UNIVERSIDAD DE HOLGUÍN "OSCAR LUCERO MOYA"
FACULTAD DE INFORMÁTICA Y MATEMÁTICA

Extensión de funciones analíticas en dominios múltiplemente conexos

Tesis en Opción al Título de Licenciado en Matemática

Luis Manuel Avila Nápoles

Holguín, 2015

UNIVERSIDAD DE HOLGUÍN
OSCAR LUCERO MOYA

UNIVERSIDAD DE HOLGUÍN "OSCAR LUCERO MOYA"
FACULTAD DE INFORMÁTICA Y MATEMÁTICA

Extensión de funciones analíticas en dominios múltiplemente conexos

Tesis en Opción al Título de Licenciado en Matemática

Autor: Luis Manuel Avila Nápoles

Tutor: Dr. Cs. Ricardo Abreu Blaya

Holguín, 2015

Dedicado a...

Mis queridos padres y a todas las personas que de algún modo han contribuido a mi formación.

AGRADECIMIENTOS

A mi tutor Dr.Cs. Ricardo Abreu Blaya.

A mis padres Xiomara Victoria Nápoles Gutierrez y Manuel Avila Pérez.

A Camilo Mora Batista y familia.

RESUMEN

Hasta el momento han sido estudias las condiciones que debe cumplir una función para ser valor de contorno de una función analítica en un dominio simplemente conexo. Para ello se estudian fundamentalmente la fórmula integral Cauchy, la integral de tipo de Cauchy, la condición de Hölder y las fórmulas de Plemelj-Sojotski. Surge entonces el problema científico, encontrar las condiciones que debe cumplir una función definida en el contorno de un dominio múltiplemente conexo para prolongarla analíticamente hacia el interior de este. Para ello se trabajan todos los temas anteriores en regiones múltiplemente conexas con especial énfasis en las fórmulas de Plemelj-Sojotski para las cuales se propone una demostración.

ABSTRACT

The condition, which must satisfy a function in order to be the boundary value of an analytic funcion in a simply connected domain have been established before in the classical literature. In connection with this problem, the Cauchy integral formula and the Cauchy type integral play an essential role. The main aim of the present work is to study the above problem in the more general case of considering multiply connected domain. To this end the above mentioned tools are worked out in multiply connected regions making a special emphasis on the Plemelj-Sojotski formula, which is proved as a part of the thesis.

Índice de contenidos

Introducción

La teoría de problemas de contorno de las funciones analíticas se utiliza fructuosamente en la resolución de problemas de otras disciplinas matemáticas, como en la teoría de aproximaciones de funciones y en la teoría de colas. El aparato matemático empleado en esta hace amplio uso de la teoría de funciones algebraicas y automorfas, de las superficies de Riemann, de las funciones enteras y meromorfas, del Análisis Funcional, de la Topología y del Análisis Complejo.

En los problemas de contorno la extensión de funciones analíticas representa una herramienta fundamental en la resolución de problemas de diversos tipos, pues permite una vez sabiendo el comportamiento de una función en cierto dominio extenderla hacia otros siguiendo los procedimientos adecuados según sea el caso. Riemann usó la prolongación analítica para extender su función zeta a todo el plano complejo y plantear así su famosa hipótesis que sigue sin ser demostrada aún[1].

Un problema de prolongación analítica es extender una función compleja, dada en un contorno cerrado y suave, a un dominio simplemente conexo contenido en este. Para resolver el mismo se utilizan herramientas como las fórmulas de Plemelj-Sojotski y la integral de tipo Cauchy. Surge la **problemática**: ¿Cómo variaría este problema si el dominio fuera múltiplemente conexo? Por lo que el **problema científico** es: ¿Qué condiciones debe cumplir una función analítica definida en la frontera de un dominio múltiplemente conexo para que esta pueda ser extendida analíticamente al interior del mismo?

El **objeto de investigación** es: la extensión de funciones analíticas.

El **campo de acción** es: los problemas de contorno.

Para dar respuesta al problema se propone como **objetivo de la investigación**: Desarrollar las condiciones que debe cumplir una función de variable compleja definida en la frontera de un dominio múltiplemente conexo para que esta pueda ser extendida analíticamente al interior del mismo.

Para dirigir la investigación se plantearon las **preguntas científicas**:

- ¿Qué es la extensión analítica de funciones de variable compleja?
- ¿Qué plantean las condición de Hölder?
- ¿Cuáles son las propiedades que debe cumplir una función compleja definida en un contorno, que permitan extenderla analíticamente hacia el dominio simplemente conexo interior a este?
- ¿Cómo se comporta la integral de tipo Cauchy en un dominio múltiplemente conexo?
- ¿Cómo se expresan las fórmulas de Plemelj-Sojotski en un dominio múltiplemente conexo?
- ¿Cuáles son las condiciones que garantizan la extensión analítica de funciones definidas en la frontera, hacia el interior de dominios múltiplemente conexos?

Para darle respuesta a las preguntas científicas se plantearon las **tareas de investigación**:

1. Realizar una revisión bibliográfica acerca de la extensión analítica de funciones de variable compleja
2. Seleccionar y estudiar las herramientas y los métodos matemáticos más adecuados para el desarrollo de la investigación
3. Analizar el caso del contorno cerrado y suave, sin puntos singulares
4. Determinar comó se comporta la integral de tipo Cauchy en regiones múltiplemente conexas
5. Desarrollar las fórmulas de Plemelj-Sojotski para regiones múltiplemente conexas

6. Encontrar las condiciones que garantizan que una función compleja sea el valor de frontera de una función analítica en el dominio múltiplemente conexo interior

En el transcurso de la investigación se emplearon los **métodos teóricos**:

Histórico-Lógico: Es utilizado en el trabajo para desarrollar la teoría de extensión analítica hasta darle respuesta al problema.

Demostración: Se emplea para darle legitimidad a las fórmulas de Sojotski en regiones múltiplemente conexas y a las condiciones de extensión analítica.

El presente documento se estructura en introducción, dos capítulos con sus respectivas conclusiones parciales, conclusiones generales, recomendaciones y referencias bibliográficas. Los capítulos se describen de la siguiente manera:

Capítulo I. Trata sobre la teoría necesaria para el desarrollo de la investigación: extensión de funciones analíticas, los dominios múltiplemente conexos, la integral de tipo Cauchy, las funciones que satisfacen la condición de Hölder, las fórmulas de Plemelj-Sojotski y las condiciones para que una función sea el valor de contorno de una función analítica.

Capítulo II. Describe la integral de Cauchy para regiones múltiplemente conexas. Se demuestra que las fórmulas de Plemelj-Sojotski funcionan para regiones múltiplemente conexas. El problema planteado se soluciona encontrando las condiciones que permiten la extensión de una función analítica a dominios multiplemente conexos.

Capítulo I. Extensión analítica en dominios simplemente conexos

1

Capítulo I. Extensión analítica en dominios simplemente conexos

Este primer capítulo trata sobre la extensión de funciones analíticas definidas en un contorno suave y cerrado L hacia el interior del dominio simplemente conexo D^+ contenido en el contorno L. Aquí se expondrán los principales conceptos y herramientas teóricas, funciones que pertenecen a la clase de Hölder, integral de Cauchy y Fórmulas de Plemelj-Sojotski con lo cual se encontrarán las condiciones de extensión analítica.

Definición 1.1 (Curva en $\mathbb{C}$) *Una curva Γ en $\mathbb{C}$ es una función $\Gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ continua, donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$.*

Definición 1.2 (Contorno suave) *Por contorno suave se comprende, aquí en lo sucesivo, una línea simple (es decir, sin puntos múltiples) cerrada o abierta, cuya tangente cambia continuamente; además, ésta línea no tiene puntos de retroceso [2].*

Definición 1.3 (Región(Dominio) simplemente conexo y múltiplemente conexo) *Una región D^+ se llama simplemente conexa si cualquier curva simple cerrada Γ contenida en D^+ se puede contraer a un punto sin salirse de D^+. Una región D^+ que no es simplemente conexa se llama* **múltiplemente conexa***.[3]*

Nota 1.1 *Desde ahora se entenderá que la curva estará recorrida en sentido positivo si se recorre en el sentido contrario a las manecillas del reloj.*

Por ejemplo, supóngase que D^+ es la región definida por $|z| < 2$ que se muestra en la Figura 1. Si Γ es cualquier curva simple cerrada contenida en D^+, o sea, cuyos puntos están en D^+, *se observa que ella se puede deformar en un punto de D^+, sin salirse de D^+, de modo que es simplemente conexa. Por otra parte si D^+ es la región definida por $1 < |z| < 2$ que se muestra sombreada en la Figura 2, entonces existe una curva simple cerrada Γ en D^+ la cual no se puede deformar en un punto sin salirse de D^+, de modo que D^+ es múltiplemente conexa.*

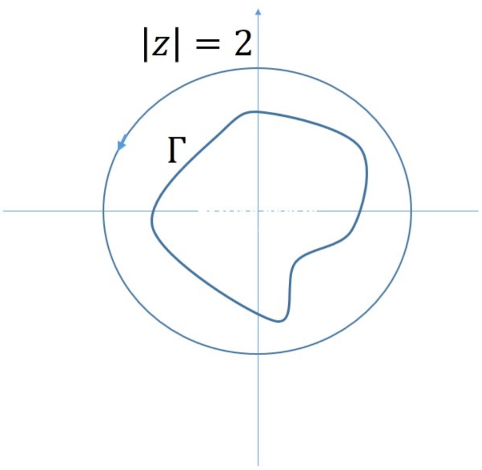

Figura 1:

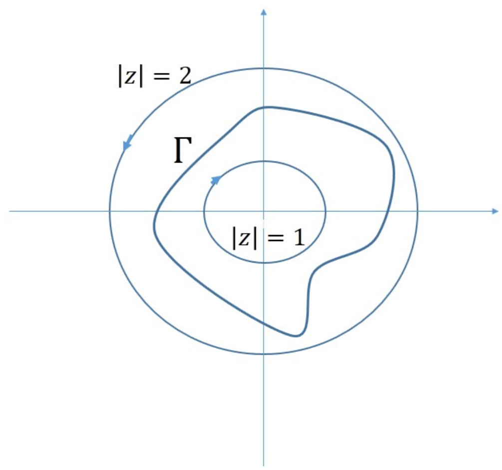

Figura 2:

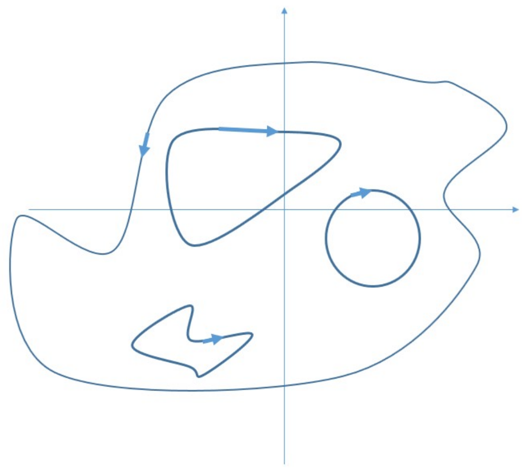

Figura 3:

Intuitivamente, una región simplemente conexa es una que no tiene huecos, mientras que una región múltiplemente conexa es una que sí los tiene. Las regiones múltiplemente conexas de las figuras 2 y 3 tienen uno y tres huecos respectivamente [4].

Definición 1.4 (Función analítica) *Una función compleja* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *se dice analítica en la región* D *si está definida en ésta; tiene derivada en cada punto de* D *y además satisface las condiciones de Cauchy-Riemann [5]:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2}$$

1.1. Prolongación Analítica

Sea $\Phi_1(z)$ una función analítica en la región D_1(Figura 4). Supóngase que se puede hallar una función $\Phi_2(z)$ que es analítica en D_2, que cumple en la región común a D_1 y D_2(Figura

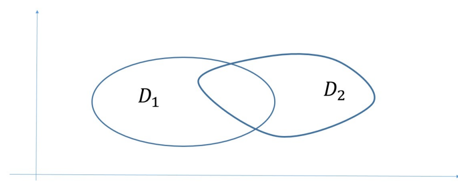

Figura 4:

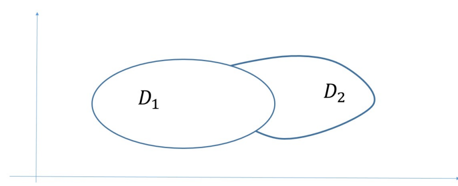

Figura 5:

4), $\Phi_1(z) = \Phi_2(z)$. Entonces se dice que $\Phi_2(z)$ es una prolongación analítica de $\Phi_1(z)$. Esto significa que existe una función $\Phi(z)$ analítica en la unión de las regiones D_1 y D_2 tal que $\Phi(z) = \Phi_1(z)$ en D_1 y $\Phi(z) = \Phi_2(z)$ en D_2. Realmente para esto basta que D_1 y D_2 tengan en común solamente un pequeño arco, tal como en la Figura 5.

Por prolongación analítica a regiones $D_3, D_4, ..., D_n$ se puede extender la región original de definición a otras partes del plano complejo. Las funciones $\Phi_1(z), \Phi_2(z), \Phi_3(z), ..., \Phi_n(z)$, definidas en $D_1, D_2, D_3, ..., D_n$ respectivamente, son algunas veces llamadas elementos de función. Algunas veces resulta imposible extender una función analítica fuera de la frontera de una región. Entonces la frontera se llama frontera natural.

1.2. Fórmula Integral de Cauchy, Integral de Tipo de Cauchy

Sea L un contorno suave en el plano de la variable z. Un dominio dispuesto dentro del contorno L, lo llamamos interior y designaremos D^+, y un dominio complementario a $D^+ \cup L$, en el que esta contenido el punto infinitamente alejado, lo llamaremos dominio exterior y lo denotaremos con D^-.

Si $f(z)$ es una función analítica en D^+ y continua en $D^+ \cup L$, entonces, de acuerdo con la fórmula de Cauchy de la teoría de funciones de la variable compleja, se tiene

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z}d\tau = \begin{cases} f(z) & , z \in D^+, \\ 0 & , z \in D^- \end{cases} \tag{3}$$

Si, en cambio, $f(z)$ es analítica en el dominio D^- y continua en $D^- + L$, se tiene

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z}d\tau = \begin{cases} f(\infty) & , z \in D^+, \\ -f(z) + f(\infty) & , z \in D^- \end{cases} \tag{4}$$

La **fórmula integral de Cauchy** presta la oportunidad de calcular los valores de la función en cualquier punto del dominio, siempre que se conozcan sus valores en la frontera de éste; en forma abreviada la fórmula de Cauchy resuelve el problema de contorno para funciones analíticas. La integral (3) se denomina integral de Cauchy. Ahora bien, sea L un contorno suave, cerrado o abierto, dispuesto íntegramente en la parte finita del plano; τ es una coordenada compleja de sus puntos y $\varphi(\tau)$, una función continua de los puntos del contorno. En este caso, la integral

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau \tag{5}$$

construida de modo igual que la integral de Cauchy, se llama **integral de tipo de Cauchy**. La función $\varphi(\tau)$ lleva el nombre de densidad de la integral, y $\dfrac{1}{\tau - z}$ el de núcleo.

Definición 1.5 *El límite de la integral*

$$\int\limits_{\Gamma - \rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \tag{6}$$

cuando $\rho \to 0$ lleva el nombre de valor principal de la integral singular.

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \tag{7}$$

1.3. Funciones que satisfacen la condición de Hölder

Sea L una curva suave y sea $\varphi(t)$ una función de los puntos de dicha curva. Suele decirse que la función $\varphi(t)$ satisface en la curva la condición de Hölder (*condición H*), si para cada 2 puntos cualesquiera de esta curva se verifica

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| < A\,|t_2 - t_1|^{\lambda} \tag{8}$$

donde A y λ son números positivos. A se denomina constante de Hölder, λ es el exponente de Hölder. Si λ fuera mayor que la unidad, de la condición (8) se deduciría que la derivada $\varphi'(t)$ es siempre nula, y la función $\varphi(t)$ sería idénticamente igual a una constante. Por ello, conviene considerar que

$$0 < \lambda \leq 1$$

Si $\lambda = 1$, la condición de Hölder coincide con la conocida condición de Lipschitz. [1]

Lema fundamental 1.1 *Si la densidad $\varphi(t)$ satisface la condición de Hölder y el punto t no coincide con los extremos del contorno suave L, la función*

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - z}d\tau \tag{9}$$

se porta, al pasar por el punto $z = t$ del contorno, como una función continua, es decir, tiene un valor límite determinado, cuando z se aproxima a t desde cualquier lado del contorno y por una vía cualquiera([6]):

$$\lim_{z\to t}\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - z}d\tau = \psi(t) \tag{10}$$

1.4. Fórmulas de Plemelj-Sojotski

Se considera el problema fundamental sobre la existencia de valores límites de la integral de tipo Cauchy en el contorno de integración y, además, su relación con una integral singular

[1] En muchos manuales la condición de Hölder se le llama condición de Lipschitz de orden λ

Sea

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau$$

donde $\varphi(\tau)$ satisface la condición de Hölder. Es conveniente considerar el contorno L cerrado y suave. En el caso que el contorno resulte ser abierto, se completará con alguna curva hasta que sea cerrado, haciendo en esta curva complementaria $\varphi(\tau) = 0$. Con el objeto de explorar los valores límites de $\Phi(z)$ en cierto punto t del contorno,se tomará la función(7) del lema (1.1).

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - z}d\tau$$

Se designará con $\Phi^+(t)$, $\psi^+(t)$ los valores límites de las funciones analíticas $\Phi(z)$, $\psi(z)$, cuando el punto z va aproximándose desde el interior de L al punto t del contorno, y con $\Phi^-(t)$, $\psi^-(t)$, cuando dicha aproximación se efectúa desde afuera. Para un contorno abierto esto corresponde a los valores límites a la izquierda y a la derecha. Para subrayar el sentido en que se esta pasando al límite, se denotará, $z \to t^+$ o $z \to t^-$ respectivamente. Los valores de las funciones correspondientes en el punto t del contorno, se designarán simplemente $\Phi(t)$, $\psi(t)$, con la particularidad de que $\Phi(t)$ significará una integral singular $\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau$, entendida en sentido del valor principal.

En [6] se demuestran las igualdades:

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau - z} = \begin{cases} 2\pi i & z \in D^+, \\ 0 & z \in D^-, \\ \pi i & z \in L, \end{cases} \tag{11}$$

se tendrá

$$\psi^+(t) = \lim_{z\to t^+}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau - z}\right] = \Phi^+(t) - \varphi(t) \tag{12}$$

$$\psi^-(t) = \lim_{z\to t^-}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau - z}\right] = \Phi^-(t) \tag{13}$$

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau - t} = \Phi(t) - \frac{1}{2}\varphi(t) \tag{14}$$

según el lema fundamental, la función $\psi(t)$ es continua, los segundos miembros de las igualdades escritas son coincidentes, es decir

$$\Phi^+(t) - \varphi(t) = \Phi^-(t) = \Phi(t) - \frac{1}{2}\varphi(t) \tag{15}$$

en definitiva se obtiene

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau \tag{16}$$

$$\Phi^-(t) = -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau \tag{17}$$

con la particularidad de que la integral singular $\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau$ se entiende en sentido del valor principal. Las expresiones (16) y (17) se conocen como fórmulas de Plemelj-Sojotski [2]([6],[7]).

Al sumar y restar las fórmulas (16) y (17), se obtienen las siguientes formulas equivalentes:

$$\mathit{\Phi}^+(t) - \mathit{\Phi}^+(t) = \varphi(t) \tag{18}$$

$$\mathit{\Phi}^+(t) + \mathit{\Phi}^+(t) = \frac{1}{pii}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau \tag{19}$$

1.5. Condición para que una función compleja arbitraria sea el valor de contorno de una función analítica en dominios simplemente conexos

Sea dada en el contorno cerrado y suave L una función compleja continua $\varphi(t)$ de los puntos del contorno y sea $t = t(s) = t_1(s) + it_2(s)$ la ecuación del contorno en forma compleja, donde $t(s)$ es una función del arco s que se mide a partir de algún punto del contorno.

[2]Yu. V. Sojotski un matemático Ruso. .

Sustituyendo en la expresión para la función $\varphi(t)$ la coordenada compleja, se separan las partes real e imaginaria:

$$\varphi(t) = \varphi[t(s)] = \varphi_1(s) + i\varphi_2(s)$$

Es fácil mostrar que a la pregunta de si existe en el dominio $D^+(D^-)$ tal función analítica para la cual la función compleja prefijada $\varphi(t)$ sea su valor límite en el contorno, se debe dar, en el caso general, una respuesta negativa. En efecto, según los valores de la parte real $\varphi_1(s)$ puede construirse una función $u(x, y)$ armónica en el dominio $D^+(D^-)$, cuyos valores límites en el contorno coinciden con la función dada $\varphi_1(s)$ (problema de Dirichlet). Según la función podemos determinar, salvo un sumando constante arbitrario, una función armónica $v(x, y)$ que es conjugada a $u(x, y)$. De este modo se obtiene una función analítica $f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$, para la que $\varphi_1(s)$ constituye el valor del contorno de la parte real. Si, ahora, se toma el valor de la parte imaginaria $v(x, y)$, éste, en el caso general, no coincidirá con la función dada $\varphi_2(s)$ y por lo tanto la función compleja dada $\varphi(t)$ no será valor límite de la función analítica en el dominio $D^+(D^-)$. Según indican los razonamientos, solo los valores de una componente, sea real o imaginario, pueden darse de una manera arbitraria; la segunda componente se determinará, en este caso, salvo el sumando constante. Así pues, la función compleja dada será el valor límite de una función analítica solo satisfaciendo ciertas correlaciones. Pasemos a la deducción de estas correlaciones. Se examina la integral de tipo Cauchy de densidad $\varphi(\tau)$

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau$$

si $z\epsilon D^+$ y $\varphi(t)$ es el valor de contorno de una función analítica en D^+, se tiene

$$\mathit{\Phi}^+(z) = \varphi(z)$$

si $z\epsilon D^-$ y $\varphi(t)$ es el valor del contorno de una función analítica en D^-, entonces, de acuerdo con la fórmula de Cauchy para un dominio infinito:

$$\mathit{\Phi}^-(z) = -\varphi(z) + \varphi(\infty).$$

Pasando a los valores límites en el contorno L y haciendo uso de las fórmulas de Plemelj-Sojotski se obtiene

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{\tau - t}dt$$

si $\varphi(t)$ es analítica en D^+ y

$$-\varphi(t) + \varphi(\infty) = -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{\tau - t}dt$$

si $\varphi(t)$ es analítica en D^-. De aquí

$$-\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{\tau - t}dt = 0 \tag{20}$$

$$\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{\tau - t}dt - \Delta = 0 \quad (\Delta = \varphi(\infty)) \tag{21}$$

Con estos razonamientos se establece la necesidad de las condiciones (20) y (21) para que la función $\varphi(t)$ sea el valor de contorno de una función analítica en los dominios D^+ y D^- respectivamente. No es difícil señalar que estas condiciones son también suficientes. Efectivamente, supóngase, por ejemplo, que $\varphi(t)$ satisface la condición (20). Para una integral de tipo Cauchy

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{\tau - t}dt$$

esto implica de acuerdo con las fórmulas de Plemelj-Sojotski que $\Phi^-(t) = 0$. Pero en este caso, de la fórmula (18) se tiene $\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \Phi^+(t)$.

Este resultado se enunciará a continuación.

Teorema 1.1 *Supóngase que en el contorno cerrado y suave L está definida una función compleja $\varphi(t)$ que satisface la condición de Hölder. Para que esta función sea el valor de contorno de una función analítica en el dominio interior D^+, es necesario y suficiente que se* *cumpla la condición (20); para que $\varphi(t)$ sea el valor de contorno de una función analítica en el dominio exterior D^- que en el infinito se reduce a un número prefijado Δ, es necesario y suficiente que se cumpla la condición (21).*

1.6. Conclusiones del Capítulo I

Se desarrolló la teoría que servirá como base al Capítulo II, de forma constructiva y rigurosa, que permitirá utilizar métodos similares de demostración en la posible propuesta de solución. Las herramientas que se consideran fundamentales para el trabajo posterior son:

- Las fórmulas Plemelj-Sojotski
- La integral de tipo de Cauchy
- La condición de Hölder
- La estructura de demostración del problema para dominios simplemente conexos

Las propiedades que debe cumplir una función de variable compleja definida en un contorno, que permitan extenderla analíticamente hacia el dominio simplemente conexo interior a este son:

- Pertenecer a la clase de Hölder
- $-\dfrac{1}{2}\varphi(t) + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{\varphi(t)}{\tau - t}dt = 0$ o equivalentemente $\Phi^-(t) = 0$

De forma colateral también se mostró para el caso de que se quiera extender hacia el dominio exterior D^-. Las propiedades que debe cumplir la función son:

- Pertenecer a la clase de Hölder
- $\dfrac{1}{2}\varphi(t) + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{\varphi(t)}{\tau - t}dt - \Delta = 0 \quad (\Delta = \varphi(\infty))$. Si $\Delta = \varphi(\infty) = 0$ esta expresión equivale a $\Phi^+(t) = 0$

Capítulo II. Extensión analítica en dominios múltiplemente conexos

2

Capítulo II. Extensión analítica en dominios múltiplemente conexos

El problema de saber si una función compleja dada, será el valor límite de una función analítica, para un contorno cerrado y suave se resolvió en el Capítulo I(véase [6]). Ahora, si la región tiene huecos, hay que considerar que la función límite esté definida en el contorno de estos huecos y en estos cumpla la condición de Hölder. Además hay que analizar la fórmula integral de Cauchy, la integral de tipo Cauchy y las fórmulas de Plemelj-Sojotski para el caso de regiones múltiplemente conexas.

2.1. Fórmula integral de Cauchy para dominios múltiplemente conexos

Sea $L = L_0 \cup L_1 \cup L_2 \cup ... \cup L_m$ un contorno de $m+1$ contornos disjuntos, con la particularidad de que el contorno L_0 contiene en su interior todos los demás contornos. Se nombrará D^+ al dominio múltiplemente conexo dispuesto en el interior del contorno L_0 y fuera de los contornos $L_1, L_2, ..., L_m$ y $D^- = D_0^- \cup D_1^- \cup D_2^- \cup ... \cup D_n^-$ donde D_i^- es el exterior de L_i, con $i = 0, 1, ..., m$.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau - ... - \frac{1}{2\pi i}\int_{L_m} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau \tag{22}$$

Si $z \in D^+$ y $\varphi(z)$ analítica en D^+.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau = \begin{cases} \varphi(z) & , z \in D^+, \\ 0 & , z \in D^- \end{cases} \tag{23}$$

Si $z \in D^-$ y $\varphi(z)$ analítica en D^-

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau = \begin{cases} \varphi(\infty) & , z \in D^+, \\ -\varphi(z) + \varphi(\infty) & , z \in D^- \end{cases} \tag{24}$$

2.2. Integral de tipo de Cauchy en un contorno complejo

Hasta ahora se suponía que la integral de tipo de Cauchy se resuelve en el contorno compuesto por una curva simple, sea cerrada o abierta. No obstante, nada impide que todos los resultados obtenidos se extiendan a un caso en que el contorno de integración consta de un número finito de curvas, separadas por completo o bien con ciertos puntos de intersección. Sin perder generalidad, se pueden suponer simples todas las curvas, puesto que, si una cierta curva resultara tener puntos múltiples, se puede partir en unos tramos separados sin puntos múltiples y tomar estos tramos por curvas independientes.

Así pues, sea dada la integral de tipo de Cauchy (5)

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau$$

que se resuelve en el contorno L compuesto de un número finito de curvas simples L_k:

$$L = L_1 \cup L_2 \cup ... \cup L_m \tag{25}$$

Las curvas L_k pueden ser tanto cerradas como abiertas. Es evidente que $\Phi(z)$ puede representarse como la suma

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau + ... + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_m} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau. \tag{26}$$

Cada uno de los términos de esta suma es la integral de tipo de Cauchy en una curva simple y, por consiguiente, son aplicables a él las deducciones de toda la teoría precedente. De aquí se infiere inmediatamente el teorema siguiente.

Teorema 2.2 *La integral de tipo Cauchy (5), calculada en el contorno complejo L, representa una función que es analítica en todo el plano de la variable compleja, a excepción de los puntos del contorno L, y que se reduce a cero en el infinito.*

En el caso de un dominio múltiplemente conexo $\Phi(z)$ puede expresarse como:

$$\Phi(z) = \int_{L_0} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau - \int_{L_1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau - ... - \int_{L_m} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau. \tag{27}$$

teniendo en cuenta que el contorno L_0 contiene en su interior a los demás contornos $L_1, L_2, ..., L_m$ y ahora $L = L_0 \cup L_1 \cup L_2 \cup ... \cup L_m$.

2.3. Desarrollo de las fórmulas de Plemelj-Sojotski para dominios múltiplemente conexos

Sea $L = L_0 \cup L_1 \cup ... \cup L_m$ un conjunto de $m + 1$ contornos disjuntos, con la particularidad de que el contorno L_0 contiene en su interior todos los demás contornos. Se llamará D^+ al dominio múltiplemente conexo dispuesto en el interior del contorno L_0 y fuera de los contornos $L_1, .., L_m$ y se designará con D^- el complemento de $D^+ \cup L$ hasta el plano completo. Para concretar se acepta disponer el origen de coordenadas en el dominio D^+. Por recorrido positivo del contorno L se tomará aquel que deja el dominio D^+ a la izquierda, es decir, el contorno L_0 se debe recorrer en sentido contra horario y los contornos $L_1, ..., L_m$ en sentido horario.

Sea

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau$$

Se supone que $\varphi(\tau)$ satisface la condición de Hölder, para proceder de la misma forma que en (1.4) cerrando el contorno utilizando las curvas complementarias $l_1, ..., l_m$, haciendo en estas curvas $\varphi(\tau) = 0$.

Por tanto queda el nuevo contorno $\Gamma = L \cup l_1 \cup ... \cup l_m \cup -l_1 \cup ... \cup -l_m$ ($-l_i$ significa recorrida en sentido contrario a l_i)

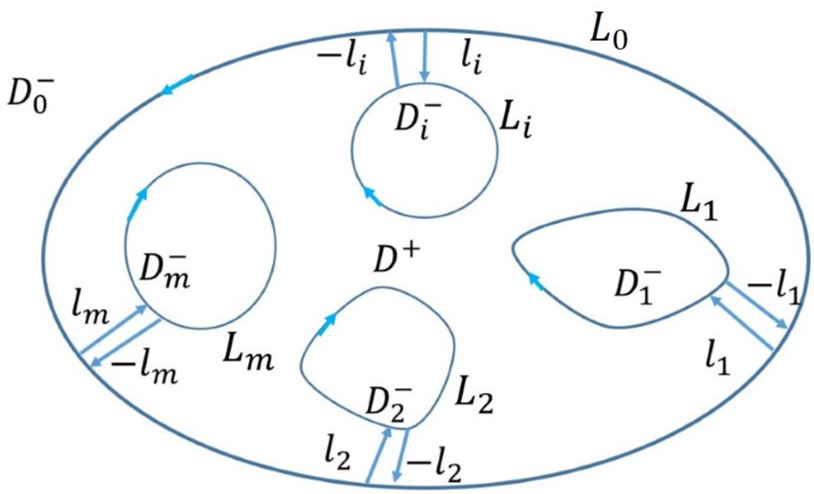

Figura 6: contorno múltiplemente conexo

La función:

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau - z}d\tau$$

satisface el Lema (1.1)

además:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau \tag{28}$$

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau - z}d\tau = \frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau - z}d\tau$$

Se analizará el límite de $\psi(z)$ cuando z tiende a t donde $z \in D^+$ y $t \in L_i$.

Si $t \in L_0$(Figura 7) :

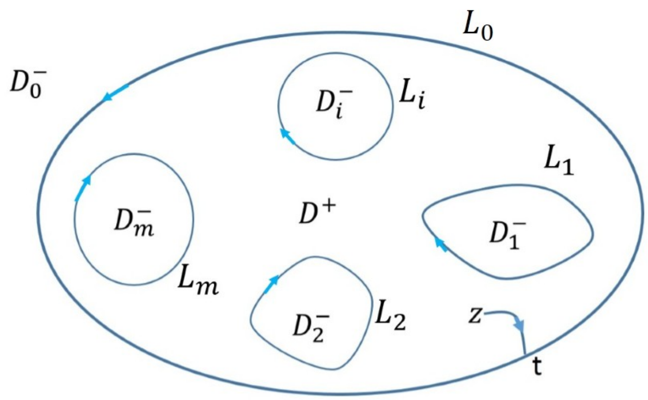

Figura 7:

$$\psi^+(t) = \lim_{\substack{z \to t^+ \\ t \in L_0}} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \int_L \frac{d\tau}{\tau - z} \right]$$

$$\psi^+(t) = \lim_{\substack{z \to t^+ \\ t \in L_0}} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{d\tau}{\tau - z} + ... + \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \int_{L_m} \frac{d\tau}{\tau - z} \right]$$

como $z \in D^+$ por (11)

$$\int_{L_0} \frac{d\tau}{\tau - z} = 2\pi i$$

y para $i = 1, ..., m$

$$\int_{L_i} \frac{d\tau}{\tau - z} = 0$$

se obtiene

$$\psi^+(t) = \Phi^+(t) - \varphi(t)$$

Ahora se verá el caso cuando $t \in L_i$(Figura 8) con $i = 1, ..., m$

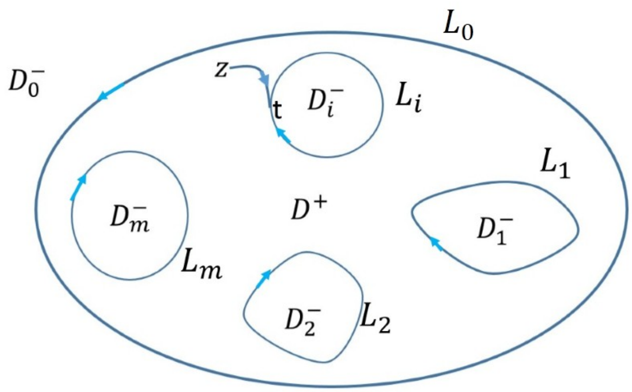

Figura 8:

$$\psi^+(t) = \lim_{\substack{z\to t^+ \\ t\in L_i}} [\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau - z}]$$

$$\psi^+(t) = \lim_{\substack{z\to t^+ \\ t\in L_i}} [\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i}\int_{L_0} \frac{d\tau}{\tau - z} + ... + \frac{\varphi(t)}{2\pi i}\int_{L_i} \frac{d\tau}{\tau - z} + ... + \frac{\varphi(t)}{2\pi i}\int_{L_m} \frac{d\tau}{\tau - z}]$$

como $z \in D^+$ por (11)

$$\int_{L_0} \frac{d\tau}{\tau - z} = 2\pi i$$

y para $i = 1, ..., m$

$$\int_{L_i} \frac{d\tau}{\tau - z} = 0$$

por lo que queda

$$\psi^+(t) = \Phi^+(t) - \varphi(t)$$

Por otro lado

$$\psi^-(t) = \lim_{\substack{z\to t^- \\ t\in L_0}} \left[\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau - z}\right]$$

$$\psi^{-}(t)=\lim_{\substack{z\to t^{-}\\ t\in L_0}}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau-\frac{\varphi(t)}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{d\tau}{\tau-z}+...+\frac{\varphi(t)}{2\pi i}\int_{L_i}\frac{d\tau}{\tau-z}+...+\frac{\varphi(t)}{2\pi i}\int_{L_m}\frac{d\tau}{\tau-z}\right]$$

Si $z\in D_0^{-}$ y $t\in L_0$, $i=0,1,...,m$ (Figura 9) :

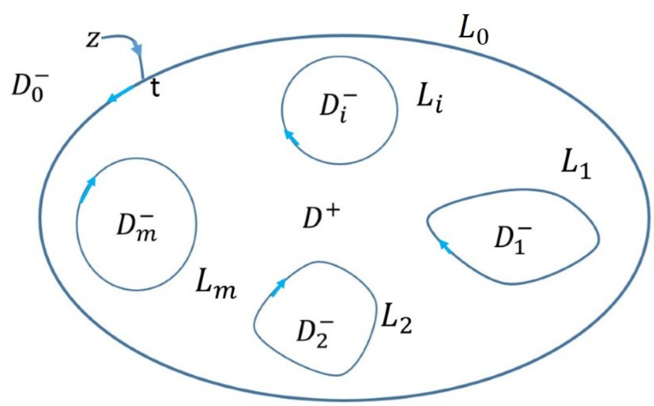

Figura 9:

$$\int_{L_i}\frac{d\tau}{\tau-z}=0$$

se obtiene

$$\psi^{-}(t)=\Phi^{-}(t)$$

por otro lado si $z\in D_i^{-}$ y $t\in L_i$ con $i=1,...,m$ (Figura 10):

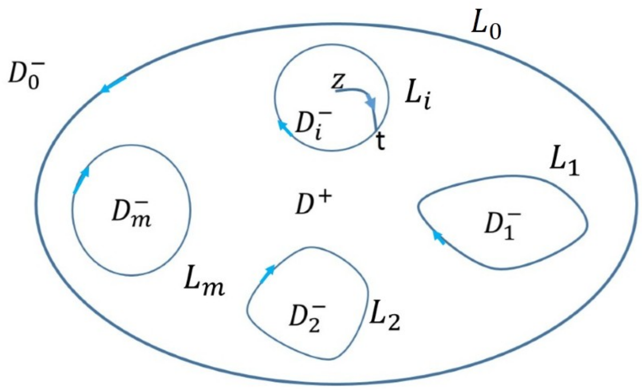

Figura 10:

$$\int_{L_i} \frac{d\tau}{\tau - z} = 2\pi i$$

$$\int_{L_0} \frac{d\tau}{\tau - z} = 2\pi i$$

y para $j \neq i$ con $j = 1, ..., m$

$$\int_{L_j} \frac{d\tau}{\tau - z} = 0$$

obteniéndose nuevamente

$$\psi^-(t) = \Phi^-(t)$$

Por último se analiza cuando $z = t \in L_i$:

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \int_L \frac{d\tau}{\tau - t}$$

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{d\tau}{\tau - t} + ... + \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \int_{L_i} \frac{d\tau}{\tau - t} + ... + \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \int_{L_m} \frac{d\tau}{\tau - t}$$

Si $t \in L_0$, por (11)

$$\int_{L_0} \frac{d\tau}{\tau - z} = \pi i$$

y para $i = 1, ..., m$

$$\int_{L_i} \frac{d\tau}{\tau - z} = 0$$

resulta

$$\psi(t) = \Phi(t) - \frac{\varphi(t)}{2}$$

Si $t \in L_i$ por (11)

$$\int_{L_0} \frac{d\tau}{\tau - z} = 2\pi i$$

y para $j = 1, ..., m$ con $j \neq i$

$$\int_{L_j} \frac{d\tau}{\tau - z} = 0$$

$$\int_{L_i} \frac{d\tau}{\tau - z} = \pi i$$

nuevamente se obtiene

$$\psi(t) = \Phi(t) - \frac{\varphi(t)}{2}$$

por (1.1)

$$\psi^+(t) = \psi(t) = \psi^-(t)$$

$$\Phi^+(t) - \varphi(t) = \Phi(t) - \frac{\varphi(t)}{2} = \Phi^-(t) \tag{29}$$

$$\Phi^+(t) = \frac{\varphi(t)}{2} + \Phi(t)$$

$$\Phi^+(t) = \frac{\varphi(t)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau - ... - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_m} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \tag{30}$$

$$\Phi^-(t) = -\frac{\varphi(t)}{2} + \Phi(t)$$

$$\Phi^-(t) = -\frac{\varphi(t)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau - ... - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_m} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \tag{31}$$

2.4. Condición para que una función compleja arbitraria sea el valor de contorno de la función analítica en dominios múltiplemente conexos

Se tomará en cuenta el mismo contorno con las mismas transformaciones de la sección anterior. Se examina la integral de tipo Cauchy de densidad $\varphi(t)$

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau$$

Como se cumple la igualdad (28)

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau$$

Si $z \in D^+$ y $\varphi(t)$ es el valor de contorno de una función analítica en D^+, se tiene

$$\Phi^+(z) = \varphi(z)$$

Pasando, ahora a los valores límites en el contorno L y haciendo uso de la fórmula (30) se obtiene:

$$\varphi(t) = \frac{\varphi(t)}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau - ... - \frac{1}{2\pi i}\int_{L_m} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau \tag{32}$$

$$0 = -\frac{\varphi(t)}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau - ... - \frac{1}{2\pi i}\int_{L_m} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau \tag{33}$$

Donde la fórmula (33) es la condición necesaria para que la función $\varphi(t)$ sea el valor de contorno de una función analítica en el dominio D^+ múltiplemente conexo.

Se puede demostrar que esta condición es también suficiente. En efecto supóngase que $\varphi(t)$ satisface la condición (33). Para la integral de tipo de Cauchy:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau$$

esto implica, de acuerdo con las nuevas fórmulas de Plemelj-Sojotski , que $\Phi^-(t) = 0$. Pero en este caso, de la fórmula (29) se tiene

$$\Phi^+(t) - \varphi(t) = \Phi^-(t) = 0$$

por tanto

$$\varphi(t) = \Phi^+(t)$$

Teorema 2.3 *Sea $L = L_0 + L_1 + ... + L_m$ un conjunto de $m+1$ contornos disjuntos, con la particularidad de que el contorno L_0 contiene en su interior todos los demás contornos, está definida una función compleja $\varphi(t)$ que satisface la condición de Hölder. Para que esta función sea el valor de contorno de una función analítica en el dominio interior D^+, el cual es el dominio $(m+1)$-mente conexo dispuesto en el interior del contorno L_0 y fuera de los contornos $L_1, ..., L_m$, es necesario y suficiente que se cumpla la condición (33).*

2.5. Ejemplos

2.5.1. Ejemplo 1

Sea $\Gamma = \{|z| = 1\} \cup \{|z| = 2\}$ donde $\Gamma_2 = \{|z| = 1\}$ y $\Gamma_1 = \{|z| = 2\}$ y sea $f(t) = \frac{1}{t}$ definida en Γ . Como se puede apreciar la función no puede ser extendida analíticamente hacia: $\{|z| < 2\}$. Sin embargo, puede ser extendida analíticamente en la región: $\{1 < |z| < 2\}$ lo que se demuestra usando la fórmula (33).

$$0 = -\frac{f(t)}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

$$0 = -\frac{1}{2t} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{1}{\tau(\tau - t)} d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{1}{\tau(\tau - t)} d\tau$$

usando la siguiente identidad

$$\frac{1}{\tau(\tau - t)} = \frac{1}{t}[\frac{1}{\tau - t} - \frac{1}{\tau}]$$

resulta

$$0 = -\frac{1}{2t} + \frac{1}{2\pi it}\int_{\Gamma_1} \frac{1}{\tau - t} d\tau - \frac{1}{2\pi it}\int_{\Gamma_1} \frac{1}{\tau} d\tau - \frac{1}{2\pi it}\int_{\Gamma_2} \frac{1}{(\tau - t)} d\tau + \frac{1}{2\pi it}\int_{\Gamma_2} \frac{1}{\tau} d\tau$$

$$0 = -\frac{1}{2t} + \frac{1}{2\pi it}\int_{\Gamma_1} \frac{1}{\tau - t} d\tau - \frac{1}{2\pi it}\int_{\Gamma_2} \frac{1}{(\tau - t)} d\tau$$

Si $t \in \Gamma_1$ por (11)

$$\int_{\Gamma_1} \frac{1}{\tau - t} d\tau = \pi i$$

y

$$\int_{\Gamma_2} \frac{1}{\tau - t} d\tau = 0$$

resulta

$$0 = -\frac{1}{2t} + \frac{1}{2t}$$

Si $t \in \Gamma_2$ por (11)

$$\int_{\Gamma_1} \frac{1}{\tau - t} d\tau = 2\pi i$$

y

$$\int_{\Gamma_2} \frac{1}{\tau - t} d\tau = \pi i \tag{34}$$

obteniéndose

$$0 = -\frac{1}{2t} + \frac{1}{t} - \frac{1}{2t} \tag{35}$$

2.5.2. Ejemplo 2

Sea $\Gamma = \{|z-a| = \alpha\} \cup \{|z-b| = \beta\}$ donde $\Gamma_2 = \{|z-a| = \alpha\}$ y $\Gamma_1 = \{|z-b| = \beta\}$ y la función $f(t) = \dfrac{1}{t-a}$ definida en Γ .Suponiendo que $\{|z-b| < \beta\} \supset \{|z-a| < \alpha\}$, $a, b \in \mathbb{C}$. La función no puede ser extendida analíticamente hacia: $\{|z-b| < \beta\}$. Sin embargo, puede ser extendida analíticamente a la región:

$$\{|z-b| < \beta\} \backslash \{|z-a| < \alpha\}$$

lo que se demuestra usando la fórmula (33).

$$0 = -\frac{f(t)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

$$0 = -\frac{1}{2(t+a)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{1}{(\tau+a)(\tau-t)} d\tau - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{1}{(\tau+a)(\tau-t)} d\tau$$

usando la identidad

$$\frac{1}{(\tau-a)(\tau-t)} = \frac{-1}{(t-a)(\tau-a)} + \frac{1}{(t-a)(\tau-t)}$$

$$0=-\frac{1}{2(t-a)}-\frac{1}{2\pi i(t-a)}\left\{\int_{\Gamma_1}\frac{1}{(\tau-a)}d\tau+\int_{\Gamma_1}\frac{1}{(\tau-t)}d\tau+\int_{\Gamma_2}\frac{1}{(\tau-a)}d\tau-\int_{\Gamma_2}\frac{1}{(\tau-t)}d\tau\right\}$$

como

$$-\frac{1}{2\pi i(t-a)}\int_{\Gamma_1}\frac{1}{(\tau-a)}d\tau+\frac{1}{2\pi i(t-a)}\int_{\Gamma_2}\frac{1}{(\tau-a)}d\tau=0$$

se obtiene

$$0=-\frac{1}{2(t-a)}+\frac{1}{2\pi i(t-a)}\int_{\Gamma_1}\frac{1}{(\tau-t)}d\tau-\frac{1}{2\pi i(t-a)}\int_{\Gamma_2}\frac{1}{(\tau-t)}d\tau$$

Si $t\in\Gamma_1$ por (11)

$$0=-\frac{1}{2(t-a)}+\frac{1}{2\pi i(t-a)}\pi i+0=0$$

Si $t\in\Gamma_2$ por (11)

$$0=-\frac{1}{2(t-a)}+\frac{1}{(t-a)}-\frac{1}{2(t-a)}=0$$

2.6. Conclusiones del Capítulo II

En este capítulo se extienden las fórmulas de Plemelj-Sojotski a dominios múltiplemente conexos. Como resultado principal se demuestra que las condiciones de prolongación analítica de una función compleja, definida en la frontera de una región múltiplemente conexa son:

- Pertenecer a la clase de Hölder.
- $0=-\dfrac{\varphi(t)}{2}+\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{L_0}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau-...-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_m}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau$

También se muestran ejemplos ilustrativos en los que se aplica la teoría desarrollada.

Conclusiones

Con esta investigación científica se ha probado que las condiciones para las cuales una función arbitraria es el valor de contorno de la función analítica en un dominio son las mismas en el caso de un dominio simplemente conexo como en el caso de un dominio múltiplemente conexo. Se extendieron las fórmulas de Plemelj-Sojotski, hasta ahora conocidas en dominios simplemente conexos, al caso más general de dominios múltiplemente conexos. Se profundizó en el uso de la fórmula integral Cauchy y en la la integral de tipo de Cauchy estudiándolas en ambas regiones. Se muestran ejemplos del uso de esta teoría.

Recomendaciones

Se proponen como futuras investigaciones:

- Encontrar ejemplos en los que aplicar la condicione demostrada sea más fácil que aplicar otras teorías
- Hallar las condiciones que debe cumplir una función para ser extendida analíticamente al interior de un disco con huecos, siendo estos huecos densos en el disco
- Extender la teoría desarrollada al Análisis Cuaterniónico
- Trabajar en dominios de contorno fractal

Bibliografía

[1] J. J. R. Herrera, La función de Moebius y un Análisis Probabilístico de la hipótesis de Riemann, Junio de 2011.

[2] Y. R. Leyva, Problemas de Contorno y de Drichelet para funciones polianalíticas en las clase de Lipshitz, 2014.

[3] M. R. Spiegel, Teoría y Problemas de Variable Compleja, Schaum Publishing Company.

[4] W. Kaplan, Cálculo Avanzado, Departamento de Matemática Universidad de Michigan, 1963.

[5] B. A. Fuchs, B. V. Shabat, Functions of a Complex Variable and some of their applications, 1979.

[6] F.D.Gájov, Problemas de Contorno, Mir. Moscú, 1980.

[7] A. Markushevich, Teoría de las Funciones Analíticas Tomo I, MIR Moscú, 1970.

[8] J. Aguirre, Curvas Fractales.

Apéndice

Se propone el problema:

El teorema de Cauchy-Goursat puede ser demostrado para el caso de un triángulo, luego para un polígono cerrado. ¿Se podrá demostrar para los contornos fractales de las figuras 13 y 14?

Esta pregunta surge porque el teorema se puede demostrar en cada iteración del proceso de construcción de los fractales mostrados, pues si se detiene este proceso en cualquier iteración, lo que se obtiene es un polígono cerrado.

Una vía para tratar el problema podría ser pensarlo como una sucesión de integrales en polígonos cerrados, como cada una de las integrales es igual a cero, si el límite existe, es igual a cero, la dificultad es que todo parece indicar que el límite no existe.

Sin embargo, se puede construir un triángulo de área finita y perímetro infinito. Como el teorema de Cauchy-Goursat se cumple en el contorno triangular, también se cumple en este triángulo. Quizás con esta idea se pueda demostrar para algunos fractales de área finita.

Ejemplos de fractales:

Considérese el triángulo equilátero ABC (Fig. 11) con lados de longitud uno. Dividiendo en tres partes cada lado, se construyen los triángulos equiláteros DEF, GHJ y KLM . Luego, omitiendo los lados DF, FG, GJ,JK, KM y MD, se obtiene la curva simple cerrada $ADEFBGHJCKLMA$ de la figura 12.

La curva de Koch

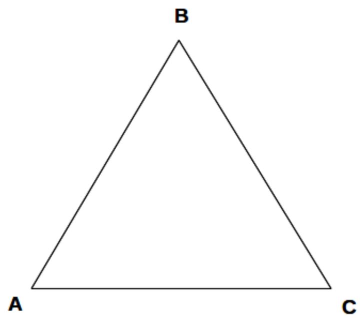

Figura 11: Triángulo ABC

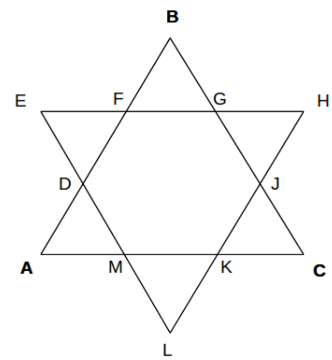

Figura 12: polígono

El proceso se puede continuar ahora dividiendo en tres partes los lados DE, EF, FB, BG, GH, etc... y construyendo triángulos equiláteros como antes. Repitiendo el proceso indefinidamente obtenemos una curva continua simple cerrada, que es la frontera con una región de área finita igual a

$$\frac{1}{4}\sqrt{3}+3\frac{1}{3^2}\frac{\sqrt{3}}{4}+9\frac{1}{9^2}\frac{\sqrt{3}}{4}+27\frac{1}{27^2}\frac{\sqrt{3}}{4}+....$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+...)=\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

o 1,5 veces el área del triángulo ABC, la que tiene longitud infinita .

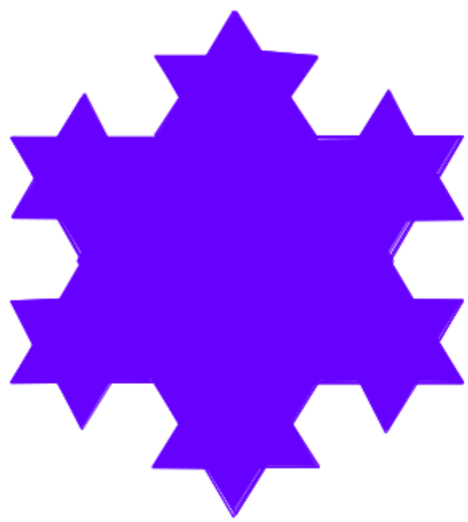

Figura 13: Fractal

La curva se construye comenzando con un segmento rectilíneo, que sin pérdida de generalidad se supondrá de longitud 1. En un primer paso, se divide en tres partes iguales y se sustituye la central por un triángulo equilátero sin la base. Se obtiene así una figura formada por cuatro segmentos de longitud $1/3$. En un segundo paso se repite el proceso anterior con cada uno de los cuatro segmentos, obteniéndose una figura con 16 segmentos de longitud $1/9$. Este proceso se itera, y en el límite se obtiene la curva de Koch.

En el n-ésimo paso se obtiene una curva formada por 4^n segmentos de longitud 3^{-n}, por lo que su longitud total es $(\frac{4}{3})^n$. Como $\frac{4}{3} > 1$, la curva de Koch tiene longitud infinita, es decir, no es rectificable. La curva de Koch es un objeto autosemejante: es la unión de cuatro copias de sí misma reducidas a un tercio de su tamaño de la original. Pegando tres copias de la curva de Koch se obtiene el copo de nieve Figura 14 [8].

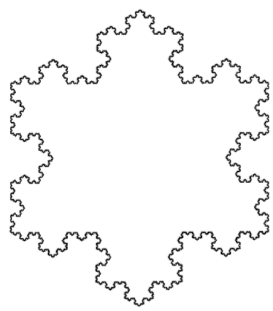

Figura 14: copo de nieve de Koch