UNIVERSIDAD DE HOLGUIN
OSCAR LUCERO MOYA

Facultad de Informática y Matemática

TRABAJO DE DIPLOMA

Teorema de Plemelj-Privalov en la teoría de funciones polianalíticas

Autora: Lianet De la Cruz Toranzo

Tutor: Dr.Cs. Ricardo Abreu Blaya

Holguín, Junio de 2014

Dedicatoria

A Richard, tutor y amigo. Por su confianza en mí, sus enseñanzas y su ayuda inmejorable.

Agradecimientos

Agradezco a:

– Dr.Cs. Ricardo Abreu Blaya, mi tutor.

– Mis padres Liana y Danilo. A Aldana, a mis hermanos y abuelos, a mis amistades y profesores, especialmente a la profesora Dra. Rosa Isabel Urquiza Salgado.

A todos ellos agradezco por su apoyo y constante preocupación por los avances en el trabajo.

Resumen

El Análisis Complejo es una rama del análisis matemático que investiga funciones de números complejos. Es usada en muchas ramas de las matemáticas, incluyendo geometría algebraica, teoría de los números, matemática aplicada; así como en física, incluyendo hidrodinámica, termodinámica, e ingienería eléctrica y mecánica. El presente trabajo es particularmente concerniente a las llamadas funciones polianalíticas, las cuales representan una generalización conveniente de las funciones analíticas. El principal objetivo del mismo es probar cómo la clase de Lipschitz con exponente arbitrario se mantiene invariante bajo la acción de un operador integral singular, el cual surge de forma natural en la teoría de funciones polianalíticas. El resultado obtenido puede ser visto como una generalización del conocido Teorema de Plemelj-Privalov.

Abstract

Complex analysis is the branch of mathematical analysis that investigates functions of complex numbers. It is useful in many branches of mathematics, including algebraic geometry, number theory, applied mathematics; as well as in physics, including hydrodynamics, thermodynamics, nuclear, aerospace, mechanical and electrical engineering. The present work is particularly concerned with the so-called poly-analytic functions, which represent a suitable generalization of the analytic ones, the latter being the central object of Complex Analysis. The main propose is to show how the Lipschitz class of arbitrary order behave invariant under the action of a singular integral operator, which naturally arises in the theory of poly-analytic functions. The obtained result can be viewed as a true generalization of the well-known Plemelj-Privalov Theorem.

Índice general

Introducción

El Análisis Complejo abarca varios tópicos de interés tanto desde el punto de vista de la teoría matemática en sí, como de sus aplicaciones a diversos campos, especialmente aquellos que se relacionan con la Física y la Ingeniería. Dentro del mismo, la teoría de funciones analíticas es sin dudas una de las ramas más ricas y de mayor importancia.

El conocido Teorema de Plemelj-Privalov establece una interesante y útil propiedad de invarianza de los espacios de Lipschitz con exponente entre 0 y 1, bajo la acción de un operador integral singular con núcleo de Cauchy, el cual surge en el estudio de problemas de frontera para funciones analíticas. Una generalización de la teoría de funciones analíticas, lo constituye las llamadas funciones polianalíticas, que han sido estudiadas intensamente en las últimas décadas y encuentran múltiples aplicaciones en problemas de frontera para ecuaciones en derivadas parciales.

Las fórmulas de representación obtenidas para funciones polianalíticas (ver [3]) conducen a un operador integral singular que generaliza al clásico operador integral mencionado anteriormente. Teniendo como base este nuevo operador y considerando la clase de Lipschitz con exponente arbitrario, se puede formular el **problema científico** siguiente: ¿Se extenderá el Teorema de Plemelj-Privalov a la teoría de funciones polianalíticas?

El **objeto** del trabajo será la Teoría de operadores integrales singulares y el **campo** el operador integral singular para funciones polianalíticas.

El principal **objetivo** es demostrar cómo la clase de Lipschitz con exponente arbitrario, se conserva invariante bajo la acción del nuevo operador integral singular en el caso de considerar una circunferencia arbitraria del plano complejo como contorno de integración. Es por ello que se declaran como **objetivos específicos**:

- Probar la legitimidad del operador integral singular definido en la teoría de funciones polianalíticas, es decir, probar que esta integral curvilínea singular existe en el sentido del valor principal.
- Probar que la clase de funciones de Lipschitz es invariante por traslaciones.
- Demostrar que la clase de funciones continuamente diferenciables hasta el orden k y cuya $k-$ésima derivada es de Lipschitz con exponente entre cero y uno, son funciones de Lipschitz con exponente arbitrario entre k y $k+1$.
- Demostrar que el Teorema de Plemelj-Privalov, en la teoría de funciones polianalíticas, se cumple en el caso de una circunferencia arbitraria.

Con los mismos se pretende dar respuesta a las **preguntas científicas** siguientes:

- ¿Se podrá generalizar el operador integral singular clásico de la teoría de funciones analíticas a la teoría de funciones polianalíticas?
- ¿Será la clase de funciones de Lipschitz con exponente arbitrario invariante por traslaciones?
- ¿Existirá una inclusión de la clase de funciones continuamente diferenciables hasta el orden k y cuya $k-$ésima derivada es de Lipschitz con exponente entre cero y uno en la clase funciones de Lipschitz con exponente arbitrario entre k y $k+1$?
- ¿Se generalizará el Teorema de Plemelj-Privalov a la teoría de funciones polianalíticas?

Para responderlas fue necesario realizar las **tareas de investigación** siguientes:

- Revisión bibliográfica y estudio sobre la teoría de funciones polianalíticas.

– Definición de un operador integral singular para funciones polianalíticas.

– Estudio de la invarianza por traslaciones de la clase de funciones de Lipschitz con exponente arbitrario.

– Extensión del Teorema de Plemelj-Privalov a la teoría de funciones polianalíticas.

Como en toda investigación, será necesario conocer el estado del arte en relación al Teorema de Plemelj-Privalov en la teoría de funciones analíticas para el operador integral singular:

$$(S_\Gamma f)(t) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau,$$

donde la función $f(\tau)$ pertenece a la clase de funciones de Hölder[1]con exponente $0 < \alpha \leq 1$ y Γ es un contorno suave[2]. En este caso, el operador dado por la integral curvilínea singular, existe en el sentido del valor principal como se prueba en [6]. Una relación interesante entre este operador y la clase de funciones sobre la cual actúa, la establece el siguiente resultado conocido como Teorema de Plemelj-Privalov. (Ver [6] p. 53)

Teorema 1. *Sea Γ una circunferencia en el plano complejo. Entonces, para $0 < \alpha < 1$ tiene lugar la implicación siguiente:*

$$f \in \mathcal{L}ip(\alpha, \Gamma) \Longrightarrow S_\Gamma f \in \mathcal{L}ip(\alpha, \Gamma). \tag{1}$$

Este resultado es también válido para curvas de clase C^2 (ver [8] por ejemplo). Si la curva Γ admite tener esquinas, entonces la integral singular $S_\Gamma 1$ no es una función continua en Γ. La forma de evitar esta dificultad es introducir una nueva integral singular de Cauchy

$$f \to \frac{1}{\pi\, i} \int\limits_\Gamma \frac{f(\tau) - f(t)}{\tau - t} d\tau + f(t).$$

[1] En lo que sigue se tratará esta clase como la clase de funciones de Lipschitz con exponente entre cero y uno.

[2] Entenderemos por contorno suave una línea simple (es decir, sin puntos múltiples), sin puntos de retroceso, cerrada o abierta, y cuya tangente cambia continuamente.

El Teorema 1 fue probado por Privalov [9] para toda curva suave a tramos sin cúspides. Luego Mushkelisvili [8] y Davydov [5] extendieron ese resultado para toda curva suave a tramos y toda curva cuerda/arco[1], respectivamente.

A continuación se realizará una breve cronología que muestre el desarrollo de este problema a partir de su planteamiento hasta su solución y generalizaciones en la actualidad.

Cronología

1. 1975 Salaev
   Planteó el problema siguiente (Problema de Salaev)
   Hallar la clase maximal V_α de curvas de Jordan, rectificables y cerradas en las cuales se cumple el Teorema de Plemelj-Privalov.

2. 1975 Babaev-Salaev
   Generalizan la acotación de Zygmund para toda curva de Jordan, rectificable y cerrada.

3. 1976-1982 Salaev-Salimov
   Hallaron una clase de curvas en la cual la acotación de Zygmund es inmejorable.
   Salimov: Encontró un ejemplo muy importante que daba idea de la estructura de la clase V_α.

4. 1991 V. V. Salaev, E. G. Guseinov, R. K. Seifullaev
   Solución del problema de Salaev.

Mediante el uso de las álgebras de Clifford este problema se ha abordado también en espacios de dimensión arbitraria mayor que 2. (Ver [4]).

Esta evolución muestra fundamentalmente, que los matemáticos que han trabajado en este teorema, tratando de generalizarlo cada vez más, han tomado esencialmente dos caminos

[1] Una curva Γ se dice cuerda/arco si la razón entre la longitud de una cuerda arbitraria y la longitud del menor arco correspondiente está acotada por una constante positiva $C \leq 1$.

distintos. Un camino trata de generalizar la clase de funciones sobre las cuales se sigue manteniendo el resultado. Otro camino es el que busca la clase de curvas para las que aún es válido el teorema.

Todos estos antecedentes orientan cómo dirigir el estudio para el caso general de funciones de Lipschitz con exponente arbitrario, las cuales incluyen el caso particular de la clase de Lipschitz con exponente entre cero y uno. El principal resultado del trabajo constituye una generalización del Teorema1, pero esta vez sobre la clase de funciones de Lipschitz con exponente arbitrario y considerando el operador integral singular asociado a las funciones polianalíticas.

En investigaciones futuras se pretende extender este resultado al caso de cualquier curva suave. En el presente trabajo, en correspondencia con los orígenes históricos del problema, se considerará el caso de una circunferencia arbitraria situada en la parte finita del plano complejo.

La estructura del trabajo es la siguiente: el Capítulo 1 introducirá la teoría preliminar para enfrentarse al problema en cuestión, tales como las clases de funciones continuas sobre las cuales se define el operador integral singular. En la Sección 1.2 se considera la ecuación diferencial compleja de orden superior que da origen a la teoría de funciones polianalíticas, siendo estas últimas el contexto natural donde se introduce el operador integral singular mencionado anteriormente y que será el objeto central de nuestro estudio.

En el Capítulo 2 se probará que el operador integral singular definido existe en el sentido del valor principal. Se verificará una propiedad de invarianza por traslación para la clase de Lipschitz y se establecerán relaciones entre la clase de Lipschitz con exponente arbitrario con otras clases de funciones. Finalmente, esta serie de resultados previamente demostrados, permitirán resolver en este capítulo el problema planteado para el caso de una circunferencia arbitraria.

Capítulo 1

Nociones preliminares

En este capítulo se exponen los fundamentos teóricos que sirven de base a la presente investigación. Cuenta con dos secciones: en la Sección 1.1 se definen las clases de funciones sobre las cuales se centrará el estudio y en la Sección 1.2 se definen las funciones en cuya teoría se tratará el teorema, así como el operador que surge en esta teoría.

1.1. Clases de funciones

1.1.1. Clase de funciones de Lipschitz

En 1934 Hassler Whitney, uno de los matemáticos más influyentes del siglo pasado, introduce las clases de funciones diferenciables sobre conjuntos cerrados arbitrarios y prueba en [11] que dichas funciones pueden ser extendidas como funciones diferenciables en todo el espacio. Una versión algo más general, pero que sigue esencialmente las mismas ideas de Whitney, fue considerada por E. Stein, quien introduce en [10] la clase de funciones de Lipschitz con exponente arbitrario[1].

Definición 1. *Multiíndice.*
Un multiíndice es la $n-$*upla ordenada* $j = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ *en la cual cada componente* $j_i \geq 0, \forall i = 1, \ldots, n.$

[1] En lo que sigue se omitirá el término “exponente arbitrario” a menos que se aclare lo contrario.

En lo que sigue se usarán las notaciones siguientes:

1. $j! = j_1! \dots j_n!$
2. $|j| = j_1 + \dots + j_n$
3. $x^j = {x_1}^{j_1} \dots {x_n}^{j_n}$

Observación 1. *De la definición de multiíndice y de su módulo correspondiente se tiene que* $|j+l| = |(j_1 + l_1, \dots, j_n + l_n)| = j_1 + l_1 + \dots + j_n + l_n = |j| + |l|$.

Definición 2. *Funciones de Lipschitz.*
Sea $k \in \mathbb{N}$ *y* $k < \gamma \leq k+1$. *Se dice que la función* f, *definida en un subconjunto* F *cerrado en el plano complejo, pertenece a la clase de Lipschitz, la cual se denota por* $\mathcal{L}ip(\gamma, F)$, *si existen las funciones* $f^{(j)}$, *con* $0 \leq |j| \leq k$ *definidas en* F, *con* $f^0 = f$ *y tal que si*

$$f^{(j)}(x) = \sum_{|j+l| \leq k} \frac{f^{(j+l)}}{l!}(y)(x-y)^l + R_j(x,y) \tag{1.1}$$

entonces

$$|f^{(j)}(x)| \leq M \text{ y } |R_j(x,y)| \leq M|x-y|^{\gamma - |j|} \quad \forall x, y \in F, \ |j| \leq k, \tag{1.2}$$

donde j *y* l *denotan multiíndices y* M *es una constante positiva.*

Observación 2. *Se hace notar que la segunda condición en (1.2) se cumplirá para todo* $x, y \in F$ *si y solo si la misma se cumple para* x *e* y *tan cercanos como se quiera (en caso de ser* x *e* y *puntos de acumulación de* F*). En efecto, para todo par de puntos* x, y *que están a una distancia mayor que un número positivo fijo* N, *la acotación de las* $f^{(j)}$ *por una constante positiva* M, *implicará la existencia de un valor* $M^* > 0$ *tal que* $|R_j(x,y)| \leq M^*|x-y|^{\gamma-|j|}$. *Para ello obsérvese que*

$$|R_j(x,y)| = \left| f^{(j)}(x) - \sum_{|j+l| \leq k} \frac{f^{(j+l)}}{l!}(y)(x-y)^l \right| \leq |f^{(j)}(x)| + \sum_{|j+l| \leq k} \left| \frac{f^{(j+l)}}{l!}(y) \right| |x-y|^{|l|}.$$

Como $|x-y|^{|l|} = \frac{|x-y|^{|l|}}{|x-y|^{\gamma-|j|}}|x-y|^{\gamma-|j|} = \frac{1}{|x-y|^{\gamma-|j|-|l|}}|x-y|^{\gamma-|j|} \leq \frac{1}{N^{\gamma-|j|-|l|}}|x-y|^{\gamma-|j|}$ *se tendrá que*

$$|R_j(x,y)| \leq M + \sum_{|j+l| \leq k} \frac{M}{l!}|x-y|^{|l|} \leq M + M \sum_{|l| \leq k-|j|} \frac{1}{N^{\gamma-|j|-|l|}}|x-y|^{\gamma-|j|}$$

$$= \frac{M}{|x-y|^{\gamma-|j|}}|x-y|^{\gamma-|j|} + M|x-y|^{\gamma-|j|}\sum_{|l|\leq k-|j|}\frac{1}{N^{\gamma-|j|-|l|}}$$

$$\leq \left(\frac{M}{N^{\gamma-|j|}} + M\sum_{|l|\leq k-|j|}\frac{1}{N^{\gamma-|j|-|l|}}\right)|x-y|^{\gamma-|j|}$$

$$\leq \left(\frac{M}{N^{\gamma-|j|}} + M\max_{|l|\leq k-|j|}\left\{\frac{1}{N^{\gamma-|j|-|l|}}\right\}\#\{l:|l|\leq k-|j|\}\right)|x-y|^{\gamma-|j|}$$

Es decir,

$$|R_j(x,y)| \leq M^*|x-y|^{\gamma-|j|}.$$

Aquí se considera

$$M^* = \frac{M}{N^{\gamma-|j|}} + M\max_{|l|\leq k-|j|}\left\{\frac{1}{N^{\gamma-|j|-|l|}}\right\}\#\{l:|l|\leq k-|j|\}.$$

De este modo tanto las funciones $f^{(j)}(x)$ como los $R_j(x,y)$ satisfarán las condiciones respectivas de (1.2) tomando como constante universal a M^* para todo $x,y \in F$ con $|x-y| \geq N$.

Observación 3. *Se entenderá que una función de valores complejos*

$$f(x) = u(x_1,x_2) + iv(x_1,x_2)$$

de los puntos de un conjunto cerrado $F \subset \mathbb{R}^2$ pertenece a la clase de Lipschitz $\mathcal{L}ip(\gamma,F)$, si sus partes reales e imaginarias (las cuales son funciones de $\mathbb{R}^2$) pertenecen a $\mathcal{L}ip(\gamma,F)$.

Observación 4. *Si F es finito, entonces las funciones $f^{(j)}$ no están determinadas por la f^0. Sea, por ejemplo, $F \subset \mathbb{R}^2$ dado por $F = \{(1,0),(0,1)\}$. Entonces una función de $\mathcal{L}$ip(1+α,F) (es decir, $\mathcal{L}$ip(γ,F) con $1 < \gamma \leq 2$) satisface $\forall x,y \in F$:*

$$\begin{aligned}
f^0(x) &= f^0(y) + f^{(1,0)}(y)(x_1-y_1) + f^{(0,1)}(y)(x_2-y_2) + R_0(x,y) \\
f^{(1,0)}(x) &= f^{(1,0)}(y) + R_{(1,0)}(x,y) \\
f^{(0,1)}(x) &= f^{(0,1)}(y) + R_{(0,1)}(x,y).
\end{aligned}$$

Si se definen

$$\begin{aligned}
f^0(1,0) = f(1,0) = 1 \quad &\textit{y} \quad f^0(0,1) = f(0,1) = 2 \\
f^{(1,0)}(1,0) = 1 \quad &\textit{y} \quad f^{(1,0)}(0,1) = -3 \\
f^{(0,1)}(1,0) = 1 \quad &\textit{y} \quad f^{(0,1)}(0,1) = 2,
\end{aligned}$$

entonces se distinguen los casos siguientes.

– *Caso en que* $x = (1,0), y = (0,1)$. *Aquí se tendrá*

$$|x-y| = |(0,1)-(1,0)| = |(-1,1)| = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}
R_0(x,y) &= f(1,0) - f(0,1) - f^{(1,0)}(0,1)(1) - f^{(0,1)}(0,1)(-1) \\
&= 1 - 2 - (-3) + 2 \\
&= 4 \\
R_{(1,0)}(x,y) &= f^{(1,0)}(1,0) - f^{(1,0)}(0,1) \\
&= 4 \\
R_{(0,1)}(x,y) &= f^{(0,1)}(1,0) - f^{(0,1)}(0,1) \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
|R_0(x,y)| &= 4 = 4\frac{\sqrt{2}^{\,\gamma}}{\sqrt{2}^{\,\gamma}} = \frac{4}{\sqrt{2}^{\,\gamma}}|x-y|^\gamma \leq 4|x-y|^\gamma \\
|R_{(1,0)}(x,y)| &= 4 = 4\frac{\sqrt{2}^{\,\gamma-1}}{\sqrt{2}^{\,\gamma-1}} = \frac{4}{\sqrt{2}^{\,\gamma-1}}|x-y|^{\gamma-1} \leq 4|x-y|^{\gamma-1} \\
|R_{(0,1)}(x,y)| &= 1 \leq 4 \leq 4|x-y|^{\gamma-1}.
\end{aligned}$$

– *Caso en que* $x = (0,1), y = (1,0)$. *Igualmente aquí*

$$|x-y| = |(1,0)-(0,1)| = |(1,-1)| = \sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned}
R_0(x,y) &= f(0,1) - f(1,0) - f^{(1,0)}(1,0)(-1) - f^{(0,1)}(1,0)(1) \\
&= 2 - 1 + 1 - 1 \\
&= 1 \\
R_{(1,0)}(x,y) &= f^{(1,0)}(0,1) - f^{(1,0)}(1,0) \\
&= -4 \\
R_{(0,1)}(x,y) &= f^{(0,1)}(0,1) - f^{(0,1)}(1,0) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
|R_0(x,y)| &= 1 \leq 4 \leq 4|x-y|^\gamma \\
|R_{(1,0)}(x,y)| &= 4 \leq 4|x-y|^{\gamma-1} \\
|R_{(0,1)}(x,y)| &= 1 \leq 4|x-y|^{\gamma-1}
\end{aligned}$$

Resumiendo, para cada x, y de F con $|j| \leq 1 = k$, se satisface que, tomando $M = 4$,

$$\begin{aligned} f^{(j)}(x) &= \sum_{|j+l|\leq 1} \frac{f^{(j+l)}(y)}{l!}(x-y)^l + R_j(x,y) \\ |f^{(j)}(x)| &\leq M, \text{ y además} \\ |R_j(x,y)| &\leq M|x-y|^{\gamma-|j|}. \end{aligned}$$

Luego, $f^0 = f$ es de $\mathcal{L}$ip(γ,F)[1]. Obsérvese que en el caso de ser $x = y$

$$R_0(x,y) = R_{(1,0)}(x,y) = R_{(0,1)}(x,y) = 0 \leq M|x-y|^{\gamma-|j|}.$$

Manteniéndose la función f^0, se definen ahora otras funciones $f^{(1,0)}$ y $f^{(0,1)}$

$$\begin{gathered} f^0(1,0) = f(1,0) = 1 \quad \text{y} \quad f^0(0,1) = (0,1) = 2 \\ f^{(1,0)}(1,0) = 2 \quad \text{y} \quad f^{(1,0)}(0,1) = 3 \\ f^{(0,1)}(1,0) = -1 \quad \text{y} \quad f^{(0,1)}(0,1) = -2 \end{gathered}$$

Similarmente se analizan a continuación los casos posibles.

– *Caso en que $x = (1,0), y = (0,1)$. Aquí se tendrá*

$$|x-y| = |(0,1)-(1,0)| = |(-1,1)| = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} R_0(x,y) &= f(1,0) - f(0,1) - f^{(1,0)}(0,1)(1) - f^{(0,1)}(0,1)(-1) \\ &= 1 - 2 - 3 + (-2) \\ &= -6 \\ R_{(1,0)}(x,y) &= f^{(1,0)}(1,0) - f^{(1,0)}(0,1) \\ &= -1 \\ R_{(0,1)}(x,y) &= f^{(0,1)}(1,0) - f^{(0,1)}(0,1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

[1] Entiéndase f^0 junto con las funciones $f^{(j)}$ definidas.

De forma análoga

$$\begin{aligned} |R_0(x,y)| &= 6 \leq 6|x-y|^{\gamma} \\ |R_{(1,0)}(x,y)| &= 1 \leq 6 \leq 6|x-y|^{\ \gamma-1} \\ |R_{(0,1)}(x,y)| &= 1 \leq 6|x-y|^{\gamma-1} \end{aligned}$$

– *Caso en que* $x=(0,1), y=(1,0)$. *Análogamente se tendrá en este caso que*

$$|x-y| = |(1,0)-(0,1)| = |(1,-1)| = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} R_0(x,y) &= f(0,1) - f(1,0) - f^{(1,0)}(1,0)(-1) - f^{(0,1)}(1,0)(1) \\ &= 2 - 1 + 3 - (-2) \\ &= 6 \\ R_{(1,0)}(x,y) &= f^{(1,0)}(0,1) - f^{(1,0)}(1,0) \\ &= 1 \\ R_{(0,1)}(x,y) &= f^{(0,1)}(0,1) - f^{(0,1)}(1,0) \\ &= -1 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} |R_0(x,y)| &= 6 \leq 6|x-y|^{\gamma} \\ |R_{(1,0)}(x,y)| &= 1 \leq 6 \leq |x-y|^{\gamma-1} \\ |R_{(0,1)}(x,y)| &= 1 \leq |x-y|^{\gamma-1}. \end{aligned}$$

Se puede concluir entonces que, para cada x, y *de* F *con* $|j| \leq 1 = k$ *se satisface, tomando* $M=6$*,*

$$\begin{aligned} f^{(j)}(x) &= \sum_{|j+l|\leq 1} \frac{f^{(j+l)}(y)}{l!}(x-y)^l + R_j(x,y) \\ |f^{(j)}(x)| &\leq M \ \textit{ y además} \\ |R_j(x,y)| &\leq M|x-y|^{\gamma-|j|}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f^0 = f$ *es de* $\mathcal{L}$*ip(*γ*,F) junto con las nuevas funciones* $f^{(1,0)}$ *y* $f^{(0,1)}$ *definidas. Es decir, las funciones* $f^{(j)}$ *no quedan determinadas por las función* f^0*.*

Observación 5. *Si $F = \mathbb{R}^m$, las funciones $f^{(j)}$ están únicamente determinadas por $f^{(0)}$ y en este caso $Lip(k+\alpha, \mathbb{R}^m)$ está constituida por las funciones continuas y acotadas f con derivadas parciales continuas y acotadas $\partial^{|j|} f$ hasta el orden k. Además, las funciones $\partial^{|j|} f$, cuando $|j| = k$, pertenecen al espacio $\mathcal{L}ip(\alpha, \mathbb{R}^m)$.*

Observación 6. *Si $f, g \in \mathcal{L}ip(\gamma, F)$ entonces*

$$f^{(j)}(x) = \sum_{|j+l| \leq k} \frac{f^{(j+l)}}{l!}(y)(x-y)^l + R_j(x,y) \tag{1.3}$$

$$|f^{(j)}(x)| \leq M_1 \text{ y } |R_j(x,y)| \leq M_1 |x-y|^{\gamma - |j|} \quad \forall x, y \in F, \ |j| \leq k, \tag{1.4}$$

y

$$g^{(j)}(x) = \sum_{|j+l| \leq k} \frac{g^{(j+l)}}{l!}(y)(x-y)^l + S_j(x,y) \tag{1.5}$$

$$|g^{(j)}(x)| \leq M_2 \text{ y } |S_j(x,y)| \leq M_2 |x-y|^{\gamma - |j|} \quad \forall x, y \in F, \ |j| \leq k, \tag{1.6}$$

Definiendo $h := f + g$ y sumando (1.3) con (1.5) se tiene que

$$h^{(j)}(x) = \sum_{|j+l| \leq k} \frac{h^{(j+l)}}{l!}(y)(x-y)^l + [R_j(x,y) + S_j(x,y)].$$

Usando además las condiciones (1.4) y (1.6), se tiene

$$|R_j(x,y) + S_j(x,y)| \leq |R_j(x,y)| + |S_j(x,y)| \leq (M_1 + M_2)|x-y|^{\gamma - |j|}$$

y

$$|h^{(j)}(x)| = |f^{(j)}(x) + g^{(j)}(x)| \leq |f^{(j)}(x)| + |g^{(j)}(x)| \leq M_1 + M_2$$

$\forall x, y \in F, \ |j| \leq k$. Por consiguiente la función suma $h \in \mathcal{L}ip(\gamma, F)$. Inductivamente, lo anterior se extiende para la suma de un número finito de funciones $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{L}ip(\gamma, F)$.

Definición 3. *Funciones continuamente diferenciables.*
La clase de funciones continuamente diferenciables hasta el orden $k+1$ se denotará por $C^{k+1}(\Omega)$, siendo Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$. Se entiende como la clase donde la función y sus derivadas hasta el orden $k+1$ son continuas en Ω.

Observación 7. *Si F es cerrado, entonces la clase $C^{k+1}(F)$ denotará la clase de funciones pertenecientes a $C^{k+1}(\Omega)$, siendo Ω un abierto que contiene a F.*

1.2. Funciones polianalíticas

Las funciones polianalíticas (ver [1],[2],[7]) surgen como generalización de las funciones analíticas, las cuales son funciones continuamentes diferenciables $w : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ definidas como la solución de la ecuación diferencial $\partial_{\overline{z}} w(z) = 0$, donde $\partial_{\overline{z}} := \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$ es el operador de Cauchy-Riemann.

Las funciones polianalíticas pueden ser entendidas como la solución de una ecuación diferencial de orden superior. Este concepto se formaliza en la definición siguiente.

Definición 4. *Funciones polianalíticas.*
Una función $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es llamada polianalítica de orden n (o n-analítica) en algún dominio D del plano de la variable compleja z, si tiene derivadas parciales (con respecto a x y a y) de orden menor o igual que n en D y si en este dominio satisface la Condición de Cauchy-Riemann generalizada:

$$\frac{\partial^n w}{\partial \overline{z}^n} = \partial_{\overline{z}}^n w = 0.$$

Al resolver esta ecuación diferencial, se concluye que una función $n-$*analítica* puede ser escrita como (véase [2])

$$w(z) = \sum_{i=0}^{n-1} u_i(z)\overline{z}^i,$$

donde los coeficientes $\{u_i(z)\}_{i=1}^{n-1}$ son funciones analíticas.

Teorema 2. *[Fórmula de representación de Cauchy-Pompeiu] Sea $D \subset \mathbb{C}$ un dominio regular, $w \in C^m(D; \mathbb{C}) \cap C^{m-1}(\overline{D}; \mathbb{C})$, $m \geq 1$. Entonces, para $z \in D$,*

$$\begin{aligned} w(z) &= \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{1}{\mu!} \frac{(\overline{z-\zeta})^{\mu}}{\zeta - z} \partial_{\overline{\zeta}}^{\mu} w(\zeta) d\zeta - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int\limits_{D} \frac{1}{(m-1)!} \frac{(\overline{z-\zeta})^{m-1}}{\zeta - z} \partial_{\overline{\zeta}}^{m} w(\zeta) d\xi d\eta. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Como consecuencia de este Teorema se obtiene, en el caso de ser w polianalítica, la fórmula de representación:

$$w(z) = \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{1}{\mu!} \frac{(\overline{z-\zeta})^{\mu}}{\zeta - z} \partial_{\overline{\zeta}}^{\mu} w(\zeta) d\zeta,$$

la cual constituye una versión para funciones polianalíticas de la conocida fórmula de Cauchy para funciones analíticas.

1.2.1. Operadores integrales singulares

Definición 5. *Dada una curva suave Γ, se define el operador integral singular como*

$$(S_\Gamma f)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau, \tag{1.8}$$

donde la función $f(\tau)$ es de Lipschitz con exponente α entre cero y uno.

Este operador se entiende en el sentido del valor principal, es decir, como el límite de la integral $\int\limits_{\Gamma - l} \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau$ cuando $\rho \to 0$, donde ρ es el radio de una circunferencia centrada en el punto t la cual no tiene más puntos de intersección con la curva Γ salvo t_1 y t_2, y l es la parte de la curva delimitada por estos puntos que queda en el interior de la circunferencia. Además, este operador aparece en la teoría de funciones analíticas, y su propiedad de invarianza sobre funciones de la clase de Lipschitz con exponente entre cero y uno, se establece en el Teorema de Plemelj-Privalov clásico.
La fórmula de representación (1.7) para funciones polianalíticas (véase [3]) vista anteriormente, inspira la definición de un operador integral singular en esta teoría que se formaliza a continuación.

Definición 6. *Operador integral singular para funciones polianalíticas.*
Se define el operador integral singular para funciones polianalíticas como

$$(S_\Gamma^k f)(t) = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{(\overline{t - \tau})^n}{\tau - t} f_n(\tau) d\tau, \text{ donde}$$

$$f_n(\tau) = \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{n} (i)^{(n-p)} \binom{n}{p} f^{(p,n-p)}(\tau), \quad \binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)p!}.$$

Obsérvese que las funciones f_n introducidas son tales que agrupan de forma conveniente a todas las funciones $f^{(j)}$ tales que $|j| = n$. Esta notación permite simplificar la expresión del operador integral singular propuesto, aunque igual podría haberse definido directamente en términos de las funciones $f^{(j)}$.

Observación 8. *Si* $k = 0$*, o sea,* $0 < \gamma \leq 1$*, entonces* $(S^0_\Gamma f)(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f_0(\tau)}{\tau - t}d\tau$*, pero* $f_0(\tau) = f^0(\tau) = f(\tau)$*. Es decir,* $(S^0_\Gamma f)(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\tau)}{\tau - t}d\tau$*, que no es más que el operador integral singular clásico (1.8).*

1.2.2. Conclusiones parciales

En este capítulo se expusieron los elementos teóricos que servirán de base para analizar y responder la pregunta científica principal de esta investigación. Además, se ejemplificaron importantes observaciones que se usarán posteriormente en distintas demostraciones. Se definió un operador integral singular sobre la clase de Lipschitz con exponente arbitrario y se comprobó su legitimidad.

Capítulo 2

Teorema de Plemelj-Privalov para funciones polianalíticas

En este capítulo se retomará la pregunta central de la investigación sobre la extensión del Teorema de Plemelj-Privalov a la teoría de funciones polianalíticas. Está dividido en dos secciones: la primera de ellas estará dedicada a probar la legitimidad de la definición de operador integral singular vista en el capítulo precedente. La Sección 2.2 ofrecerá algunas proposiciones previas a la demostración del teorema con el cual concluye el capítulo. Dicho teorema responde la interrogante planteada en el caso de la circunferencia, por lo tanto, extiende el Teorema 1 a la teoría de funciones polianalíticas. También se incluye al finalizar, un ejemplo que visualiza el cumplimiento del Teorema de Plemelj-Privalov obtenido y que además da origen a una nueva interrogante a responder en futuros trabajos.

2.1. Legitimidad del operador integral singular para funciones polianalíticas

En esta sección se demuestra que el operador integral singular de la Definición 6 existe en el sentido del valor principal. En efecto, obsérvese primeramente que para $k = 0$ se tiene el operador integral singular clásico actuando sobre la función f de Lipschitz con exponente entre cero y uno, por lo tanto existe en el sentido del valor principal (véase [6] p. 30). Luego, considerándose $k \neq 0$, $n \geq 1$ y Γ suave, se tiene

$$\left|\frac{(\overline{t-\tau})^n}{\tau - t} f_n(\tau)\right| = \left|(\overline{t-\tau})^{n-1}\right| \left|\frac{\overline{t-\tau}}{\tau - t}\right| |f_n(\tau)| \leq (diam\Gamma)^{n-1} C,$$

donde C es la constante que surge al acotar $|f_n(\tau)|$,

$$\begin{aligned} |f_n(\tau)| &= \left|\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}(i)^{(n-p)}\binom{n}{p} f^{(p,n-p)}(\tau)\right| \leq \left|\frac{1}{2^n}\right| \sum_{p=0}^{n} |(i)^{(n-p)}| \left|\binom{n}{p}\right| |f^{(p,n-p)}(\tau)| \\ |f_n(\tau)| &\leq \frac{1}{2^n} n \max_{p=\overline{0,n}} \left\{\binom{n}{p} |f^{(p,n-p)}(\tau)|\right\}. \end{aligned}$$

Como las funciones $f^{(p,n-p)}(\tau)$ son las $f^{(j)}(\tau)$, con $|j| \leq n$, que existen por ser f de Lipschitz, se tendrá que modularmente son menores que una constante M. Por otro lado, si n es par entonces $\max_{p=\overline{0,n}}\left\{\binom{n}{p}\right\} = \binom{n}{\frac{n}{2}}$ y si n es impar entonces $\max_{p=\overline{0,n}}\left\{\binom{n}{p}\right\} = \binom{n}{\frac{n-1}{2}}$. Es decir, $C = \frac{nM}{2^n}\binom{n}{\frac{n}{2}}$ si n es par, y $C = \frac{nM}{2^n}\binom{n}{\frac{n-1}{2}}$ si n es impar.
Para $k \neq 0$ y $n = 0$

$$\int_\Gamma \frac{f_0(\tau)}{\tau - t} d\tau = \int_\Gamma \frac{f^0(\tau)}{\tau - t} d\tau = \int_\Gamma \frac{f^0(\tau) - f^0(t)}{\tau - t} d\tau + f^0(t) \int_\Gamma \frac{d\tau}{\tau - t} \tag{2.1}$$

Trabajando con el primer sumando de (2.1)

$$\left|\frac{f^0(\tau) - f^0(t)}{\tau - t}\right| = \frac{\left|\sum_{|l|\leq k} \frac{f^{(l)}(t)}{l!}(\tau - t)^l + R_j(\tau, t) - f^0(t)\right|}{|\tau - t|}$$

$$= \frac{\left|\sum_{\substack{|l|\leq k \\ l\neq 0}} \frac{f^{(l)}(t)}{l!}(\tau - t)^l + R_j(\tau, t)\right|}{|\tau - t|} \leq \frac{\sum_{\substack{|l|\leq k \\ l\neq 0}} \left|\frac{f^{(l)}(t)}{l!}\right| |\tau - t|^{|l|} + |R_j(\tau, t)|}{|\tau - t|}$$

$$= M\sum_{i=1}^{k} c_i |\tau - t|^{i-1} + M|\tau - t|^{\gamma - 1}, \text{donde } c_i = card\{l \neq 0 : |l| = i\}.$$

Luego, como $|\tau - t| \leq diam\Gamma$, se tiene que $\int_\Gamma \frac{f^0(\tau) - f^0(t)}{\tau - t} d\tau$ existe en el sentido impropio, por tanto según el valor principal. Por su parte, el segundo sumando de (2.1), existe en el sentido del valor principal pues

$$f^0(t)\int\limits_{\Gamma}\frac{d\tau}{\tau-t}=f^0(t)\pi i.$$

Resumiendo, se ha podido comprobar que el operador integral singular de la Definición 6 existe en el sentido de valor principal.

2.2. Teorema de Plemelj-Privalov para funciones polianalíticas

En esta sección se responde la interrogante que dio inicio a la investigación y se formaliza en forma de teorema. Primeramente se enuncian y demuestran dos proposiciones que intervendrán posteriormente en la demostración del teorema de Plemelj-Privalov que se enuncia para la teoría de funciones polianalíticas.

Proposición 1. *Sean $F\subset\mathbb{R}^n$ cerrado y un punto arbitrario $z_0\in\mathbb{R}^n$. Si $G:=F+z_0=\{y\in\mathbb{R}^n : y=x+z_0, x\in F\}$ entonces tienen lugar las siguientes implicaciones*

(i) $f(x)\in\mathcal{L}ip(\gamma,G)\Rightarrow f(x+z_0)\in\mathcal{L}ip(\gamma,F)$.

(ii) $f(x)\in\mathcal{L}ip(\gamma,F)\Rightarrow f(x-z_0)\in\mathcal{L}ip(\gamma,G)$.

Demostración 1. **(i)** *Si $f(x)\in\mathcal{L}ip(\gamma,G)$ entonces*

$$f^{(j)}(x)=\sum_{|j+l|\leq k}\frac{f^{(j+l)}}{l!}(y)(x-y)^l+R_j(x,y),\forall x,y\in G.$$

Como G es una traslación del conjunto F por el vector z_0, esto equivale a

$$f^{(j)}(x+z_0)=\sum_{|j+l|\leq k}\frac{f^{(j+l)}}{l!}(y+z_0)[(x+z_0)-(y+z_0)]^l+R_j(x+z_0,y+z_0),\forall x,y\in F$$

o bien

$$f_*^{(j)}(x)=\sum_{|j+l|\leq k}\frac{f_*^{(j+l)}}{l!}(y)(x-y)^l+R_j^*(x,y),\forall x,y\in F,$$

donde $f_*^{(j+l)}(x) := f^{(j+l)}(x+z_0)$ *y* $R_j^*(x,y) := R_j(x+z_0, y+z_0)$.
Pero

$$|R_j^*(x,y)| = |R_j(x+z_0, y+z_0)| \leq M|x-y|^{\gamma-|j|}, |f_*^{(j)}(x)| = |f^{(j)}(x+z_0)| \leq M$$

pues $(x+z_0), (y+z_0) \in G$. *Por consiguiente* $f_*(x) \in \mathcal{L}ip(\gamma, F)$ $\square$

(ii) *Si* $f(x) \in \mathcal{L}ip(\gamma, F)$ *entonces, de forma similar*

$$f^{(j)}(x) = \sum_{|j+l|\leq k} \frac{f^{(j+l)}}{l!}(y)(x-y)^l + R_j(x,y), \forall x, y \in F.$$

Como F *es una traslación del conjunto* G *por el vector* $-z_0$, *esto equivale a*

$$f^{(j)}(x-z_0) = \sum_{|j+l|\leq k} \frac{f^{(j+l)}}{l!}(y-z_0)[(x-z_0)-(y-z_0)]^l + R_j(x-z_0, y-z_0), \forall x, y \in G$$

o bien

$$f_*^{(j)}(x) = \sum_{|j+l|\leq k} \frac{f_*^{(j+l)}}{l!}(y)(x-y)^l + R_j^*(x,y), \forall x, y \in G,$$

donde $f_*^{(j+l)}(x) := f^{(j+l)}(x-z_0)$ *y* $R_j^*(x,y) := R_j(x-z_0, y-z_0)$.
Pero

$$|R_j^*(x,y)| = |R_j(x+z_0, y+z_0)| \leq M|x-y|^{\gamma-|j|}, |f_*^{(j)}(x)| = |f^{(j)}(x+z_0)| \leq M$$

pues $(x-z_0), (y-z_0) \in F$. *Por consiguiente* $f_*(x) \in \mathcal{L}ip(\gamma, G)$. $\square$

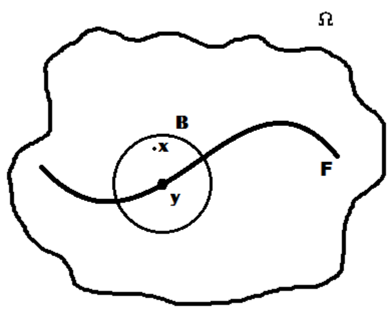
Proposición 2. *Para todo conjunto* $F \subset \mathbb{R}^2$ *cerrado se cumple*

$$C^{k+1}(F) \subset \mathcal{L}ip(k+1, F).$$

Demostración 2. *Recuérdese que será suficiente verificar esta afirmación para valores de* x *e* y *tan cercanos como se quiera (Observación 2). Si* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *es de clase* $C^{k+1}(F)$, *entonces, por definición, es de clase* $C^{k+1}(\Omega)$, *donde* Ω *es un abierto que contiene a* F *(Véase la Figura 2.1). Por lo tanto, para cada* $y \in F$ *existe una bola* B *centrada en* $y = (y_1, y_2)$ *completamente contenida en* Ω *y tal que para todo* $x \in B$, *existe un* c *intermedio entre* x *e* y *que verifica [Fórmula de Taylor[1]]:*

[1] Aquí se usa la escritura con multiíndices.

Figura 2.1



$$f(x) = \sum_{|l| \leq k} \frac{1}{l!} \frac{\partial^{|l|} f}{\partial x^l}(y)(x-y)^l + \sum_{|l|=k+1} \frac{1}{l!} \frac{\partial^{|l|} f}{\partial x^l}(c)(x-y)^l \tag{2.2}$$

Luego, si se denota $f^{(j)}$ *como sigue*

$$f^{(j)}(x) = \frac{\partial^{|j|} f}{\partial x^j}(x) = \frac{\partial^{|j|} f}{\partial x_1^{j_1} \partial x_2^{j_2}}(x), \text{ con} \, |j| \leq k+1, \; f^0 = f,$$

y se tiene en cuenta que $\frac{\partial^{|j|} f}{\partial x^j}(x)$ *es de clase* $C^{k+1-|j|}(F)$ *se tiene que*

$$\begin{aligned} f^{(j)}(x) &= \sum_{|l| \leq k-|j|} \frac{1}{l!} \frac{\partial^{|l|}}{\partial x^l} \left(\frac{\partial^{|j|}}{\partial x^j} \right)(y)(x-y)^l + \sum_{|l|=k+1-|j|} \frac{1}{l!} \frac{\partial^{|l|}}{\partial x^l} \left(\frac{\partial^{|j|}}{\partial x^j} \right)(y)(x-y)^l \\ &= \sum_{|j+l| \leq k} \frac{1}{l!} \frac{\partial^{|j+l|}}{\partial x^{j+l}}(y)(x-y)^l + \sum_{|j+l|=k+1} \frac{1}{l!} \frac{\partial^{|j+l|}}{\partial x^{j+l}}(y)(x-y)^l. \end{aligned}$$

De forma compacta

$$f^{(j)}(x) = \sum_{|l+j| \leq k} \frac{f^{(j+l)}}{l!}(y)(x-y)^l + R_j(x,y),$$

donde

$$f^{(j+l)}(y) = \frac{\partial^{|j+l|}}{\partial x^{j+l}}(y), \;\; R_j(x,y) = \sum_{|j+l|=k+1} \frac{1}{l!} \frac{\partial^{|j+l|}}{\partial x^{l+j}}(y)(x-y)^l.$$

Además, definiéndose

$$M = \max_{|j| \le k+1} \left\{ \left| \frac{\partial^{|j|} f}{\partial x^j} \right|, x \in B \right\}$$

se cumplirá que $|f^{(j)}(x)| \le M$ *y* $|R_j(x,y)| \le M|x-y|^{k+1-|j|}$*. Como esto se cumple para cada* $x, y \in B$*, igualmente se satisfará para cada* $x, y \in F \cap B$*. Consiguientemente,* $f \in \mathcal{L}ip(k+1, F)$*.* $\square$

Más generalmente se tiene el resultado siguiente.

Proposición 3. *Si denotamos por* $C^{k+\alpha}(F)$ *la clase de funciones continuamente diferenciables hasta el orden* k *y tal que su* $k-$*ésima derivada es de Lipschitz con exponente* α *entre cero y uno, entonces se cumple*

$$C^{k+1+\alpha}(F) \subset \mathcal{L}ip(k+1+\alpha, F).$$

Demostración 3. *Veamos primero el caso particular en que* $k+1=2$*. Sea* $f \in C^{2+\alpha}(F)$*. A través de la Fórmula de Taylor se definen:*

$$R_0(x,y) = f(x) - f(y) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(y)(x_1-y_1) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(y)(x_2-y_2) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(y)(x_1-y_1)(x_2-y_2)$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(y)(x_1-y_1)^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(y)(x_2-y_2)^2.$$

$$\begin{aligned}
R_{(1,0)}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(y) - \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(y)(x_1-y_1) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(y)(x_2-y_2) \\
R_{(0,1)}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(y) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(y)(x_1-y_1) - \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}(y)(x_2-y_2) \\
R_{(1,1)}(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(y) \\
R_{(2,0)}(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(x) - \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(y) \\
R_{(0,2)}(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}(x) - \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}(y),
\end{aligned}$$

donde $y \in F$ *y* $x \in B(y,r)$ *tal que* $B(y,r) \subset \Omega$*.*
Al trabajar con $R_0(x,y)$

$$\frac{\partial R_0}{\partial x_1}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(y) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(y)(x_2-y_2) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(y)(x_1-y_1) \quad (2.3)$$

Según el Teorema del Valor Medio (aplicado a los dos primeros sumandos de (2.3)), existe un c_1 intermedio entre x e y tal que

$$\frac{\partial R_0}{\partial x_1}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(c_1)(x_1-y_1)+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(c_1)(x_2-y_2)-\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(y)(x_2-y_2)-\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(y)(x_1-y_1).$$

Agrupando,

$$\frac{\partial R_0}{\partial x_1}(x,y) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(c_1) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(y)\right](x_1-y_1) + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(c_1) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(y)\right](x_2-y_2).$$

Por tanto

$$\left|\frac{\partial R_0}{\partial x_1}(x,y)\right| \leq \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(c_1) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(y)\right| |x_1-y_1| + \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(c_1) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(y)\right| |x_2-y_2|.$$

Luego, como las derivadas parciales de segundo orden son de Lipschitz con exponente α entre cero y uno, existirán las constantes C_1 y C_2 tales que

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial R_0}{\partial x_1}(x,y)\right| &\leq C_1|c_1-y|^\alpha|x_1-y_1| + C_2|c_1-y|^\alpha|x_2-y_2| \\ &\leq C_1|x-y|^\alpha|x-y| + C_2|x-y|^\alpha|x-y| \\ &\leq M_1|x-y|^{1+\alpha},\ \textit{donde}\ M_1 = C_1+C_2.\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\frac{\partial R_0}{\partial x_2}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(y) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(y)(x_1-y_1) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(y)(x_2-y_2) \quad (2.4)$$

Según el Teorema del Valor Medio (aplicado a los dos primeros sumandos de (2.4)), existe un c_2 intermedio entre x e y tal que

$$\frac{\partial R_0}{\partial x_2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(c_2)(x_1-y_1)+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(c_2)(x_2-y_2)-\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(y)(x_1-y_1)-\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(y)(x_2-y_2).$$

Agrupando,

$$\frac{\partial R_0}{\partial x_2}(x,y) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(c_2) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(y)\right](x_1-y_1) + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(c_2) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(y)\right](x_2-y_2).$$

Por tanto

$$\left|\frac{\partial R_0}{\partial x_2}(x,y)\right| \leq \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(c_2) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(y)\right| |x_1-y_1| + \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(c_2) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(y)\right| |x_2-y_2|$$

Usando nuevamente el hecho de que las derivadas parciales de segundo orden son de Lipschitz con exponente α, existirán constantes C_1^* y C_2^* tales que

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial R_0}{\partial x_2}(x,y)\right| &\leq C_1^*|c_2-y|^\alpha|x_1-y_1|+C_2^*|c_2-y|^\alpha|x_2-y_2|\\ &\leq C_1^*|x-y|^\alpha|x-y|+C_2^*|x-y|^\alpha|x-y|\\ &\leq M_2|x-y|^{1+\alpha},\ \text{donde}\, M_2=C_1^*+C_2^*.\end{aligned}$$

Luego, observándose que $R_0(y,y)=0$ y usando una vez más el Teorema del Valor Medio,

$$R_0(x,y)-R_0(y,y)=\frac{\partial R_0}{\partial x_1}(c,y)(x_1-y_1)+\frac{\partial R_0}{\partial x_2}(c,y)(x_2-y_2)$$

para algún c intermedio entre x e y. Por consiguiente se tiene

$$\begin{aligned}|R_0(x,y)-R_0(y,y)| &\leq \left|\frac{\partial R_0}{\partial x_1}(c,y)\right||x_1-y_1|+\left|\frac{\partial R_0}{\partial x_2}(c,y)\right||x_2-y_2|\\ &\leq M_1|c-y|^{1+\alpha}|x_1-y_1|+M_2|c-y|^{1+\alpha}|x_2-y_2|\\ &\leq M|x-y|^{2+\alpha},\ \text{donde}\, M=M_1+M_2.\end{aligned}$$

Es decir, $|R_0(x,y)|\leq M|x-y|^{2+\alpha}$.
Al trabajar con $R_{(1,0)}(x,y)$ y al aplicar el Teorema del Valor Medio se obtiene

$$R_{(1,0)}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(y)-\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(y)(x_1-y_1)-\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(y)(x_2-y_2)$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(c_{(1,0)})(x_1-y_1)+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(c_{(1,0)})(x_2-y_2)-\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(y)(x_1-y_1)-\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(y)(x_2-y_2),$$

para algún punto $c_{(1,0)}$ intermedio entre x e y. Agrupando,

$$R_{(1,0)}(x,y)=\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(c_{(1,0)})-\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(y)\right](x_1-y_1)+\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(c_{(1,0)})-\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(y)\right](x_2-y_2).$$

Por tanto,

$$|R_{(1,0)}(x,y)|=\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(c_{(1,0)})-\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(y)\right||x_1-y_1|+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(c_{(1,0)})-\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(y)\right||x_2-y_2|$$

$$\leq C_1|x-y|^\alpha|x_1-y_1|+C_2|x-y|^\alpha|x_2-y_2|\leq C|x-y|^{1+\alpha},\ \text{donde}\ C=C_1+C_2.$$

Análogamente al trabajar con $R_{(0,1)}(x,y)$ y al aplicar el Teorema del Valor Medio se obtiene

$$R_{(0,1)}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)-\frac{\partial f}{\partial x_2}(y)-\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(y)(x_2-y_2)-\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(y)(x_1-y_1)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(c_{(0,1)})(x_1-y_1)+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(c_{(0,1)})(x_2-y_2)-\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(y)(x_2-y_2)-\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(y)(x_1-y_1),$$

para algún punto $c_{(0,1)}$ intermedio entre x e y. Agrupando,

$$R_{(0,1)}(x,y) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(c_{(0,1)}) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(y)\right](x_1-y_1)+\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(c_{(0,1)}) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(y)\right](x_2-y_2).$$

Por tanto,

$$|R_{(0,1)}(x,y)| = \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(c_{(0,1)}) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(y)\right||x_1-y_1|+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(c_{(0,1)}) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(y)\right||x_2-y_2|$$

$$\leq C_1^*|x-y|^\alpha|x_1-y_1|+C_2^*|x_1-y_1|^\alpha|x_2-y_2| \leq C^*|x-y|^{1+\alpha}, \text{ donde } C^*=C_1^*+C_2^*.$$

Ahora, como las derivadas parciales de segundo orden de f son de Lipschitz con exponente entre cero y uno, se tendrá

$$\begin{aligned}
|R_{(1,1)}(x,y)| &= \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(y)\right| \leq C_{(1,1)}|x-y|^\alpha \\
|R_{(2,0)}(x,y)| &= \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(y)\right| \leq C_{(2,0)}|x-y|^\alpha \\
|R_{(0,2)}(x,y)| &= \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(y)\right| \leq C_{(0,2)}|x-y|^\alpha.
\end{aligned}$$

Así que, si se define

$$f^{(j)}(y) = \frac{\partial^{|j|} f}{\partial x^j}(y) \text{ con } f^0 = f$$

se tiene que

$$R_j(x,y) = f^{(j)}(x) - \sum_{|j+l|\leq 2} \frac{f^{(j+l)}}{l!}(y)(x-y)^l.$$

De forma equivalente

$$f^{(j)}(x) = \sum_{|j+l|\leq 2} \frac{f^{(j+l)}}{l!}(y)(x-y)^l + R_j(x,y).$$

Luego, definiéndose

$$M = \max_{|j|\leq 2}\left\{\left|\frac{\partial^{|j|} f}{\partial x^j}(x)\right|, C, C^*, C_{(1,1)}, C_{(2,0)}, C_{(0,2)}, \ x \in B\right\}$$

se cumple $|f^{(j)}(x)| \leq M$ *y* $|R_j(x,y)| \leq M|x-y|^{2+\alpha-|j|}$. *Como lo anterior se satisface para todo* x *e* y *de* $B = B(y,r)$, *también se cumplirá para todo* x *e* y *de* $F \cap B$, *por consiguiente, teniendo en cuenta además la Observación 2,* $f \in \mathcal{L}ip(2+\alpha, F)$ *como se quería demostrar.*

Una vez visto este caso, se puede pasar a la suposición más general de tener una función de clase $C^{k+1+\alpha}(F)$ y proceder con un razonamiento análogo. Se define:

$$R_0(x,y) = f(x) - f(y) - \sum_{\substack{|l|\leq k+1 \\ |l|\neq 0}} \frac{1}{l!}\frac{\partial^{|l|} f^0}{\partial x^l}(y)(x-y)^l.$$

Derivándose R_0 así definido n veces respecto de x_1

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_0}{\partial x_1}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) - \sum_{\substack{|l|\leq k+1 \\ |l|\neq 0}} \frac{1}{l!}\frac{\partial^{|l|} f^0}{\partial x_1^{l_1}\partial x_2^{l_2}}(y) l_1 (x-y)^{(l_1-1,l_2)} \\
\frac{\partial^2 R_0}{\partial x_1^2}(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) - \sum_{\substack{|l|\leq k+1 \\ |l|\neq 0}} \frac{1}{l!}\frac{\partial^{|l|} f^0}{\partial x_1^{l_1}\partial x_2^{l_2}}(y) l_1 (l_1-1)(x-y)^{(l_1-2,l_2)} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^n R_0}{\partial x_1^n}(x,y) = \frac{\partial^n f}{\partial x_1^n}(x) - \sum_{\substack{|l|\leq k+1 \\ |l|\neq 0}} \frac{1}{l!}\frac{\partial^{|l|} f^0}{\partial x_1^{l_1}\partial x_2^{l_2}}(y) l_1 (l_1-1)\ldots(l_1-(n-1))(x-y)^{(l_1-n,l_2)}$$

donde $n \leq k$. De forma simplificada

$$\frac{\partial^n R_0}{\partial x_1^n}(x,y) = \frac{\partial^n f}{\partial x_1^n}(x) - \sum_{\substack{|l|\leq k+1 \\ |l|\neq 0}} \frac{1}{l!}\frac{l_1!}{(l_1-n)!}\frac{\partial^{|l|} f^0}{\partial x_1^{l_1}\partial x_2^{l_2}}(y)(x-y)^{(l_1-n,l_2)}$$

es decir,

$$\frac{\partial^n R_0}{\partial x_1^n}(x,y) = \frac{\partial^n f}{\partial x_1^n}(x) - \sum_{\substack{|l|\leq k+1 \\ |l|\neq 0}} \frac{1}{l_2!}\frac{1}{(l_1-n)!}\frac{\partial^{|l|} f^0}{\partial x_1^{l_1}\partial x_2^{l_2}}(y)(x-y)^{(l_1-n,l_2)} \tag{2.5}$$

Ahora, si se deriva (2.5) respecto a x_2 m veces, y tal que $m+n \leq k+1$, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial^m}{\partial x_2^m}\left(\frac{\partial^n R_0}{\partial x_1^n}\right)(x,y) &= \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x_1^n \partial x_2^m}(x) - \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x_1^n \partial x_2^m}(y)\\ &\quad -\frac{\partial^m}{\partial x_2^m}\left(\sum_{\substack{|l|\leq k+1\\ |l|\neq 0,(n,0)}} \frac{1}{l_2!}\frac{(x-y)^{(l_1-n,l_2)}}{(l_1-n)!}\frac{\partial^{|l|} f^0}{\partial x_1^{l_1}\partial x_2^{l_2}}(y)\right)\\ &= \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x_1^n \partial x_2^m}(x) - \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x_1^n \partial x_2^m}(y) - \sum_{\substack{|l|\leq k+1\\ |l|\neq 0,(n,m)}} \frac{1}{l_2!}\frac{l_2!(x-y)^{(l_1-n,l_2-m)}}{(l_1-n)!(l_2-m)!}\frac{\partial^{|l|} f^0}{\partial x_1^{l_1}\partial x_2^{l_2}}(y)\\ &= \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x_1^n \partial x_2^m}(x) - \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x_1^n \partial x_2^m}(y) - \sum_{\substack{|l|\leq k+1\\ |l|\neq 0,(n,m)}} \frac{(x-y)^{(l_1-n,l_2-m)}}{(l_1-n)!(l_2-m)!}\frac{\partial^{|l|} f^0}{\partial x_1^{l_1}\partial x_2^{l_2}}(y). \end{aligned} \tag{2.6}$$

La expresión (2.6) anterior adquiere sentido solo en dos casos, el uno cuando $l=(n+1,m)$ y el otro cuando $l=(n,m+1)$. Es decir, para $n+m\leq k$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^m}{\partial x_2^m}\left(\frac{\partial^n R_0}{\partial x_1^n}\right)(x,y) = \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x_1^n \partial x_2^m}(x) - \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x_1^n \partial x_2^m}(y) - \frac{\partial^{m+n+1} f}{\partial x_1^{n+1} \partial x_2^m}(y)(x_1-y_1)\\ -\frac{\partial^{m+n+1} f}{\partial x_1^{n} \partial x_2^{m+1}}(y)(x_2-y_2).\end{aligned}$$

Aplicándose el Teorema del Valor Medio a los dos sumandos de la ecuación anterior se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^m}{\partial x_2^m}\left(\frac{\partial^n R_0}{\partial x_1^n}\right)(x,y) &= \frac{\partial^{m+n+1} f}{\partial x_1^{n+1} \partial x_2^m}(a)(x_1-y_1) + \frac{\partial^{m+n+1} f}{\partial x_1^{n} \partial x_2^{m+1}}(a)(x_2-y_2)\\ &\quad -\frac{\partial^{m+n+1} f}{\partial x_1^{n+1} \partial x_2^m}(y)(x_1-y_1) - \frac{\partial^{m+n+1} f}{\partial x_1^{n} \partial x_2^{m+1}}(y)(x_2-y_2).\end{aligned}$$

Agrupando,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^m}{\partial x_2^m}\left(\frac{\partial^n R_0}{\partial x_1^n}\right)(x,y) &= \left[\frac{\partial^{m+n+1} f}{\partial x_1^{n+1} \partial x_2^m}(a) - \frac{\partial^{m+n+1} f}{\partial x_1^{n+1} \partial x_2^m}(y)\right](x_1-y_1)\\ &\quad + \left[\frac{\partial^{m+n+1} f}{\partial x_1^{n} \partial x_2^{m+1}}(a) - \frac{\partial^{m+n+1} f}{\partial x_1^{n} \partial x_2^{m+1}}(y)\right](x_2-y_2).\end{aligned}$$

Por tanto, usándose el hecho de que las derivadas parciales de orden $k+1$ son de Lipschitz con exponente entre cero y uno resulta que

$$\left|\frac{\partial^m}{\partial x_2^m}\left(\frac{\partial^n R_0}{\partial x_1^n}\right)(x,y)\right| \leq N_{(m,n)}|x-y|^{1+\alpha}.$$

Por otro lado, observándose que

$$R_0(y,y)=0 \text{ y } \frac{\partial^m}{\partial x_2^m}\left(\frac{\partial^n R_0}{\partial x_1^n}\right)(y,y)=0$$

se tiene[1] que

$$\begin{aligned}
|R_0(x,y)| = |R_0(x,y)-R_0(y,y)| &= \left|\frac{\partial R_0}{\partial x_1}(c^1,y)(x_1-y_1)+\frac{\partial R_0}{\partial x_2}(c^1,y)(x_2-y_2)\right| \\
&\leq \left|\frac{\partial R_0}{\partial x_1}(c^1,y)\right||x_1-y_1|+\left|\frac{\partial R_0}{\partial x_2}(c^1,y)\right||x_2-y_2| \\
&= \left|\frac{\partial R_0}{\partial x_1}(c^1,y)-\frac{\partial R_0}{\partial x_1}(y,y)\right||x_1-y_1|+\left|\frac{\partial R_0}{\partial x_2}(c^1,y)-\frac{\partial R_0}{\partial x_2}(y,y)\right||x_2-y_2| \\
&\leq \left|\frac{\partial^2 R_0}{\partial x_1^2}(c^2,y)(c_1^1-y_1)+\frac{\partial^2 R_0}{\partial x_1\partial x_2}(c^2,y)(c_1^2-y_1)\right||x-y| \\
&\quad+\left|\frac{\partial^2 R_0}{\partial x_1\partial x_2}(c^3,y)(c_1^1-y_1)+\frac{\partial^2 R_0}{\partial x_2^2}(c^3,y)(c_1^2-y_2)\right||x-y| \\
&\leq \left(\left|\frac{\partial^2 R_0}{\partial x_1^2}(c^2,y)\right|+\left|\frac{\partial^2 R_0}{\partial x_1\partial x_2}(c^2,y)\right|+\left|\frac{\partial^2 R_0}{\partial x_1\partial x_2}(c^3,y)\right|+\left|\frac{\partial^2 R_0}{\partial x_2^2}(c^3,y)\right|\right)|x-y|^2 \\
&\ \vdots \\
&\leq \left(\left|\frac{\partial^k R_0}{\partial x_1^k}(c^{(k,0)},y)\right|+\ldots+\left|\frac{\partial^{m+n} R_0}{\partial x_2^m\partial x_1^n}(c^{(m,n)},y)\right|+\ldots+\left|\frac{\partial^k R_0}{\partial x_2^k}(c^{(0,k)},y)\right|\right)|x-y|^k \\
&\leq M|x-y|^{1+\alpha}|x-y|^k,\ M=\max\left\{\left|\frac{\partial^{m+n} R_0}{\partial x_2^m\partial x_1^n}(c^{(m,n)},y)\right|,\ m+n\leq k+1\right\}
\end{aligned}$$

Es decir, $|R_0(x,y)|\leq M|x-y|^{k+1+\alpha}$. Además, definiéndose las funciones $f^{(j)}(x)$ como las derivadas parciales

$$f^{(j)}(x)=\frac{\partial^{|j|}f^0}{\partial x^j}(x),\ \text{con } f^0=f$$

y cada $R_j(x,y)$ como la diferencia

$$R_j(x,y)=f^{(j)}(x)-f^{(j)}(y)-\sum_{\substack{|l|\leq k+1-|j|\\ |l|\neq 0}}\frac{1}{l!}\frac{\partial^{|l|}}{\partial x^l}\left(\frac{\partial^{|j|}f^0}{\partial x^j}\right)(y)(x-y)^l,$$

[1] Usándose k veces el Teorema del Valor Medio en lo adelante.

se cumplirá que[1]

$$f^{(j)}(x) = \sum_{|l|\leq k^*+1} \frac{1}{l!}\frac{\partial^{|j+l|}f^0}{\partial x^{j+l}}(y)(x-y)^l + R_j(x,y),\ \ k^* = k-|j|.$$

En forma simplificada

$$f^{(j)}(x) = \sum_{|l+j|\leq k+1} \frac{f^{(j+l)}(y)}{l!}(x-y)^l + R_j(x,y),\ \text{donde}\ f^{(j+l)}(y) = \frac{\partial^{|j+l|}f^0}{\partial x^{j+l}}(y).$$

Además $|f^{(j)}(x)| \leq M$ y $|R_j(x,y)| \leq M|x-y|^{k+1+\alpha-|j|}$. Por consiguiente,

$$f \in \mathcal{L}ip(k+1+\alpha, F). \square$$

Teorema 3. *Sea $\Gamma = \{z : |z| = r\} := C_0$. Entonces, para $k < \gamma \leq k+1$ tiene lugar la implicación siguiente*

$$f(t) \in \mathcal{L}ip(\gamma,\Gamma) \Longrightarrow (S^k_\Gamma f)(t) \in \mathcal{L}ip(\gamma,\Gamma).$$

Demostración 4. *Para $k=0$ se tiene que $0<\gamma\leq 1$ y $(S^0_\Gamma f)(t)$ coincide con el operador integral singular clásico (1.8) y se tendría el Teorema de Plemelj-Privalov clásico.*
Sea $0 < m \leq k$.
En C_0 se tiene $z\cdot\overline{z} = |z|^2 = r^2$, $\overline{z} = \frac{r^2}{z}$ y $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{r^2}$. Luego

$$\frac{\overline{t-\tau}}{\tau - t} = \frac{\frac{r^2}{t}-\frac{r^2}{\tau}}{\tau-t} = \frac{r^2}{\tau t} = \frac{\overline{\tau}}{t}.$$

Por tanto,

$$\frac{\overline{t-\tau}^{\ m}}{\tau-t} = \frac{\overline{t-\tau}}{\tau-t}(\overline{t-\tau})^{\ m-1} = \frac{\overline{\tau}}{t}(\overline{t}-\overline{\tau})^{\ m-1} = \frac{\overline{\tau}}{t}\sum_{s=0}^{m-1}\binom{m-1}{s}\overline{t}^{\ s}(-\overline{\tau})^{\ m-1-s}, \text{ o sea,}$$

$$\frac{\overline{t-\tau}^{\ m}}{\tau-t} = \frac{1}{t}\sum_{s=0}^{m-1}\binom{m-1}{s}\overline{t}^{\ s}\overline{\tau}^{\ m-s}(-1)^{\ m-1-s}.$$

[1] Téngase en cuenta que ahora las $f^{(j)}(x)$ son de clase $C^{k^*+1+\alpha}(F)$, donde $k^* = k-|j|$, por lo que es un caso particular de lo precedente.

Así que

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \frac{\overline{t-\tau}^{\,m}}{\tau - t} f_m(\tau)d\tau &= \frac{1}{t}\int_\Gamma \sum_{s=0}^{m-1}\binom{m-1}{s}\bar{t}^{\,s}\bar{\tau}^{\,m-s}(-1)^{\,m-1-s} f_m(\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{t}\sum_{s=0}^{m-1}\binom{m-1}{s}\bar{t}^{\,s}\int_\Gamma \bar{\tau}^{\,m-s} f_m(\tau)(-1)^{\,m-1-s}d\tau \\ &= \frac{\bar{t}}{r^2}\sum_{s=0}^{m-1}\binom{m-1}{s}\bar{t}^{\,s}\int_\Gamma \bar{\tau}^{m-s} f_m(\tau)(-1)^{\,m-1-s}d\tau \\ &= \frac{1}{r^2}\sum_{s=0}^{m-1}\binom{m-1}{s}\bar{t}^{s+1}\int_\Gamma \bar{\tau}^{m-s} f_m(\tau)(-1)^{m-1-s}d\tau \qquad (2.7)\end{aligned}$$

Ahora, $|\bar{\tau}^{\,m-s} f_m(\tau)(-1)^{\,m-1-s}| \leq Mr^{\,m-s} \quad \forall s = \overline{0, m-1}$*, donde la constante* M *surge por ser* f *de Lipschitz y* $f_m(\tau)$ *satisfacer la desigualdad* $|f_m(\tau)| \leq M$*. Por lo tanto, existirán las integrales de (2.7). Como* $\bar{t}^m \in C^{k^*+1+\alpha}(\Gamma), con\ k^* = k-1,\ 0 < \alpha < 1, m \leq k$*, resulta que (2.7) es la suma de funciones de* $C^{k^*+1+\alpha}(\Gamma)$*, esto es*

$$\int_\Gamma \frac{\overline{t-\tau}^{\,m}}{\tau - t} f_m(\tau)d\tau \in C^{k^*+1+\alpha}(\Gamma),$$

lo cual implica según la Proposición 3 que

$$\int_\Gamma \frac{\overline{t-\tau}^{\,m}}{\tau - t} f_m(\tau)d\tau \in \mathcal{L}ip(k^* + 1 + \alpha, \Gamma).$$

Luego, teniendo en cuenta la Observación 6, el operador integral singular de la Definición 6 sería la suma de funciones de $\mathcal{L}ip(k^* + 1 + \alpha, \Gamma) = \mathcal{L}ip(k + \alpha, \Gamma)$*, por lo que se infiere finalmente que*

$$(S_\Gamma^k f)(t) \in \mathcal{L}ip(\gamma, \Gamma), k < \gamma \leq k+1 \qquad \square$$

Teorema 4. *Sea* $\Gamma = \{z : |z - z_0| = r\} := C_{z_0}$*. Entonces tiene lugar la implicación siguiente*

$$f(t) \in \mathcal{L}ip(\gamma, \Gamma) \Rightarrow (S_\Gamma^k f)(t) \in \mathcal{L}ip(\gamma, \Gamma).$$

Demostración 5. *Sea* $g_m(x) := f_m(x+z_0)\ \forall x \in C_0$*. Haciendo* $\tau = \zeta - z_0$*, se tiene* $d\zeta = d\tau$ *y*

$$\begin{aligned}
\int\limits_{C_{z_0}} \overline{\frac{t-\zeta}{\zeta-t}}^{m} f_m(\zeta)d\zeta &= \int\limits_{C_{z_0}} \overline{\frac{(t-z_0)-(\zeta-z_0)}{(\zeta-z_0)-(t-z_0)}}^{m} f_m(\zeta)d\zeta \\
&= \int\limits_{C_0} \overline{\frac{s-\tau}{\tau-s}}^{m} f_m(\tau+z_0)d\tau,\ s=t-z_0 \\
&= \int\limits_{C_0} \overline{\frac{s-\tau}{\tau-s}}^{m} g_m(\tau)d\tau. \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

Ahora, las funciones $f_m(\tau) \in \mathcal{L}ip(\gamma, C_{z_0})$*, por lo que haciéndose uso de la Proposición 1-(i), se tiene que* $f_m(\tau+z_0) = g_m(\tau) \in \mathcal{L}ip(\gamma, C_0)$*. Esto implica a su vez, por el Teorema 4, que la integral de (2.8) está en* $\mathcal{L}ip(\gamma, C_0)$*. Es decir,* $(S^k_{C_{z_0}}f)(t) \equiv (S^k_{C_0}g)(t) \in \mathcal{L}ip(\gamma, C_0)$*. Pero, el hecho de que* $(S^k_{C_0}g)(t) \in \mathcal{L}ip(\gamma, C_0)$ *implica, según la Proposición 1-(ii), que* $(S^k_{C_0}g)(t-z_0) \in \mathcal{L}ip(\gamma, C_{z_0})$.

Al introducir un nuevo cambio de variable: $\xi = \tau + z_0$ *se tiene*

$$\begin{aligned}
[S^k_{C_0}g](\eta - z_0) &= \left[\sum_{m=0}^{k} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{C_0} \overline{\frac{t-\tau}{\tau-t}}^{m} g_m(\tau)d\tau\right](\eta-z_0) \\
&= \sum_{m=0}^{k} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{C_0} \overline{\frac{(\eta-z_0)-\tau}{\tau-(\eta-z_0)}}^{m} g_m(\tau)d\tau \\
&= \sum_{m=0}^{k} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{C_{z_0}} \overline{\frac{(\eta-z_0)-(\xi-z_0)}{(\xi-z_0)-(\eta-z_0)}}^{m} g_m(\xi-z_0)d\xi \\
&= \sum_{m=0}^{k} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{C_{z_0}} \overline{\frac{\eta-\xi}{\xi-\eta}}^{m} f_m(\xi)d\xi \\
&= \left(S^k_{C_{z_0}}f\right)(\eta)
\end{aligned}$$

Es decir, $(S^k_{C_0}g)(t-z_0) \equiv (S^k_{C_{z_0}}f)(t) \in \mathcal{L}ip(\gamma, C_{z_0})$ *y el teorema queda demostrado.* $\square$

A continuación se muestra un ejemplo que ilustra el cumplimiento de este teorema obtenido.

2.2.1. Ejemplo

Sea $C = \{z : |z| = 1\}$ la circunferencia unitaria y $f(z) = \dfrac{\overline{z}}{z-2}$ definida sobre ella. Se denotará por C^+ y C^- el dominio interior y exterior de C respectivamente. La función $f(z)$ es de clase $C^{1+\alpha}(C)$ pues tiene derivadas parciales respecto de x e y las cuales son continuas en C. Por tanto, según la Proposición 3 y la Observación 3 será de $\mathcal{L}ip(1+\alpha, C)$. El operador integral singular para este caso ($1 < \gamma \leq 2$) será

$$\begin{aligned}(S_C^1 f)(t) &= \frac{1}{\pi i}\int\limits_C \frac{f(\tau)}{\tau - t}d\tau + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f^{(1,0)}(\tau) + i f^{(0,1)}(\tau)}{\tau - t}(\overline{t-\tau})d\tau \\ &= \frac{1}{\pi i}\int\limits_C \frac{f(\tau)}{\tau - t}d\tau + \frac{1}{\pi i}\int\limits_C \frac{\partial_{\overline{z}} f^0(\tau)}{\tau - t}(\overline{t-\tau})d\tau.\end{aligned}$$

Para el ejemplo en cuestión adquiere la forma

$$(S_C^1 f)(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_C \frac{\frac{\overline{\tau}}{\tau-2}}{\tau - t}d\tau + \frac{1}{\pi i}\int\limits_C \frac{\frac{1}{\tau-2}}{\tau - t}(\overline{t} - \overline{\tau})d\tau$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int\limits_C \frac{\frac{\overline{\tau}}{\tau-2}}{\tau - t}d\tau + \frac{1}{\pi i}\int\limits_C \frac{\frac{\overline{t}}{\tau-2}}{\tau - t}d\tau - \frac{1}{\pi i}\int\limits_C \frac{\frac{\overline{\tau}}{\tau-2}}{\tau - t}d\tau = \frac{1}{\pi i}\int\limits_C \frac{\frac{\overline{t}}{\tau-2}}{\tau - t}d\tau.$$

Es decir, $(S_C^1 f)(t) = \frac{\overline{t}}{\pi i}\int\limits_C \frac{\frac{1}{\tau-2}}{\tau-t}d\tau$. Sea ahora $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\frac{1}{\tau-2}}{\tau-z}d\tau$. Al usar las Fórmulas de Cauchy se tiene que $\Phi(z) = \frac{1}{z-2}$ para $z \in C^+$ y $\Phi(z) = 0$ para $z \in C^-$. Luego, según las Fórmulas de Sojotski:

$$\Phi^+(z) + \Phi^-(z) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_C \frac{\frac{1}{\tau-2}}{\tau - t}d\tau, \text{ donde } \Phi^{\pm}(z) = \lim_{\substack{z\to t \\ z\in C^{\pm}}} \Phi(z).$$

En este caso $\Phi^+(z) = \lim\limits_{z\to t}\frac{1}{z-2} = \frac{1}{t-2}$ y $\Phi^-(z) = \lim\limits_{z\to t} 0 = 0$, por lo que se tendrá

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_C \frac{\frac{1}{\tau-2}}{\tau - t}d\tau = \frac{1}{t-2}.$$

Finalmente resulta

$$(S_C^1 f)(t) = \frac{\overline{t}}{\pi i}\int\limits_C \frac{\frac{1}{\tau-2}}{\tau - t}d\tau = \frac{\overline{t}}{t-2} = f(t).$$

Es decir, se obtiene incidentalmente la propia función sobre la cual actuó el operador S_C^1. Esto significa que la función tomada de ejemplo, es un punto fijo del operador integral singular S_C^1. Es por ello que, si se aplica nuevamente este operador a la función resultado, se tiene

$$(S_C^1 f)^2(t) = (S_C^1(S_C^1 f))(t) = (S_C^1 f)(t) = f(t),$$

lo que recuerda la propiedad $S^2 = I$ que satisface el operador integral singular clásico de la Definición 1.8 en la teoría de funciones analíticas. ¿Será que esta propiedad se cumple en general para el operador integral singular definido en la teoría de funciones polianalíticas? Detalladamente, ¿se satisfará que $S^2 = I$ para el caso general donde S sea el operador integral singular de la Definición 6 e I el operador identidad? Este no constituye el objetivo central del trabajo, pero será objeto de futuras investigaciones.

2.2.2. Conclusiones parciales

En este capítulo se da cumplimiento al objetivo general de la investigación pues se establece una generalización del Teorema de Plemelj-Privalov a la teoría de funciones polianalíticas. Se establecieron además algunas proposiciones, como por ejemplo la referente a la propiedad de invarianza por traslaciones de la clase de funciones de Lipschitz.

Conclusiones

Al terminar la presente investigación se puede concluir que la misma da respuesta al problema científico, cumple con el objetivo y las tareas de la investigación. En síntesis, se exponen a continuación los principales resultados:

- Se demuestran relaciones de invarianza por traslación para la clase de Lipschitz.
- Se demuestra un Teorema de invarianza del operador integral singular asociado a las funciones polianalíticas sobre la clase de Lipschitz con exponente arbitrario, lo que constituye un resultado novedoso dentro de esta teoría.

Recomendaciones

Como trabajo futuro se proponen las siguientes recomendaciones:

– Continuar investigaciones futuras sobre las condiciones geométricas en la frontera, lo que permita considerar curvas suaves a tramo en general.

– La experiencia acumulada en el problema planteado pudiera ser útil en futuras generalizaciones a dimensiones superiores con ayuda del Análisis de Clifford.

– Analizar si se cumple en general la propiedad $S^2 = I$ para el operador integral singular que se definió en esta investigación.

Bibliografía

[1] L. D. Abreu and H. G. Feichtinger. Function spaces of polyanalitic functions. *Pre-Publicaçoes do Departamento de Matemática*, 2013. 13

[2] M. Balk and M. P. Zuev. On polyanalytic function. *IOPscience*, 1969. 13

[3] H. Begehr. Integral representations in complex, hypercomplex and clifford analysis. *Integral Transforms and Special Functions*, 13, 2002. 1, 14

[4] R. A. Blaya, J. B. Reyes, and T. M. García. The plemelj-privalov theorem in clifford analysis. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, pages 223–226, 2009. 4

[5] N. A. Davydov. *Certain questions of theory of boundary value of analytical functions*. PhD thesis, Moscow, 1949. 4

[6] F. D. Gájov. *Problemas de Contorno*. Mir, Moscú, 1980. 3, 17

[7] A. Haimi. *Polyanalytic Bergman Kernels*. PhD thesis, Department of Mathematics, The Royal Institute of Technology, 2013. 13

[8] N. Muskhelishvili. *Singular integral equations*. Wolters-Noordhoff Publishing, translated from the second russian edition. 3rd edition, 1967. 3, 4

[9] I. Privaloff. Sur les intégrales du type de cauchy. *C. R. (Dokl.) Acad. Sci. URSS*, pages 859–863, 1939. 4

[10] E. M. Stein. Singular integrals and differentiability properties of functions, 1970. 6

[11] H. Whitney. Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 36:63–89, 1934. 6