline{t - \zeta})^\mu}{\mu!(\zeta - t)} f^*_{\mu-1}(\zeta) d\zeta$$

$$(C_\Gamma^{k+1} f)^-(t) = \frac{1}{2} f(t) - \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\mu!(\zeta - t)} d\zeta + \sum_{\mu=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{(\overline{t - \zeta})^\mu}{\mu!(\zeta - t)} f^*_{\mu-1}(\zeta) d\zeta$$

Si se escriben estas fórmulas en forma compacta se tiene

$$(C_\Gamma^{k+1} f)^+(t) = \frac{1}{2} f(t) + (C_\Gamma^{k+1} f)(t) \tag{24}$$

$$(C_\Gamma^{k+1} f)^-(t) = \frac{1}{2} f(t) - (C_\Gamma^{k+1} f)(t) \tag{25}$$

con la particularidad de que la integral singular $(C_\Gamma^{k+1} f)(t)$ se entiende en sentido de valor principal. Así la prueba está completa.

Notemos que con el teorema anterior se han extendido las fórmulas de Plemelj-Sojotski a las funciones polianalíticas sobre la clase de Lipschitz de exponente arbitrario.

1.4. Conclusiones parciales

Hasta aquí se han logrado definir la transformada de Cauchy polianalítica, los valores límites de la transformada de Cauchy y las fórmulas de Plemelj-Sojotski para las funciones polianalíticas sobre la clase de Lipschitz de exponente arbitrario, las cuales constituirán herramientas fundamentales para la solución de los problemas del salto y de Dirichlet para funciones polianalíticas sobre la clase de Lipschitz de exponente arbitrario.

Problema del salto y de Dirichlet para funciones polianalíticas

2

Problema del salto y de Dirichlet para funciones polianalíticas

Como se pudo observar en el capítulo anterior, del estudio de los valores límites de la transformada de Cauchy para las funciones analíticas, se llega a que la misma es solución del problema del salto (véase [1]). En el presente capítulo se pretende comprobar que la transformada de Cauchy para funciones polianalíticas, es solución del problema del salto para funciones polianalíticas sobre la clase de Lipschitz de exponente arbitrario y se analizará además la unicidad de esta solución. Además, se analizará un ejemplo del problema del salto para las funciones bianalíticas. Tambíen se enunciará una condición necesaria para que función sea el valor de contorno de cierta función polianalítica sobre la clase de Lipschitz de exponente arbitrario en el dominio interior Ω_+.

2.1. Problema del salto para funciones polianalíticas sobre la clase de Lipschitz de exponente arbitrario

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ donde $f \in Lip(\alpha, \Gamma)$, $\; k < \alpha \leq k+1$. Hállase la función polianalítica de orden $k+1$, $F(z)$ que experimenta un salto $f(z)$ y además sus derivadas parciales de orden k experimenten un salto $f^*_{k-1}(z)$. Es decir, hállase la función que satisfaga las condiciones siguientes:

$$\begin{aligned}
\partial_{\bar{z}}^{k+1}F(z) &= 0 \ \ en \ \ \mathbb{C}\setminus\Gamma \\
F^{+}(t)-F^{-}(t) &= f(t) \\
(\partial_{\bar{z}}F)^{+}(t)-(\partial_{\bar{z}}F)^{-}(t) &= f^{*}(t) \\
(\partial_{\bar{z}}^{2}F)^{+}(t)-(\partial_{\bar{z}}^{2}F)^{-}(t) &= f_{1}^{*}(t) \\
&\vdots \\
(\partial_{\bar{z}}^{k}F)^{+}(t)-(\partial_{\bar{z}}^{k}F)^{-}(t) &= f_{k-1}^{*}(t)
\end{aligned}$$

donde:

$$f_k^{*}(t)=\frac{1}{2^{k+1}}\sum_{\mu=0}^{k+1} i^{(k+1)-\mu}\binom{k+1}{\mu} f^{(\mu,(k+1)-\mu)}(t) \tag{26}$$

2.1.1. Solución del problema del salto para funciones polianalíticas

Respetándose el análisis que se ha realizado para el problema del salto en el caso donde las funciones son analíticas, se realizará un análisis similar para las funciones polianalíticas. Es decir, se verificará que la transformada de Cauchy para funciones polianalíticas definida en el capítulo anterior representa una función polianalítica.

Recuérdese que una función es polianalítica de orden $k+1$ si satisface la condición de Cauchy-Riemann generalizada. Comprobemos que la transformada de Cauchy polianalíca representa una función polianalítica de orden $k+1$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\partial_{\bar{z}}(C_{\Gamma}^{k+1}f) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\sum_{\mu=2}^{k+1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\mu(\overline{z-\zeta})^{\mu}}{\mu!(\zeta-z)}f_{\mu-1}^{*}(\zeta)d\zeta \\
\partial_{\bar{z}}^{2}(C_{\Gamma}^{k+1}f) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f_2^{*}(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\sum_{\mu=3}^{k+1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\mu(\mu-1)(\overline{z-\zeta})^{\mu}}{\mu!(\zeta-z)}f_{\mu-1}^{*}(\zeta)d\zeta
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\vdots \\
\partial_{\overline{z}}^{k}(C_{\Gamma}^{k+1}f) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\partial_{\overline{z}}^{k}\Big(\frac{f_{k-1}(\zeta)}{\zeta-z}\Big)d\zeta+\sum_{\mu=k+1}^{k+1}\frac{\mu(\mu-1)...(\mu-(k-1))}{2\pi i}\int_{\Gamma}\partial_{\overline{z}}^{k}\Big(\frac{(\overline{z-\zeta})^{\mu}}{\mu!(\zeta-z)}\Big)f_{\mu-1}^{*}(\zeta)d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f_{k}^{*}(\zeta)}{(\zeta-z)}d\zeta \\
\partial_{\overline{z}}^{k+1}(C_{\Gamma}^{k+1}f) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\partial_{\overline{z}}\Big(\frac{1}{\zeta-z}\Big)f_{k}^{*}(\zeta)d\zeta=0
\end{aligned}
$$

Por tanto se concluye que la transformada de Cauchy polianalíticas representa una función polianalítica para $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Es posible entonces analizar si la transformada de Cauchy polianalítica es solución del problema del salto. Se comenzará analizando el caso más simple, es decir, cuando las funciones son bianalíticas.

Problema del salto para el caso particular

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, donde $f \in Lip(\alpha, \Gamma),\ \ 1 < \alpha \leq 2$. Hállase la función bianalítica $F(z)$ tal que:

$$
\begin{aligned}
\partial_{\overline{z}}^{2}F(z) &= 0 \ \ en\ \ \mathbb{C}\setminus\Gamma \\
F^{+}(t)-F^{-}(t) &= f(t) \\
(\partial_{\overline{z}}F)^{+}(t)-(\partial_{\overline{z}}F)^{-}(t) &= f^{*}(t)
\end{aligned}
$$

donde:

$$
f^{*}=\frac{f^{(1,0)}+if^{(0,1)}}{2} \tag{27}
$$

Entonces la transformada de Cauchy para estas funciones será:

$$
(C_{\Gamma}^{2}f)(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\overline{z-\zeta}}{\zeta-z}f^{*}(\zeta)d\zeta
$$

La transformada de Cauchy para el caso donde $n = 2$ representa una función bianalítica y además, de las fórmulas de Plemelj-Sojotski, se llega a que la transformada de Cauchy tiene un salto $f(z)$ en la frontera; nos restaría comprobar que se cumple la segunda condición de contorno, para ello se derivará la tansformada de Cauchy respecto a $\overline{z}$:

$$\begin{aligned}(\partial_{\overline{z}} C_\Gamma^2 f)(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \partial_{\overline{z}}\left(\frac{1}{\zeta - z}\right) f(\zeta)d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \partial_{\overline{z}}\left(\frac{\overline{\zeta - z}}{\zeta - z}\right) f^*(\zeta)d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f^*(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta\end{aligned}$$

Calculando los valores límites para $\partial_{\overline{z}} C_\Gamma^2 f$ se tiene:

$$(\partial_{\overline{z}} C_\Gamma^2 f)^+(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f^*(\zeta)}{\zeta - t}d\zeta + \frac{1}{2}f^*(t) \tag{28}$$

$$(\partial_{\overline{z}} C_\Gamma^2 f)^-(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f^*(\zeta)}{\zeta - t}d\zeta - \frac{1}{2}f^*(t) \tag{29}$$

restando estas las ecuaciones (28) y (29) se tiene que $(\partial_{\overline{z}} C_\Gamma^2 f)(t)$ tiene un salto $f_1^*(t)$ en la frantera Γ.

Es posible entonces analizar el caso más general donde las funciones son polianalíticas de orden $k+1$.

Problema del salto en el caso general

Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ donde $f \in Lip(\alpha,\Gamma),\ \ k < \alpha \leq k+1$. Hállase la función polianalítica de orden $k+1$, $F(z)$ que experimenta un salto $f(z)$ y además sus derivadas parciales de orden k experimenten un salto $f_{k-1}^*(z)$. Es decir, hállase la función que satisfaga las condiciones siguientes:

$$\partial_{\overline{z}}^{k+1} F(z) = 0 \ \ en\ \ \mathbb{C}\setminus\Gamma \tag{30}$$

$$F^+(t) - F^-(t) = f(t) \tag{31}$$

$$(\partial_{\overline{z}} F)^+(t) - (\partial_{\overline{z}} F)^-(t) = f^*(t) \tag{32}$$

$$
\begin{aligned}
(\partial_{\overline{z}}^2 F)^+(t) - (\partial_{\overline{z}}^2 F)^-(t) &= f_1^*(t) \qquad (33)\\
&\vdots\\
(\partial_{\overline{z}}^k F)^+(t) - (\partial_{\overline{z}}^k F)^-(t) &= f_{k-1}^*(t) \qquad (34)
\end{aligned}
$$

donde las f_{k-1}^* están dadas por (26)

Se comprobará ahora que la transformada de Cauchy polianalítica (21) es solución a este problema.

Al inicio de esta sección se comprobó que la transformada de Cauchy representa una función polianalítica de orden $k+1$, por tanto restaría demostrar que además cumple las condiciones de frontera (32)-(34). De los valores límites obtenidos de la transformada de Cauchy polianalítica se tiene que $F^+ - F^- = f$ por lo que el cumplimiento de (32) es evidente. Analizándose el caso general

$$\partial_{\overline{z}}^k F^+(t) - \partial_{\overline{z}}^k F^-(t) = f_k^*(t)$$

se deriva la transformada de Cauchy polianalítica respecto a $\overline{z}$ k-veces y se calculan los valores límites de $\partial_{\overline{z}}^k (C_\Gamma^n f)(z)$ se tiene que:

$$(\partial_{\overline{z}}^k C_\Gamma^{k+1} f)^+(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f_{k-1}^*(\zeta)}{(\zeta - t)} d\zeta + \frac{1}{2} f_{k-1}^*(t) \qquad (35)$$

$$(\partial_{\overline{z}}^k C_\Gamma^{k+1} f)^+(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f_{k-1}^*(\zeta)}{(\zeta - t)} d\zeta - \frac{1}{2} f_{k-1}^*(t) \qquad (36)$$

Restando estas las ecuaciones (35) y (36) se obtiene que $(\partial_{\overline{z}}^k C_\Gamma^{k+1} f)(t)$ tiene un salto $f_{k-1}^*(t)$ en la frontera así se cumplirán las condiciones (32)-(32) como se quería.

Consiguientemente la transformada de Cauchy para funciones polianalíticas es solución del problema del salto.

2.1.2. Análisis de la unicidad del problema del salto para funciones polianalíticas

En el análisis de la unicidad de la solución del problema del salto para funciones polianalíticas, no se puede seguir un razonamiento similar al realizado para funciones analíticas. Entre los obstáculos fundamentales que aparecen podemos mencionar la no existencia de un teorema de Painleve sobre la limpieza de singularidades de esta clase de funciones. Una consecuencia inmediata del análisis hecho en el apartado anterior se formaliza a continuación

Teorema 2.4 *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, tal que $f \in Lip(\alpha, \Gamma)$, $k < \alpha \leq k+1$ y Γ una curva suave; entonces existe almenos una solución del problema del salto, la cual está dada por la transformada de Cauchy polianalítica.*

Demostración 2.3 *La demostración de este teorema se desprende al restar las fórmulas de Plemelj-Sojotski para funciones polianalíticas (25) y (24).Además si se calculan los valores límites de las k-ésimas derivadas parciales respecto a $\overline{z}$ de la transformada de Cauchy polianaítica se pueden escribir las fórmulas de Plemelj-Sojotski correspondientes y repetir el procedimiento anterior, concluyéndose que la transformada de Cauchy polianalítica es solución del problema del salto.*

Será un objeto interesante de investigación futura obtener condiciones que garanticen la unicidad de las soluciones en el caso de funciones polianalíticas.

2.1.3. Ejemplo del problema del salto para funciones bianalíticas

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ y $\Gamma\{z : |z| = 1\}$ la circunferencia unitaria, donde $f \in Lip(1+\alpha, \Gamma)$, $2 < 1+\alpha \leq 3$ y tal que $f(x, y) = \overline{z}$, $\overline{z} = x - iy$. Hállase la función bianalítica $F(z)$ tal que:

$$\partial_{\overline{z}}^2 F(z) = 0 \ \ en \ \ \mathbb{C} \setminus \Gamma \tag{37}$$

$$F^+(t) - F^-(t) = \overline{t} \tag{38}$$

$$(\partial_{\overline{z}} F)^+(t) - (\partial_{\overline{z}} F)^-(t) = 1 \tag{39}$$

Observación 2.3 *Si $\Gamma = \mathbb{R}^m$, las funciones $f^{(j)}$ de la definición del espacio de Lipschitz de exponente arbitrario, están únicamente determinados por $f^{(0)} = f$, y en este caso $Lip(k+\alpha, \mathbb{R}^m)$ está costituida por las funciones continuas y acotadas f, con derivadas parciales continuas y acotadas $\partial^{(j)} f$, cuando $|j| = k$, pertenecen al espacio $Lip(\alpha, \mathbb{R}^m)$*

Siendo este el caso estudiado se puede entonces decir que:

$$f^*(z) = \partial_{\overline{z}} f(z) = 1$$

Entonces la transformada de Cauchy para f sería:

$$\begin{aligned}
(C_\Gamma^2 f)(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\overline{\zeta}}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\overline{\zeta - z}}{\zeta - z} d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\overline{\zeta}}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\overline{z}}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\overline{\zeta}}{\zeta - z} d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\overline{z}}{\zeta - z} d\zeta
\end{aligned}$$

Si $z \in \Omega^+$, entonces según la fórmula (11) se tiene que $(C_\Gamma^2 f)^+(t) = \overline{t}$. Si $z \in \Omega^-$, entonces según la fórmula (11) se tiene que $(C_\Gamma^2 f)^-(t) = 0$. Entonces $(C_\Gamma^2 f)^+(t) - (C_\Gamma^2 f)^-(t) = \overline{t}$. Por otro lado, $(C_\Gamma^2 f)^+(t) = \lim\limits_{z \to t^+} (C_\Gamma^2 f)(z)$ y $(C_\Gamma^2 f)^-(t) = \lim\limits_{z \to t^-} (C_\Gamma^2 f)(z)$, según las fórmulas de Plemelj-Sojotski se tiene que

$$(C_\Gamma^2 f)^+(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\overline{\zeta}}{\zeta - t} d\zeta + \frac{1}{2}\overline{t} \tag{40}$$

$$(C_\Gamma^2 f)^-(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\overline{\zeta}}{\zeta - t} d\zeta - \frac{1}{2}\overline{t} \tag{41}$$

Luego restando (40) y (41) se tiene que $(C_\Gamma^2 f)^+(t) - (C_\Gamma^2 f)^-(t) = \overline{t}$, lo cual comprueba que se cumple la primera condición de contorno.

Para la segunda condición se deriva la transformada de Cauchy bianalítica

$$\partial_{\overline{z}}(C^2_\Gamma f)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \partial_{\overline{z}}\left(\frac{\overline{z}}{\zeta - z}\right)d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\zeta - z}d\zeta$$

Si $z \in \Omega^+$, entonces según la fórmula (11) se tiene que $(\partial_{\overline{z}}C^2_\Gamma f)^+(t) = 1$. Si $z \in \Omega^-$, entonces según la fórmula (11) se tiene que $(\partial_{\overline{z}}C^2_\Gamma f)^-(t) = 0$. Entonces $(\partial_{\overline{z}}C^2_\Gamma f)^+(t) - (\partial_{\overline{z}}C^2_\Gamma f)^-(t) = 1$. Por otro lado $(\partial_{\overline{z}}C^2_\Gamma f)^+(t) = \lim\limits_{z\to t^+}(\partial_{\overline{z}}C^2_\Gamma f)(z)$ y $(\partial_{\overline{z}}C^2_\Gamma f)^-(t) = \lim\limits_{z\to t^-}(\partial_{\overline{z}}C^2_\Gamma f)(z)$, según las fórmulas de Plemelj-Sojotski se tiene que

$$(\partial_{\overline{z}}C^2_\Gamma f)^+(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\zeta - t}d\zeta + \frac{1}{2} = \frac{1}{2\pi i}\pi i + \frac{1}{2} = 1 \tag{42}$$

$$(\partial_{\overline{z}}C^2_\Gamma f)^-(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\zeta - t}d\zeta - \frac{1}{2} = \frac{1}{2\pi i}\pi i - \frac{1}{2} = 0 \tag{43}$$

Luego, restando (42) y (43) se tiene que $(\partial_{\overline{z}}C^2_\Gamma f)^+(t) - (\partial_{\overline{z}}C^2_\Gamma f)^-(t) = 1$, lo cual comprueba que se cumple la segunda condición de contorno. Finalmente si se tiene en cuenta que la transformada de Cauchy para el caso donde $n = 2$ representa una función bianalítica, entonces se puede decir que $(C^2_\Gamma f)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\overline{z}}{\zeta - z}d\zeta$ es solución del problema del salto bianalítico.

2.2. Problema de Dirichlet

El problema de Dirichlet debe su nombre a Lejeune Dirichlet, quien propuso una solución para un método variacional el cual se conoce como principio de Dirichlet. Sin embargo, Weierstrass encontró una falla al argumento de Dirichlet, y una demostración rigurosa de la existencia fue encontrada en 1900 por Hilbert. Resultó entonces que la existencia de una solución depende delicadamente de la suavidad del contorno . Se reduce al problema de Dirichlet la determinación de la temperatura de un campo calorífico o del potencial de un campo electrostático en cierto dominio para una temperatura asignada o para el potencial asignado sobre la frontera del dominio.

2.2.1. Problema de Dirichlet para funciones analíticas sobre la clase de Hölder

Sea dada en el contorno cerrado y suave Γ una función compleja continua $f(s)$ de los puntos del contorno, y sea $t = t(s) = t_1(s) + it_2(s)$ la ecuación del contorno en forma compleja, donde $t(s)$ es una función del arco s que se mide a partir de algún punto del contorno. Sustituyéndose en la expresión para la función $f(s)$ la coordenada compleja, se separan las partes real e imaginaria:

$$f(s) = f[t(s)] = f_1(s) + if_2(s)$$

Es fácil mostrar que la pregunta de si existe en el dominio Ω_+ tal función analítica para la cual la función compleja prefijada $f(s)$ sea su valor límite en el contorno, se debe dar, en el caso general, una respuesta negativa. En efecto, según los valores de la parte real $f_1(s)$, puede construirse una función $u(x, y)$ armónica en el dominio Ω_+, cuyos valores límites en el contorno coinciden con la función dada $f_1(s)$ (**Problema de Dirichlet**). Según la función $u(x, y)$ se puede determinar, salvo un sumando constante arbitrario, una función armónica $v(x, y)$ que es conjugada de $u(x, y)$. De este modo se obtendrá una función analítica $f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$, para la cual $f_1(s)$ constituye el valor de contorno de la parte real. Si ahora se toma el valor límite de la parte imaginaria $v(x, y)$, en el caso general no coincidirá con la función dada $f_2(s)$, y, por tanto, la función compleja dada $f(t)$ no será valor límite de la función analítica en el dominio Ω_+. Según indican los razonamientos, sólo los valores de una componente, sea la real o la imaginaria, pueden darse de manera arbitraria; la segunda componente se determinará, en este caso, salvo un sumando constante. Así pues, la función compleja dada será el valor límite de una función analítica sólo si se satisfacen ciertas correlaciones. Se considerará en este apartado que $f(t)$ satisface la condicón de Hölder. Se examinará la transformada de Cauchy para funciones analíticas

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \tag{44}$$

Si $z \in \Omega_+$ y $f(t)$ es el valor de contorno de una función analítica en Ω_+, se cumplirá

$$F^{+}(z) = f(z)$$

Haciendosé uso de las fórmulas de Plemelj-Sojotski, se obtiene

$$\frac{1}{2}f(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - t}d\zeta = f(t)$$

De aquí que

$$-\frac{1}{2}f(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = 0 \tag{45}$$

Con estos razonamientos se establece la necesidad de la condición (45) para que la función $f(t)$ sea el valor de contorno de una función analítica en el dominio Ω_{+}. La condición es también suficiente supóngase, por ejemplo, que $f(t)$ satisface la condición (45). De acuerdo con las fórmulas de Plemelj- Sojotski, esto implica que $F^{-}(z) = 0$. Pero en este caso, de la fórmula (17), se tiene

$$f(t) = F^{+}(z) - F^{-}(z) = F^{+}(z)$$

por tanto, para que la transformada de Cauchy usual resuelva el problema de Dirichlet es necesario y suficiente que se cumpla la condición (45).

Hasta aquí se ha desarrollado el problema de Dirichlet para las funciones analíticas que pertenecen a la clase de Hölder. ¿Se podrá realizar un procedimiento similar para el caso donde las funciones son polianalíticas sobre la clase de Lipschitz de exponente arbitrario?

2.2.2. Problema de Dirichlet para funciones polianlíticas sobre la clase de Lipschitz

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, donde $f \in Lip(\alpha, \Gamma)$, $k < \alpha \leq k+1$. ¿Existirá una función $F(z)$ polianalítica en Ω_{+} y tal que satisfaga la condición de frontera siguiente:

$$F|_{\Gamma} = f(t)? \tag{46}$$

Se examinará la transformada de Cauchy polianalítica

$$(C_\Gamma^n f)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + \sum_{\mu=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(\overline{z-\zeta})^\mu}{\mu!(\zeta - z)} f_{\mu-1}^*(\zeta)d\zeta \tag{47}$$

Una condición suficiente para que la transformada de Cauchy polianalítica sea solución de (46) es que $F^- = 0$, ya que del problema del salto se tiene que

$$F^+(z) - F^-(z) = f(z)$$

Una condición necesaria para que la transformada de Cauchy sea solución de (46) se obtiene al calcular los valores límites de la transformada de Cauchy cuando $z \in \Omega_+$

$$\begin{aligned}(C_\Gamma^n f)^+(t) &= \lim_{z\to t^+}\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + \sum_{\mu=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(\overline{z-\zeta})^\mu}{\mu!(\zeta - z)} f_{\mu-1}^*(\zeta)d\zeta\right]\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - t}d\zeta + \frac{1}{2}f(t) + \sum_{\mu=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(\overline{t-\zeta})^\mu}{\mu!(\zeta - t)} f_{\mu-1}^*(\zeta)d\zeta\end{aligned}$$

Si se sustituye en $(C_\Gamma^n f)^+(z) = f(t)$ el valor límite calculado se tiene

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - t}d\zeta + \frac{1}{2}f(t) + \sum_{\mu=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(\overline{t-\zeta})^\mu}{\mu!(\zeta - t)} f_{\mu-1}^*(\zeta)d\zeta = f(t) \tag{48}$$

$$\Rightarrow \sum_{\mu=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(\overline{t-\zeta})^\mu}{\mu!(\zeta - t)} f_{\mu-1}^*(\zeta)d\zeta = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - t}d\zeta + \frac{1}{2}f(t) \tag{49}$$

Con estos razonamientos se establece la necesidad de la condición (49) para que la función $f(t)$ sea valor de contorno de una función polianalítica en el dominio Ω_+.

Teorema 2.5 *Supóngase que en el contorno cerrado y suave Γ está definida una función compleja $f(t)$ que pertenece a la clase de funciones de Lipschitz de exponente arbitrario. Para que esta función sea el valor de contorno de una función polianalítica en el dominio interior Ω_+, es necesario que se cumpla la condición (49).*

2.3. Conclusiones parciales

En este epígrafe se extendió la solución del problema del salto funciones analíticas a las funciones polianalíticas sobre la clase de Lipschitz de exponente arbitrario, además se enunció y demostró un teorema de existencia para el problema del salto. También se enunció una condición necesaria y una condición suficiente para que una función sea el valor de contorno de una función polianalítica en el domonio interior Ω_+.

Conclusiones

En este trabajo se logró obtener nuevos resultados científicos dentro del Análisis Complejo, los cuales se resumen en:

1. Se define una nueva transformada de Cauchy para funciones polianalíticas sobre la clase de Lipschitz con exponente arbitrario.
2. Se calculan los valores límites de la transformada de Cauchy polianlítica.
3. Se extienden las fórmulas de Plemelj-Sojostki.
4. Se demuestra que la transformada de Cauchy polianalítica es solución del problema de salto para las funciones polianalíticas y se analiza la unicidad de esta solución.
5. Se soluciona el problema de Dirichlet para funciones polianalíticas.

Recomendaciones

Se recomienda para investigaciones futuras:

1. Determinar las condiciones necesarias y suficientes que legitimen la unicidad de la solución del problema del salto para funciones polianalíticas.

2. Extender la solución del problema homogéneo y no homogéneo de Riemann a la teoría de las funciones polianalítica.

3. Dar solución al problema generalizado de Dirichlet para funciones polianalíticas.

Bibliografía

[1] F.D.Gájov, Problemas de Contorno de Riemann, Mir, Moscú, 1980.

[2] L. D. Abreu, H. G.Feichtinger, Funtion space of polyanalytic funtions, Pre-Publicações do Departamento de Matemática, Universidad de Caimbra.

[3] E. M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of funtions, Princeton University Press Princeton, New Jersy,, 1970.

[4] H. Begehr, Integral representations in complex, hypercomplex and clifford analysis, Taylor and Francis Group.

[5] R. Panzone, Guía de estudio para curso de variable compleja y funciones especiales, in: B. B. A. Universidad Nacional del Sur (Ed.), Notas de Álgebra y Análisis, Vol. 1, INMABB-CONICET, 1991.

[6] A.I.Markushevich, Theory of functions of a Complex Variable, Prentice-Hall, INC, 1965.

[7] M.B.Blak, M.F.Suev, On polyanalytic functions, Russ. Math. Surv. 25 201, (1970) 202Http://iopscience.iop.org/0036-0279/25/5/R08),26/02/2014 at 16:53.