



UNIVERSIDAD DE HOLGUÍN  
OSCAR LUCERO MOYA

Facultad de Informática y Matemática

TRABAJO DE DIPLOMA

---

**Propiedades de frontera de la  
Integral de tipo Cauchy  
bi-polianalítica sobre la clase de  
Lipschitz con exponente arbitrario**

**Autora:** Tania Rosa Gómez Santiesteban

**Tutor:** Dr. Cs. Ricardo Abreu Blaya

Holguín, Junio de 2014

# Dedicatoria

*A mis padres y mi hermano ...*

*A mi tío Rodolfito ...*

*A mi abuela Leli ...*

# Agradecimientos

Me gustaría agradecer a:

- Mis padres por su apoyo.
- Mi tutor y padre profesional por su ayuda incondicional.
- Mi profe de secundaria, Alberto Batista, por incentivar en mí el amor por la matemática.
- Mi entrenador para las pruebas de ingreso, Roger Riverón Rivas, por su dedicación y sus libros.
- Yamilé y Ernesto por su guía y ejemplo.
- La profe Rosa Urquiza por sus siempre acertadas observaciones.
- La profesora de Redacción de Textos Científicos Vivian Diéguez y al profe de Inglés Félix Vega por el tiempo que me obsequiaron.
- Mis compañeras Lia y Yuly por estar en las buenas y malas.
- La familia Tamayo-Infante por acogerme como un miembro de ella.

A todas aquellas personas que me han ayudado, incluso con el pensamiento.

# Resumen

La presente investigación se enmarca en el campo del Análisis Complejo, el cual constituye una de las teorías analíticas más exitosas por sus aplicaciones dentro y fuera de la matemática. Una generalización de la teoría de funciones analíticas lo constituye la teoría de funciones bi-polianalíticas. Las funciones bi-polianalíticas han sido estudiadas en las últimas décadas y encuentran múltiples aplicaciones en problemas de frontera para ecuaciones en derivadas parciales. Los resultados obtenidos en esta investigación pueden ser entendidos como una generalización auténtica de la Integral de tipo Cauchy, las fórmulas de Plemelj-Sojotski, los problemas del salto y de Dirichlet de la teoría de funciones analíticas sobre la clase de Hölder, a la teoría de funciones bi-polianalíticas sobre la clase de Lipschitz con exponente arbitrario.

# Abstract

This investigation stands on in the field of Complex Analysis which constitutes one of the most successful analytic theories due to their applications in and out of mathematics. A generalization from the theory of analytic functions constitute the bi-polianalytic theory functions. These functions have been studied in the last decades and they find different applications in frontier's problems for equations in partial derivates. The results in this investigation can be understood as an authentic generalization of the Integral of Cauchy's type, Plemelj-Sojotski's Formulas, Problems of jump and Dirichlet from the Theory of analytic functions about Hölder's class to the bi-polianalytic functions about Lipschitz's class with arbitrary exponent.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Integral de tipo Cauchy bi-polianalítica sobre la clase de Lipschitz con exponente arbitrario</b>	<b>7</b>
1.1. Integral de tipo Cauchy clásica . . . . .	8
1.2. Teoremas y definiciones auxiliares . . . . .	13
1.3. Fórmula de Cauchy para funciones bi-polianalíticas . . . . .	16
1.4. Definición de la Integral de tipo Cauchy bi-polianalítica sobre la clase de Lipschitz con exponente arbitrario . . . . .	19
1.4.1. Legitimidad de la definición . . . . .	21
1.4.2. La Integral de tipo Cauchy representa una función bi-polianalítica de orden 2 . . . . .	24
1.5. Conclusiones parciales . . . . .	27
<b>2. Problemas de Contorno para funciones bi-polianalíticas</b>	<b>28</b>
2.1. Fórmulas de Plemelj - Sojotski . . . . .	28
2.1.1. Continuidad hasta la frontera . . . . .	29
2.1.2. Valores límites . . . . .	33
2.2. Problema del salto para funciones bi-polianalíticas . . . . .	34
2.3. Problema de Dirichlet para funciones bi-polianalíticas . . . . .	36
2.4. Conclusiones parciales . . . . .	37
<b>Conclusiones</b>	<b>38</b>
<b>Recomendaciones</b>	<b>39</b>

**Bibliografía**

**40**

# Introducción

La teoría del problema de contorno de Riemann <sup>1</sup>, para funciones analíticas es una de las ramas más importante del Análisis Complejo. Esta teoría encuentra aplicaciones en disímiles campos de la Matemática, la Mecánica, la Física y la Ingeniería. Ejemplo de ello es la Teoría de fracturas de perfiles aerodinámicos, más concretamente, muchos de estos problemas se modelan a través de un problema de contorno para la ecuación de Laplace, que contiene condiciones de frontera mixtas. A partir del método de Wiener/Hopf [6, pp. 5–8] estos problemas se reducen a un problema de contorno de Riemann.

En la Teoría de Colas [4, p. 645], muchas situaciones se modelan a través de ecuaciones integrales de tipo convolución y éstas últimas, mediante la transformada de Fourier, se reducen igualmente a un problema de contorno de Riemann. Por otra parte, las ecuaciones integrales singulares con núcleo de Cauchy, las cuales surgen en el análisis armónico, son efectivamente reducibles a un problema de contorno de Riemann.

En la Teoría de aproximación de funciones analíticas [4, p. 634], con la ayuda de la transformación de Borel, varios problemas concretos se reducen a la resolución de cierto problema de momentos en un dominio complejo, que se resuelve mediante el método de problemas de contorno.

El matemático alemán Bernhard Riemann (1826-1866), dio a conocer [4, p. 171] por vez primera el problema de contorno en su obra sobre ecuaciones diferenciales con

---

<sup>1</sup>También conocido como “problema de Hilbert”, “problema de conjugación lineal”, “problema de conjugación”, “problema de Hilbert-Priválov” o “problema de Riemann-Priválov”.



coeficientes algebraicos. El problema homogéneo se enuncia por él para el caso de  $n$  pares de funciones buscadas en relación con el problema de la búsqueda de una ecuación diferencial cuyas integrales experimentan, en el recorrido alrededor de unos puntos singulares, la sustitución lineal prefijada. Por otra parte, el matemático alemán David Hilbert (1862-1943) fue el primero en resolver el problema de contorno homogéneo.

La solución completa del problema de contorno de Riemann para un dominio simplemente conexo, fue publicada por Gájov en 1937 en su artículo “Acerca del problema de contorno de Riemann”. En dicha solución, la Integral de tipo Cauchy <sup>1</sup> resulta ser una herramienta fundamental.

Con exactitud se desconoce quien definió la Integral de tipo Cauchy, es decir, quien propuso que en la Integral de Cauchy se considere a título de densidad una función arbitraria [4, p. 88]. El primer autor en investigar el comportamiento de la Integral de tipo Cauchy en el contorno, fue el matemático ruso Yulián V. Sojotski (1842-1927) en el año 1873, en su tesis de doctorado “Acerca de ciertas integrales y funciones que se emplean durante el desarrollo en series”. Sojotski obtuvo las fórmulas de los valores límites de la Integral de tipo Cauchy cuando la densidad satisface la condición de Hölder. Fue Alexei I. Markushévich (1908-1979) quien señalara el papel de las obras de Sojotski en la teoría de la Integral de tipo Cauchy, pues fueron olvidadas y no contribuyeron al desarrollo posterior de la teoría.

En el año 1908 el matemático esloveno Josip Plemelj (1873-1967), publicó las fórmulas de Sojotski para las mismas condiciones, pero de una manera suficientemente rigurosa. Él demuestra que los valores límites de la Integral de tipo Cauchy satisfacen la condición de Hölder <sup>2</sup>. Pero lo principal consiste en que por vez primera la Integral de tipo Cauchy fue utilizada como un aparato matemático, con el objetivo de resolver un problema de contorno de la teoría de funciones analíticas.

Las funciones bi-polianalíticas han sido tratadas en los últimos años por varios autores, las cuales son una generalización de las funciones analíticas que preservan

---

<sup>1</sup>Augustin Louis Cauchy (1789-1857) fue un matemático nacido en París, Francia.

<sup>2</sup>Otto Ludwig Hölder (1859-1937) fue un matemático nacido en Stuttgart, Alemania.

algunas de sus propiedades fundamentales. La presente investigación se enfoca en el estudio de problemas de contorno para este tipo de funciones más generales. Las clases de funciones consideradas en la literatura especializada hasta el momento como datos del problema, constituyen subclases de funciones diferenciables, incluso sobre la frontera del dominio considerado. Esta es una importante limitación para el estudio de problemas de contorno, pues la misma exige un conocimiento de la función dada más allá de la curva, es decir, en una vecindad abierta de la misma. Con el presente trabajo se muestra que no es necesaria tal restricción, si en lugar de funciones diferenciables, se consideran funciones de la clase de Lipschitz con exponente arbitrario. Esto permite explotar el comportamiento de frontera de la Integral de tipo Cauchy bi-polianalítica definida sobre esta clase de funciones continuas y obtener soluciones para el Problema del salto y de Dirichlet, sin exigir a priori condiciones de diferenciabilidad.

Entonces se reconoce el **problema científico** siguiente: ¿Cómo extender las técnicas de trabajo establecidas en la literatura en la solución de problemas de contorno de Riemann para funciones analíticas al caso más general de funciones bi-polianalíticas?

Hacia su solución se encamina este trabajo investigativo. De modo que, se declara como **objeto** la Teoría de los Problemas de Contorno de Riemann y como **campo** el problema de contorno de Riemann para funciones bi-polianalíticas. La autora se propone el **objetivo general** de resolver un problema de contorno de Riemann para las funciones bi-polianalíticas sobre la clase de Lipschitz con exponente arbitrario. En correspondencia con el mismo, se declaran como **objetivos específicos**:

- Definir la Integral de tipo Cauchy bi-polianalítica sobre la clase de Lipschitz con exponente arbitrario
- Determinar los valores límites de la Integral de tipo Cauchy bi-polianalítica sobre la clase de Lipschitz con exponente arbitrario

- Resolver el Problema del salto para funciones bi-polianalíticas, como caso más simple de problema de contorno de Riemann
- Resolver el Problema de Dirichlet para funciones bi-polianalíticas.

Su alcance presupone dar respuesta a las **preguntas científicas** siguientes:

- ¿Se podrá generalizar la Integral de tipo Cauchy sobre la clase de Hölder a la clase de funciones de Lipschitz con exponente arbitrario?
- ¿La Integral de tipo Cauchy sobre la clase de funciones de Lipschitz con exponente arbitrario representará una función bi-polianalítica?
- ¿Podrá solucionarse el Problema del salto para funciones bi-polianalíticas?
- ¿Se resolverá el Problema de Dirichlet para funciones bi-polianalíticas?

Para responder las preguntas anteriores fue necesario realizar las **tareas de investigación** siguientes:

- Revisión bibliográfica sobre el estado actual de la Teoría de los Problemas de Contorno de Riemann para funciones analíticas.
- Análisis y estudio de la Teoría de funciones bi-polianalíticas, las cuales representan soluciones de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales más generales que el sistema de Cauchy-Riemann.
- Estudio de las Fórmulas de Cauchy relacionadas con las funciones bi-polianalíticas.
- Definición de una nueva Integral de tipo Cauchy bi-polianalítica sobre la clase de funciones de Lipschitz con exponente arbitrario.
- Estudio de la solubilidad y solución de un Problema del salto, como caso más simple del problema de contorno de Riemann para funciones bi-polianalíticas.

- Estudio de la solubilidad y solución del Problema de Dirichlet para funciones bi-polianalíticas.

Los **métodos** utilizados en el desarrollo de este trabajo estuvieron determinados por los objetivos y las tareas de investigación. A nivel teórico se emplearon los métodos de: análisis y síntesis, inducción y deducción, e histórico-lógico; todos de gran utilidad en el estudio de fuentes de información y en el procesamiento de los fundamentos científicos.

El problema de contorno de Riemann con coeficientes pertenecientes a la clase de Hölder ha sido tratado por Gájov en [4]. Se ha estudiado el problema de contorno para el caso de funciones bi-polianalíticas en el artículo [3] de los autores Begehr y Kumar y en el artículo [2] de los autores anteriormente mencionados en conjunto con Chaudhary.

Los **aportes** de la autora en la presente investigación radican en:

- Se integran los elementos teóricos fundamentales del problema de contorno de Riemann para las funciones analíticas, con los de las funciones bi-polianalíticas
- Se propicia un enriquecimiento teórico derivado de la extensión de la Integral de tipo Cauchy para funciones analíticas a las funciones bi-polianalíticas de orden 2.

Las **novedades científicas** consisten en que por primera vez:

- Se define la Integral de tipo Cauchy bi-polianalítica sobre la clase de Lipschitz con exponente arbitrario.
- Se soluciona el Problema del salto para funciones bi-polianalíticas de orden 2, a partir de la Integral de tipo Cauchy bi-polianalítica sobre la clase de Lipschitz con exponente arbitrario.

- Se soluciona el problema de Dirichlet para funciones bi-polianalíticas de orden 2, a partir de la Integral de tipo Cauchy bi-polianalítica sobre la clase de Lipschitz con exponente arbitrario.

La problemática investigada y los resultados alcanzados han sido expuestos parcialmente por la autora en eventos, tales como la XII Jornada Científica Estudiantil de la Facultad de Matemática e Informática, la XII Jornada Científica Estudiantil de la Universidad de Holguín Oscar Lucero Moya, en los cuales las ponencias presentadas resultaron destacadas, y el XXI Fórum Nacional de Estudiantes Universitarios de Ciencias Naturales, Sociales, Exactas y Humanísticas.

La estructura de la tesis consta de Introducción, dos Capítulos, Conclusiones, Recomendaciones y Bibliografía.

En el Capítulo I se exponen los principales conceptos sobre los cuales está edificada toda la investigación, y que sirven de base teórico-referencial a la resolución del Problema. En él se introducen la Fórmula de Cauchy y algunos de los resultados propios de esta investigación como es la Integral de tipo Cauchy bi-polianalítica sobre la clase de Lipschitz con exponente arbitrario.

En el Capítulo II se soluciona el problema científico. Los resultados obtenidos en los análisis pertinentes del Capítulo I son aplicados a la enunciación y demostración de las Fórmulas de Plemelj-Sojotski y a las soluciones de los problemas del salto y de Dirichlet para funciones bi-polianalíticas.

# Capítulo 1

## **Integral de tipo Cauchy bi-polianalítica sobre la clase de Lipschitz con exponente arbitrario**

Este capítulo está dedicado a la exposición de los fundamentos teóricos que sirven de base a la presente investigación. De manera general, está dividido en tres partes: en la Sección 1.1 se enuncia la teoría necesaria para la solución de los problemas de contorno de Riemann para las funciones analíticas, la cual sirve de teoría preliminar a los problemas de contorno de Riemann para las funciones bi-polianalíticas. Por otra parte, en la Sección 1.2 se describe cuando una función pertenece a la clase de Lipschitz con exponente arbitrario y se plantean algunos de los teoremas auxiliares del resto de la investigación. Por último, en la Sección 1.3 se muestra una fórmula de representación para las funciones bi-polianalíticas, análoga a la Fórmula de Cauchy para funciones analíticas, a partir de la cual, en la Sección 1.4 se define la Integral de tipo Cauchy bi-polianalítica sobre la clase de Lipschitz con exponente arbitrario.

## 1.1. Integral de tipo Cauchy clásica

A continuación se enuncian algunos resultados de la teoría de funciones de la variable compleja. En lo adelante serán de interés funciones definidas sobre algún dominio  $\Omega \subset \mathbb{C}$ . Se supone que  $u(x, y)$  es una función real de dos variables reales  $x$  y  $y$  definida sobre  $\Omega$ . La función  $u(x, y)$  se dice diferenciable en el punto  $(x_0, y_0) \in \Omega$  si puede ser escrita en la forma

$$u(x, y) - u(x_0, y_0) = A(x_0, y_0)(x - x_0) + B(x_0, y_0)(y - y_0) + \epsilon_1(x, y; x_0, y_0)(x - x_0) + \epsilon_2(x, y; x_0, y_0)(y - y_0)$$

donde

$$\epsilon_1(x, y; x_0, y_0)(x - x_0) \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \epsilon_2(x, y; x_0, y_0)(y - y_0) \rightarrow 0$$

cuando  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ . Los coeficientes  $A(x_0, y_0)$  y  $B(x_0, y_0)$  son las derivadas parciales de la función  $u(x, y)$  en el punto  $(x_0, y_0)$ :

$$A(x_0, y_0) = \left. \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right|_{(x, y) = (x_0, y_0)}, \quad B(x_0, y_0) = \left. \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right|_{(x, y) = (x_0, y_0)}$$

**Teorema 1.** *Sea  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  una función de una variable compleja definida sobre el dominio  $\Omega$ . Entonces una condición necesaria y suficiente para que  $f(z)$  sea diferenciable (como una función de una variable compleja) en el punto  $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$  es que las funciones  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$  sean diferenciables (como funciones de dos variables reales  $x$  y  $y$ ) en el punto  $(x_0, y_0)$  y satisfagan las ecuaciones de Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.1)$$

*en el punto  $(x_0, y_0)$ . Si estas condiciones son satisfechas, la derivada de la función  $f(z)$  en el punto  $z_0$ , que será denotada por  $f'(z_0)$ , puede ser representada de una de las siguientes formas*

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

*donde las derivadas parciales están evaluadas en  $(x_0, y_0)$ .*

**Definición 1.** Una función compleja  $f(z)$  la cual es diferenciable en el dominio  $\Omega$ , es decir, en cada punto de  $\Omega$ , se dice analítica <sup>1</sup> en  $\Omega$ . Si  $f(z)$  es analítica en una vecindad de  $z_0$ ,  $f(z)$  se dice analítica en el punto  $z_0$ .

**Observación 1.** Es conocido del cálculo que una condición suficiente para que las funciones  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$  sean diferenciables en el dominio  $\Omega$  es que

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.2)$$

existan y sean continuas sobre  $\Omega$ . Así, una condición suficiente para que la función  $f(z) = u + iv$  sea analítica en  $\Omega$  es que las derivadas parciales (1.2) existan, sean continuas y satisfagan (1.1) sobre  $\Omega$ .

Sea  $\Gamma$  un contorno cerrado suave <sup>2</sup> en el plano de la variable compleja  $z$ . Se denotará por  $\Omega^+$  el dominio dispuesto dentro del contorno  $\Gamma$ , y se llamará interior; y al dominio complementario a  $\Omega^+ \cup \Gamma$ , en el que está contenido el punto infinitamente alejado, se llamará exterior y se denotará con  $\Omega^-$ .

Al igual que en la mayoría de los manuales de la Teoría de funciones de la variable compleja, en [5, pp. 131–133] se enuncia y demuestra la fórmula integral de Cauchy.

**Teorema 2** (Fórmula integral de Cauchy). Sea  $\Gamma$  un contorno cerrado suave en el plano de la variable compleja  $z$ . Si  $f(z)$  es una función analítica en  $\Omega^+$  y continua en  $\Omega^+ \cup \Gamma$ , entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z), & z \in \Omega^+ \\ 0, & z \in \Omega^- \end{cases}$$

Por otra parte, si  $f(z)$  es analítica en el dominio  $\Omega^-$  y continua en  $\Omega^- \cup \Gamma$  y si tiene un valor límite  $f(z)$  para  $z = \infty$  resulta que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(\infty), & z \in \Omega^+ \\ -f(z) + f(\infty), & z \in \Omega^- \end{cases}$$

<sup>1</sup>En ocasiones a las funciones analíticas también se le denominan holomorfas o regulares.

<sup>2</sup>Por contorno suave se entenderá una línea simple, sin puntos múltiples, cerrada o abierta, cuya tangente cambia continuamente; además, esta línea no tiene puntos de retroceso.



La fórmula de Cauchy permite calcular los valores de la función en cualquier punto del dominio, siempre que se conozcan sus valores en la frontera de éste.

**Definición 2.** Se denomina **Integral de Cauchy** a la expresión

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

**Definición 3.** Sea  $\Gamma$  un contorno suave, cerrado o abierto, dispuesto íntegramente en la parte finita del plano;  $\zeta$  es una coordenada compleja de sus puntos y  $f(\zeta)$ , una función continua de los puntos del contorno. La integral

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

es la **Integral de tipo Cauchy**.

La **Integral de tipo Cauchy** representa una función analítica en todo el plano de la variable compleja, a excepción de los puntos del propio contorno  $\Gamma$ . Una demostración de este resultado se puede encontrar en [7, pp. 299–301].

Gájov en su obra [4, pp. 19–22] trata las funciones que satisfacen la condición de Hölder.

**Definición 4.** Sea  $\Gamma$  una curva suave y sea  $f(t)$  una función de los puntos de dicha curva. Se dice que la función  $f(t)$  satisface la condición de Hölder, si para dos puntos cualesquiera de esta curva se verifica

$$|f(t_2) - f(t_1)| < A|t_2 - t_1|^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (1.3)$$

donde  $A$  es una magnitud positiva, la cual se denomina constante de Hölder, y  $\alpha$  es el exponente de Hölder.

Se denota por  $H_\alpha(\Gamma)$  al conjunto de funciones que satisfacen la condición (1.3) sobre el conjunto de puntos pertenecientes a  $\Gamma$ , donde  $\alpha$  es la misma constante para todas las funciones del conjunto  $H_\alpha(\Omega)$ . Si  $\alpha$  fuera mayor que la unidad, de la condición (1.3) se deduce que la derivada  $f'(t)$  es siempre nula, y la función  $f(t)$

sería idénticamente igual a una constante. Por ello se considera que  $0 < \alpha \leq 1$ . Si  $\alpha = 1$ , la condición de Hölder coincide con la condición de Lipschitz <sup>1</sup>. Si  $t_2$  y  $t_1$  son suficientemente próximos uno al otro y la condición de Hölder se cumple para cierto exponente  $\alpha_1$ , también se cumplirá para todo exponente  $\alpha < \alpha_1$ . Lo recíproco, en el caso general, no es cierto. Así pues, a un  $\alpha$  menor le corresponde una clase de funciones más amplia. La clase de funciones más estrecha será aquella en la que las funciones satisfacen la condición de Lipschitz, es decir la condición de Hölder con exponente  $\alpha = 1$ .

**Definición 5.** *El valor principal según Cauchy de una integral singular*

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c}, \quad (a < c < b)$$

*se denomina el límite*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_a^{c-\epsilon} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\epsilon}^b \frac{dx}{x-c} \right]$$

Es conveniente investigar la integral curvilínea singular como una función de variable compleja para el decursar de la presente investigación.

**Definición 6.** *Sea  $\Gamma$  un contorno suave, y sean  $\zeta, t$  las coordenadas complejas de sus puntos. Tomando por centro el punto  $t$  del contorno, se traza una circunferencia de radio  $\rho$ . Se designa por  $g$  la parte del contorno  $\Gamma$  recortada por la circunferencia. El límite de la integral*

$$\int_{\Gamma-g} \frac{f(\zeta)}{\zeta-t} d\zeta$$

*para  $\rho \rightarrow 0$ , lleva el nombre de valor principal de la integral singular*

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta-t} d\zeta$$

---

<sup>1</sup>En bibliografía que trata el tema, en ocasiones la condición de Hölder se denomina condición de Lipschitz con exponente  $\alpha$ .

Se puede comprobar que la integral singular  $\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta-t} d\zeta$  para la función  $f(\zeta)$ , la cual satisface la condición de Hölder, existe en el sentido del valor principal.

Para una función analítica, definida por la Integral de tipo Cauchy, el propio contorno de integración es una línea singular. A continuación se enuncia un resultado relacionado con el comportamiento de la Integral de tipo Cauchy en el propio contorno de integración.

**Teorema 3** (Lema fundamental). *Si la densidad  $f(\zeta)$  satisface la condición de Hölder y el punto  $t$  no coincide con los extremos del contorno suave  $\Gamma$ , la función*

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - f(t)}{\zeta - z} d\zeta$$

*se porta, al pasar por el punto  $z = t$  del contorno, como una función continua.*

El resultado que aparece a continuación está relacionado con los valores límites de la Integral de tipo Cauchy en el contorno de integración, en los cuales interviene una integral singular.

Se designa por  $\Phi^+(t)$ ,  $\psi^+(t)$  los valores límites de las funciones analíticas  $\Phi(z)$ ,  $\psi(z)$  respectivamente, cuando el punto  $z$  va aproximándose desde el interior de  $\Gamma$  al punto  $t$  del contorno, y con  $\Phi^-(t)$ ,  $\psi^-(t)$ , cuando dicha aproximación se realiza desde afuera<sup>1</sup>. Los valores de las funciones correspondientes en el punto  $t$  del contorno, se designan simplemente  $\Phi(t)$ ,  $\psi(t)$ , con la particularidad de que la integral singular  $\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta-t} d\zeta$  se entiende en el sentido del valor principal. Se parte de las igualdades,

$$\int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} 2\pi i, & z \in \Omega^+ \\ 0, & z \in \Omega^- \\ \pi i, & z \in \Gamma \end{cases}$$

y se tiene

$$\begin{aligned} \psi^+(t) &= \Phi^+(t) - f(t) \\ \psi^-(t) &= \Phi^-(t) \\ \psi(t) &= \Phi(t) - \frac{1}{2}f(t) \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Para un contorno abierto esto corresponde a los valores límites a la izquierda y a la derecha.

Como la función  $\psi(t)$  es continua, en virtud del Teorema 3, los miembros derechos de las igualdades anteriores son coincidentes. De aquí se obtiene que

$$\begin{aligned}\Phi^+(t) &= \frac{1}{2}f(t) + \Phi(t) \\ \Phi^-(t) &= -\frac{1}{2}f(t) + \Phi(t)\end{aligned}\tag{1.4}$$

Las fórmulas (1.4) se denominan **Fórmulas de Plemelj-Sojotski**.

**Teorema 4.** Sea  $\Gamma$  un contorno suave, cerrado o abierto, y sea  $f(\zeta)$  una función de los puntos del contorno que satisface la condición de Hölder. En este caso la **Integral de tipo Cauchy**

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

tiene valores límites  $\Phi^+(t)$ ,  $\Phi^-(t)$  en todos los puntos del contorno  $\Gamma$  no coincidentes con sus extremos, al aproximarse al contorno de la izquierda o de la derecha por una vía cualquiera, y estos valores límites se expresan a través de las **Fórmulas de Plemelj-Sojotski** (1.4).

## 1.2. Teoremas y definiciones auxiliares

Stein en su obra [8, pp. 176–180] define cuando una función  $f$  definida sobre un conjunto  $F$  cerrado de  $\mathbb{R}^n$ , pertenece a la clase de Lipschitz con exponente arbitrario.

**Definición 7** (Clase de Lipschitz con exponente arbitrario). Sea  $k \in \mathbb{Z}_+$ , y se asume que  $k < \gamma \leq k + 1$ . Se dice que una función  $f$  definida sobre  $F$  pertenece a la clase de Lipschitz con exponente arbitrario, y se denotará por  $f \in Lip(\gamma, F)$ , si existen funciones  $f^j$ ,  $0 < |j| \leq k$  definidas sobre  $F$ , con  $f^0 = f$ , y tal que si

$$f^j(x) = \sum_{|j+l| < k} \frac{f^{j+l}(y)}{l!} (x - y)^l + R_j(x, y)\tag{1.5}$$

entonces

$$|f^j(x)| \leq M, \quad y \quad |R_j(x, y)| \leq M|x - y|^{\gamma-|j|}, \quad \forall x, y \in F, |j| \leq k\tag{1.6}$$

donde  $M$  es una constante positiva,  $j$  y  $l$  denotan índices múltiples  $j = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ ,  $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$  con  $j! = j_1!j_2!\dots j_n!$ , y  $|j| = j_1 + j_2 + \dots + j_n$ ;  $x^l = x_1^{l_1}x_2^{l_2}\dots x_n^{l_n}$ .

Se puede notar que la función  $f^{(0)} = f$  no necesariamente determina las  $f^j(x)$ , ( $0 < |j| \leq k$ ) únicamente; (se puede considerar, por ejemplo, el caso de una  $f$  definida sobre  $F$ , donde  $F$  es un conjunto finito). Así, en orden de evitar esta ambigüedad, cuando se habla de un elemento de  $Lip(\gamma, F)$  se hace referencia de hecho a la colección  $\{f^j(x)\}_{|j| \leq k}$  de funciones que satisfacen (1.5) y (1.6). La norma de un elemento en  $Lip(\gamma, F)$  será entonces tomada como la más pequeña  $M$  para la cual la desigualdad (1.6) se satisface. En la definición recién adoptada se hace una excepción si  $F = \mathbb{R}^n$ . Por  $Lip(\gamma, F)$  se debe entonces entender el espacio lineal de  $f^0 = f$  solo; para la cual por supuesto que existe  $\{f^j(x)\}_{|j| \leq k}$  que satisface (1.5) y (1.6).

Nuevamente la norma es tomada por la  $M$  más pequeña que satisface (1.6). Esta convención, la cual es adoptada con el objetivo de disponer de una notación más cómoda, es consistente con la definición general de  $Lip(\gamma, F)$ , además puede ser fácilmente visto que  $f^j(x)$ ,  $|j| \geq 1$ , son únicamente determinadas por  $f$ , si  $F = \mathbb{R}^n$ . Más particularmente, si  $f \in Lip(\gamma, \mathbb{R}^n)$ , acorde a la definición recién dada, entonces  $f$  es continua y acotada y tiene derivadas parciales acotadas de orden no mayor que  $k$ ; además,  $\frac{\partial^j f}{\partial x^j} = f^j$ ,  $|j| \leq k$ , y las funciones  $f^j$ , para  $|j| = k$  pertenecen al espacio  $Lip(\gamma - k, \mathbb{R}^n)$ . Lo opuesto también es verdadero y fácilmente establecido. En el artículo de Begehr [1] se enuncian los resultados teóricos siguientes

**Teorema 5** (de la Divergencia de Gauss). *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un dominio regular,  $f, g \in C^1(\Omega; \mathbb{R}) \cap C(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$ . Entonces*

$$\int_{\Omega} (f_x + g_y) dx dy = \int_{\partial\Omega} (f dy - g dx).$$

O en su forma compleja,

$$\int_{\Omega} w_z dx dy = \frac{1}{2i} \int_{\partial\Omega} w dz, \quad \int_{\Omega} w_z dx dy = -\frac{1}{2i} \int_{\partial\Omega} w d\bar{z}$$

donde  $z = x + iy$ ,  $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$ ,  $\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$ ,  $w = u + iv \in C^1(\Omega; \mathbb{C}) \cap C(\overline{\Omega}; \mathbb{C})$

**Teorema 6** (Representación de Cauchy- Pompeiu). Sea  $w \in C^1(\Omega; \mathbb{C}) \cap C(\overline{\Omega}; \mathbb{C})$ . Entonces

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta \\ w(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z} d\bar{\zeta} - \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{w_{\zeta}(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta \end{aligned}$$

**Definición 8.** Los operadores de Cauchy- Pompeiu para los operadores diferenciales  $\partial_z^m \partial_{\bar{z}}^n$  y dominios  $\Omega$  en el plano complejo son

$$T_{m,n}f(z) = \int_{\Omega} K_{m,n}(z - \zeta) f(\zeta) d\xi d\eta$$

donde para  $m + n \geq 0$ ,  $m^2 + n^2 > 0$ ,

$$K_{m,n} = \begin{cases} \frac{(-1)^m (-m)!}{(n-1)! \pi} & , si \quad m \leq 0, \\ \frac{(-1)^n (-n)!}{(n-1)! \pi} z^{m-1} \bar{z}^{n-1} & , si \quad n \leq 0, \\ \frac{z^{m-1} \bar{z}^{n-1}}{(m-1)!(n-1)! \pi} [\log |z|^2 - \sum_{\mu=1}^{m-1} \frac{1}{\mu} - \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\nu}] & , si \quad 1 \leq m, n. \end{cases}$$

Ellos proporcionarán a través de  $w = T_{m,n}f$  soluciones particulares para  $\partial_z^m \partial_{\bar{z}}^n = f$ .

En particular

$$\begin{aligned} T_{0,n}f(z) &= \frac{(-1)^n}{(n-1)! \pi} \int_{\Omega} \frac{(\bar{\zeta} - \bar{z})^{n-1}}{\zeta - z} f(\zeta) d\xi d\eta \\ T_{m,0}f(z) &= \frac{(-1)^m}{(m-1)! \pi} \int_{\Omega} \frac{(\zeta - z)^{m-1}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} f(\zeta) d\xi d\eta \end{aligned}$$

Además,  $T_{0,0}$  es entendido como el operador identidad,  $T_{0,0}f = f$

**Teorema 7** (Operador de Pompeiu). Sea  $\Omega$  un dominio acotado. Si  $f \in L_1(\overline{\Omega})$ . Entonces las integrales

$$T_{\Omega}f(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{f(\zeta)}{\bar{\zeta} - \bar{z}} d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}, \quad \bar{T}_{\Omega}f(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\tilde{\xi} d\tilde{\eta},$$

existen para todo punto  $z$  fuera de  $\overline{\Omega}$ ,  $T_{\Omega}f(z)$  y  $\bar{T}_{\Omega}f(z)$  son analíticas fuera de  $\overline{\Omega}$  con respecto a  $z$  y  $\bar{z}$  respectivamente, y se desaparecen en el infinito.

### 1.3 Fórmula de Cauchy para funciones bi-polianalíticas

Una propiedad de suma importancia de este operador es

$$\partial_{\bar{z}} T_{\Omega} f(z) = f(z)$$

Vekua en su libro [9, pp. 38–40] enuncia y demuestra resultados relacionados con propiedades del Operador de Pompeiu con respecto a varias clases de funciones.

**Teorema 8.** *Sea  $\Omega$  un dominio acotado. Si  $f \in L_p(\overline{\Omega})$ ,  $p > 2$ , entonces la función  $g = T_{\Omega} f$  satisface las condiciones*

$$|g(z)| \leq M_1 L_p(f, \partial\Omega), \quad z \in \Omega$$

$$|g(z_1) - g(z_2)| \leq M_2 L_p(f, \partial\Omega) |z_1 - z_2|^{\alpha}, \quad \alpha = \frac{p-2}{p}$$

donde  $z_1, z_2$  son puntos arbitrarios del plano, y  $M_1, M_2$  son constantes,  $M_1$  que depende de  $p$  y de  $\Omega$ , mientras que  $M_2$  depende solo de  $p$ .

**Corolario 1.** *Si  $f \in L_p(\overline{\Omega})$ ,  $p > 2$  y  $T_{\Omega} f$  existe para un punto  $z = z_0$  fijo, entonces  $T_{\Omega} f \in H_{\alpha}(\Omega)$ ,  $\alpha = \frac{p-2}{p}$  y*

$$T_{\Omega} f = O(|z|^{\frac{p-2}{p}}) \text{ en una vecindad de } z = \infty$$

### 1.3. Fórmula de Cauchy para funciones bi-polianalíticas

En el artículo de los autores Begehr y Kumar [3] se define el concepto de función bi-polianalítica de orden  $n$  y se brinda una Fórmula de Representación para dichas funciones, análoga a la Fórmula de Cauchy para funciones analíticas.

**Definición 9.** *Se dice que  $f$  es una función bi-polianalítica de orden  $n$ , si satisface el siguiente sistema*

$$f_{\bar{z}} = \frac{\lambda - 1}{4\lambda} \phi + \frac{\lambda + 1}{4\lambda} \bar{\phi}, \quad \partial_{\bar{z}}^n \phi = 0 \tag{1.7}$$

### 1.3 Fórmula de Cauchy para funciones bi-polianalíticas

A partir de la definición de función bi-polianalítica de orden  $n$ , se tiene que

$$f_{\bar{z}} = \frac{\lambda - 1}{4\lambda} \phi + \frac{\lambda + 1}{4\lambda} \bar{\phi} \quad (1.8)$$

Al calcular el conjugado de la expresión anterior:

$$f_z = \frac{\lambda + 1}{4\lambda} \phi + \frac{\lambda - 1}{4\lambda} \bar{\phi}, \quad (1.9)$$

multiplicar la ecuación (1.8) por el factor  $(\lambda - 1)$  y la ecuación (1.9) por el factor  $(\lambda + 1)$ ,

$$\begin{aligned} (\lambda - 1)f_{\bar{z}} &= \frac{(\lambda - 1)^2}{4\lambda} \phi + \frac{(\lambda + 1)(\lambda - 1)}{4\lambda} \bar{\phi} \\ (\lambda + 1)f_z &= \frac{(\lambda + 1)^2}{4\lambda} \phi + \frac{(\lambda + 1)(\lambda - 1)}{4\lambda} \bar{\phi} \end{aligned}$$

y restar las ecuaciones últimas, se obtiene:

$$\begin{aligned} (\lambda - 1)f_{\bar{z}} - (\lambda + 1)f_z &= \frac{(\lambda - 1)^2 - (\lambda + 1)^2}{4\lambda} \phi \\ (\lambda - 1)f_{\bar{z}} - (\lambda + 1)f_z &= \frac{-4\lambda}{4\lambda} \phi \\ \phi &= (\lambda + 1)f_z - (\lambda - 1)f_{\bar{z}} \end{aligned}$$

lo que implica

$$\phi = (\lambda + 1)\bar{f_z} - (\lambda - 1)f_{\bar{z}} \quad (1.10)$$

Calculándose  $\partial_{\bar{z}}^n \phi$  en la expresión (1.10), se obtiene:

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}}^n \phi &= (\lambda + 1)\partial_{\bar{z}}^n (\bar{\partial_z f}) - (\lambda - 1)\partial_{\bar{z}}^n (\partial_z f) \\ (\lambda + 1)\partial_{\bar{z}}^n \partial_z f - (\lambda - 1)\partial_{\bar{z}}^{n+1} f &= 0 \end{aligned}$$

Luego el sistema (1.7) puede ser reescrito como

$$(1 - \lambda)\partial_{\bar{z}}^{n+1} f + (1 + \lambda)\partial_z \partial_{\bar{z}}^n f = 0 \quad (1.11)$$

**Teorema 9** (Fórmula de Cauchy para funciones bi-polianalíticas). *Sea  $\Omega$  un dominio regular <sup>1</sup>, entonces cualquier función bi-polianalítica de orden  $n$  en  $\Omega$  tal que  $f \in$*

<sup>1</sup>Se entiende por dominio regular a un dominio acotado con frontera suave.



### 1.3 Fórmula de Cauchy para funciones bi-polianalíticas

$C(\overline{\Omega})$  puede ser representada como

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \sum_{\nu=1}^n \left\{ \frac{(-1)^\nu}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{\lambda - 1}{4\lambda} \partial_{\bar{\zeta}}^{n-\nu} \omega(\zeta, z) \partial_{\bar{\zeta}}^{\nu-1} \phi(\zeta) d\zeta \right. \\ \left. - \frac{\lambda + 1}{4\lambda} \partial_{\bar{\zeta}}^{n-\nu} \tilde{\omega}(\zeta, z) \overline{\partial_{\bar{\zeta}}^{\nu-1} \phi(\zeta)} d\bar{\zeta} \right\} \quad (1.12)$$

donde  $\omega(\zeta, z) = T_{0,n}w(\zeta)$ ,  $\tilde{\omega}(\zeta, z) = T_{n,0}w(\zeta)$  con  $w(\zeta) = \frac{1}{\zeta - z}$  para un  $z \in \Omega$  fijo.

**Demostración 1.** Al aplicar el Teorema 6

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{f_{\bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \frac{\lambda - 1}{4\lambda} \int_{\Omega} \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta - \frac{1}{\pi} \frac{\lambda + 1}{4\lambda} \int_{\Omega} \frac{\overline{\phi(\zeta)}}{\zeta - z} d\xi d\eta$$

Sea  $z \in \Omega$  fijo y se considera que  $w(\zeta) = \frac{1}{\zeta - z}$

$$\omega(\zeta, z) = T_{0,n}w(\zeta) = \frac{(-1)^n}{(n-1)! \pi} \int_{\Omega} \frac{(\tilde{\zeta} - \zeta)^{n-1}}{\tilde{\zeta} - \zeta} \frac{d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}}{\tilde{\zeta} - z}$$

En virtud del Teorema 5 se tiene que

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{(-1)^\nu}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \partial_{\bar{\zeta}}^{n-\nu} \omega(\zeta, z) \partial_{\bar{\zeta}}^{\nu-1} \phi(\zeta) d\zeta \\ = \sum_{\nu=1}^n \frac{(-1)^\nu}{\pi} \int_{\Omega} \{ \partial_{\bar{\zeta}}^{n-\nu+1} \omega(\zeta, z) \partial_{\bar{\zeta}}^{\nu-1} \phi(\zeta) + \partial_{\bar{\zeta}}^{n-\nu} \omega(\zeta, z) \partial_{\bar{\zeta}}^{\nu} \phi(\zeta) \} d\xi d\eta \\ = -\frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \partial_{\bar{\zeta}}^n \omega(\zeta, z) \phi(\zeta) d\xi d\eta + \frac{(-1)^n}{\pi} \int_{\Omega} \omega(\zeta, z) \partial_{\bar{\zeta}}^n \phi(\zeta) d\xi d\eta \\ = -\frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta$$

De modo similar puede ser tratado el término

$$\frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{\overline{\phi(\zeta)}}{\zeta - z} d\xi d\eta$$

## 1.4 Definición de la Integral de tipo Cauchy bi-polianalítica sobre la clase de Lipschitz con exponente arbitrario

---

si se tiene en cuenta que

$$\tilde{\omega}(\zeta, z) = T_{n,0}w(\zeta) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!\pi} \int_{\Omega} \frac{(\tilde{\zeta} - \zeta)^{n-1}}{\tilde{\zeta} - \zeta} \frac{d\tilde{\xi}d\tilde{\eta}}{\tilde{\zeta} - z}$$

La representación (1.12) es un tipo de fórmula de Cauchy para funciones bi-polianalíticas. Además de los valores de frontera de la propia función  $f$ , también los valores de frontera de la función polianalítica asociada  $\phi$  y sus derivadas con respecto a  $\bar{z}$  tienen lugar.

### 1.4. Definición de la Integral de tipo Cauchy bi-polianalítica sobre la clase de Lipschitz con exponente arbitrario

En esta sección se introduce la herramienta matemática que se usará en el estudio de los problemas de contorno que se abordarán en el último capítulo. Por comodidad en la notación, se ha decidido considerar el caso de funciones bi-polianalíticas de orden 2. Es necesario resaltar que un procedimiento totalmente análogo al que será presentado aquí, puede ser desarrollado en el caso general.

Al analizar el caso cuando  $n = 2$  en la fórmula de representación (1.12), se obtiene:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \left\{ \frac{\lambda - 1}{4\lambda} \phi(\zeta) \partial_{\bar{\zeta}} \omega(\zeta, z) d\zeta - \frac{\lambda + 1}{4\lambda} \overline{\phi(\zeta)} \partial_{\zeta} \tilde{\omega}(\zeta, z) d\bar{\zeta} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \left\{ \frac{\lambda - 1}{4\lambda} \omega(\zeta, z) \partial_{\bar{\zeta}} \phi(\zeta) d\zeta - \frac{\lambda + 1}{4\lambda} \tilde{\omega}(\zeta, z) \partial_{\bar{\zeta}} \phi(\zeta) d\bar{\zeta} \right\} \\ f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{\lambda - 1}{4\lambda} \left\{ \omega(\zeta, z) \partial_{\bar{\zeta}} \phi(\zeta) - \phi(\zeta) \partial_{\bar{\zeta}} \omega(\zeta, z) \right\} d\zeta \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{\lambda + 1}{4\lambda} \left\{ \tilde{\omega}(\zeta, z) \partial_{\bar{\zeta}} \phi(\zeta) - \overline{\phi(\zeta)} \partial_{\zeta} \tilde{\omega}(\zeta, z) \right\} d\bar{\zeta} \quad (1.13) \end{aligned}$$

## 1.4 Definición de la Integral de tipo Cauchy bi-polianalítica sobre la clase de Lipschitz con exponente arbitrario

---

donde  $\omega(\zeta, z)$  y  $\tilde{\omega}(\zeta, z)$  están dadas por

$$\omega(\zeta, z) = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{\overline{\zeta - \zeta}}{\zeta - \zeta} \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}$$

$$\tilde{\omega}(\zeta, z) = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{\zeta - \zeta}{\overline{\zeta - \zeta}} \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}$$

Se supone que  $f$  pertenece al espacio  $Lip(\gamma, \Gamma)$  con  $2 < \gamma \leq 3$ . Se recuerda que una función de esta clase se identifica con la colección  $f^j$ . A partir de los elementos de esta colección se construyen convenientemente las siguientes funciones:

$$f^* = \frac{1}{2}(f^{(1,0)} + if^{(0,1)}) \quad (1.14)$$

$$f^{**} = \frac{1}{4}(f^{(2,0)} + f^{(0,2)})$$

$$f^{***} = \frac{1}{4}(f^{(2,0)} - f^{(0,2)} + 2if^{(1,1)})$$

lo que implica:

$$\phi = (\lambda + 1)\overline{f^*} - (\lambda - 1)f^*$$

$$\partial_{\bar{z}}\phi = (\lambda + 1)f^{**} - (\lambda - 1)f^{***}$$

Obsérvese que se cumple que  $\overline{f^{**}} = f^{**}$ , pero por simetría en las expresiones se dejará escrito  $\overline{f^{**}}$  en los lugares que corresponda. Al sustituir las expresiones obtenidas para  $\phi$  y  $\partial_{\bar{z}}\phi$  en la fórmula de representación (1.13) resulta

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f^{(0,0)}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\lambda - 1}{4\lambda} \omega(\zeta, z) [(\lambda + 1)f^{**}(\zeta) - (\lambda - 1)f^{***}(\zeta)] d\zeta -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\lambda - 1}{4\lambda} \partial_{\bar{\zeta}} \omega(\zeta, z) [(\lambda + 1)\overline{f^*}(\zeta) - (\lambda - 1)f^*(\zeta)] d\bar{\zeta} -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\lambda + 1}{4\lambda} \tilde{\omega}(\zeta, z) [(\lambda + 1)\overline{f^{**}(\zeta)} - (\lambda - 1)\overline{f^{***}(\zeta)}] d\bar{\zeta} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\lambda + 1}{4\lambda} \partial_{\zeta} \tilde{\omega}(\zeta, z) [(\lambda + 1)f^*(\zeta) - (\lambda - 1)\overline{f^*}(\zeta)] d\bar{\zeta}$$

## 1.4 Definición de la Integral de tipo Cauchy bi-polianalítica sobre la clase de Lipschitz con exponente arbitrario

---

De este modo se arriba a la definición de la herramienta fundamental del resto de esta investigación

**Definición 10.** Sea  $\Gamma$  un contorno suave, dispuesto íntegramente en la parte finita del plano;  $\zeta$  tal que  $\zeta = \xi + i\eta$  y  $g(\zeta)$  una función que pertenece al espacio  $Lip(\gamma, \Gamma)$  con  $2 < \gamma \leq 3$  sobre los puntos del contorno. La integral

$$\begin{aligned}
 (C_{\Gamma}g)(z) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g^{(0,0)}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \\
 & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\lambda - 1}{4\lambda} \omega(\zeta, z) [(\lambda + 1)g^{**}(\zeta) - (\lambda - 1)g^{***}(\zeta)] d\zeta - \\
 & - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\lambda - 1}{4\lambda} \partial_{\bar{\zeta}} \omega(\zeta, z) [(\lambda + 1)\overline{g^*(\zeta)} - (\lambda - 1)g^*(\zeta)] d\bar{\zeta} - \\
 & - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\lambda + 1}{4\lambda} \tilde{\omega}(\zeta, z) [(\lambda + 1)\overline{g^{**}(\zeta)} - (\lambda - 1)\overline{g^{***}(\zeta)}] d\bar{\zeta} + \\
 & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\lambda + 1}{4\lambda} \partial_{\zeta} \tilde{\omega}(\zeta, z) [(\lambda + 1)g^*(\zeta) - (\lambda - 1)\overline{g^*(\zeta)}] d\zeta
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

se llamará Integral de tipo Cauchy para la función  $g$ .

### 1.4.1. Legitimidad de la definición

**Proposición 1.** La función compleja  $(C_{\Gamma}g)(z)$  está correctamente definida para todo  $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$

**Demostración 2.** Para demostrar que la función  $(C_{\Gamma}g)(z)$  existe para todo  $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$  es suficiente probar que cada uno de los sumandos que la definen son integrales finitas.

El primer sumando de la función  $(C_{\Gamma}g)(z)$  es la Integral de tipo Cauchy clásica, la cual está bien definida. Falta demostrar que los términos restantes también lo son. Se divide el análisis en cuatro funciones auxiliares

$$I(z) = \int_{\Gamma} \omega(\zeta, z) [(\lambda + 1)g^{**}(\zeta) - (\lambda - 1)g^{***}(\zeta)] d\zeta$$

## 1.4 Definición de la Integral de tipo Cauchy bi-polianalítica sobre la clase de Lipschitz con exponente arbitrario

---

$$II(z) = \int_{\Gamma} \partial_{\bar{\zeta}} \omega(\zeta, z) [(\lambda + 1) \overline{g^*(\zeta)} - (\lambda - 1) g^*(\zeta)] d\zeta$$

$$III(z) = \int_{\Gamma} \tilde{\omega}(\zeta, z) [(\lambda + 1) \overline{g^{**}(\zeta)} - (\lambda - 1) \overline{g^{***}(\zeta)}] d\bar{\zeta}$$

$$IV(z) = \int_{\Gamma} \partial_{\zeta} \tilde{\omega}(\zeta, z) [(\lambda + 1) g^*(\zeta) - (\lambda - 1) \overline{g^*(\zeta)}] d\bar{\zeta}$$

Se analiza primeramente la función  $I(z)$ . Al determinar el módulo de su integrando

$$|\omega(\zeta, z) [(\lambda + 1) g^{**}(\zeta) - (\lambda - 1) g^{***}(\zeta)]| = |\omega(\zeta, z)| |[(\lambda + 1) g^{**}(\zeta) - (\lambda - 1) g^{***}(\zeta)]|$$

pero,

$$\begin{aligned} |\omega(\zeta, z)| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{\overline{\tilde{\zeta} - \zeta}}{\tilde{\zeta} - \zeta} \frac{d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}}{\tilde{\zeta} - z} \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \left| \frac{\overline{\tilde{\zeta} - \zeta}}{\tilde{\zeta} - \zeta} \frac{d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}}{\tilde{\zeta} - z} \right| = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \left| \frac{\overline{\tilde{\zeta} - \zeta}}{\tilde{\zeta} - \zeta} \right| \left| \frac{d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}}{\tilde{\zeta} - z} \right| \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}}{|\tilde{\zeta} - z|} < +\infty \end{aligned}$$

puesto que, al hacer la sustitución  $\tilde{\zeta} - z = \rho e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \rho \leq \epsilon$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , resulta

$$\frac{1}{\pi} \int_{B(z, \epsilon)} \frac{d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}}{|\tilde{\zeta} - z|} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\epsilon} \frac{\rho}{\rho} d\rho d\theta = 2\epsilon$$

donde  $B = B(z, \epsilon)$  es la bola de centro  $z$  y radio  $\epsilon$ .

La función  $[(\lambda + 1) g^{**}(\zeta) - (\lambda - 1) g^{***}(\zeta)]$  es continua sobre la curva  $\Gamma$ , la cual es un conjunto compacto, y sobre un compacto una función continua es acotada, de ahí que  $I(z)$  es una integral finita puesto que su función integrando es acotada por ser el producto de una función continua por una acotada.

Por otra parte,

$$II(z) = \int_{\Gamma} \partial_{\bar{\zeta}} \omega(\zeta, z) [(\lambda + 1) \overline{g^*(\zeta)} - (\lambda - 1) g^*(\zeta)] d\zeta$$

## 1.4 Definición de la Integral de tipo Cauchy bi-polianalítica sobre la clase de Lipschitz con exponente arbitrario

---

pero,

$$\begin{aligned}
 \partial_{\bar{\zeta}} \omega(\zeta, z) &= \partial_{\bar{\zeta}} \left( \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{\overline{\tilde{\zeta} - \zeta}}{\tilde{\zeta} - \zeta} \frac{d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}}{\tilde{\zeta} - z} \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \partial_{\bar{\zeta}} \left( \frac{\overline{\tilde{\zeta} - \zeta}}{\tilde{\zeta} - \zeta} \right) \frac{d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}}{\tilde{\zeta} - z} \\
 &= -\frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{\tilde{\zeta} - \zeta} \frac{d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}}{\tilde{\zeta} - z} \\
 &= -\frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{\tilde{\zeta} - \zeta} - \frac{1}{\tilde{\zeta} - z} \right) \frac{d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}}{\tilde{\zeta} - z} \\
 &= -\frac{1}{\zeta - z} \left( \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{\tilde{\zeta} - \zeta} d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} - \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{\tilde{\zeta} - z} d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} \right)
 \end{aligned}$$

Además,  $1 \in L_p$ ,  $\forall p$ , en particular para  $p > 2$  esto va a implicar, en virtud del Corolario 1, que  $\frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{\tilde{\zeta} - \zeta} d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}$  y  $\frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{\tilde{\zeta} - z} d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}$  pertenezcan a la clase de funciones de  $H_{\alpha}(\Omega)$  con exponente  $\alpha = \frac{p-2}{p}$ . De ahí que, al hacer  $\varphi(\zeta, z) = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{\tilde{\zeta} - \zeta} d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} + \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{\tilde{\zeta} - z} d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}$

$$\begin{aligned}
 II(z) &= \int_{\Gamma} \partial_{\bar{\zeta}} \omega(\zeta, z) [(\lambda + 1) \overline{g^*(\zeta)} - (\lambda - 1) g^*(\zeta)] d\zeta \\
 &= \int_{\Gamma} -\frac{\varphi(\zeta, z)}{\zeta - z} [(\lambda + 1) \overline{g^*(\zeta)} - (\lambda - 1) g^*(\zeta)] d\zeta
 \end{aligned}$$

De ahí que  $II(z)$  es una integral finita.

En el caso de la función  $III(z)$  el análisis es análogo al de la  $I(z)$ . Se puede demostrar que  $III(z)$  representa una integral finita, puesto que su función integrando es el producto de la función acotada  $\tilde{\omega}(\zeta, z)$  y la función  $(\lambda + 1) \overline{g^{**}(\zeta)} - (\lambda - 1) \overline{g^{***}(\zeta)}$  continua.

Referente a la función

$$IV(z) = \int_{\Gamma} \partial_{\bar{\zeta}} \tilde{\omega}(\zeta, z) [(\lambda + 1) g^*(\zeta) - (\lambda - 1) \overline{g^*(\zeta)}] d\bar{\zeta},$$

## 1.4 Definición de la Integral de tipo Cauchy bi-polianalítica sobre la clase de Lipschitz con exponente arbitrario

---

se cumple para  $\tilde{\omega}(\zeta, z)$  que

$$\begin{aligned}\partial_{\zeta}\tilde{\omega}(\zeta, z) &= \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \partial_{\zeta} \left( \frac{\tilde{\zeta} - \zeta}{\overline{\tilde{\zeta} - \zeta}} \right) \frac{d\tilde{\xi}d\tilde{\eta}}{\tilde{\zeta} - z} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{-1}{\overline{\tilde{\zeta} - \zeta}} \frac{d\tilde{\xi}d\tilde{\eta}}{\tilde{\zeta} - z}.\end{aligned}$$

Pero si  $f(\tau) \in Lip(\alpha, \Gamma) \Rightarrow f^*(\tau) = \overline{f(\tau)} \in Lip(\alpha, \Gamma)$ .

$$IV(z) = \int_{\Gamma} \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{\overline{\tilde{\zeta} - \zeta}} \frac{d\tilde{\xi}d\tilde{\eta}}{\tilde{\zeta} - z} \right\} [(\lambda + 1)g^*(\zeta) - (\lambda - 1)\overline{g^*(\zeta)}] d\bar{\zeta}$$

De ahí que  $IV(z)$  es una integral finita.

### 1.4.2. La Integral de tipo Cauchy representa una función bi-polianalítica de orden 2

**Teorema 10.** *La Integral de tipo Cauchy para la función  $g$  perteneciente a la clase de Lipschitz representa una función bi-polianalítica de orden 2.*

**Demostración 3.** *Para demostrar que la función  $(C_{\Gamma}g)(z)$  representa una función bi-polianalítica de orden 2, es suficiente demostrar que la función  $(C_{\Gamma}g)(z)$  satisface la ecuación (1.11), que en el caso que se analiza,  $n = 2$ , se obtiene:*

$$(1 - \lambda)\partial_{\bar{z}}^3 f + (1 + \lambda)\overline{\partial_z^2 \partial_{\bar{z}} f} = 0. \quad (1.16)$$

Debido a que la función

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g^{(0,0)}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

representa una función analítica en todo el plano de la variable compleja, a excepción de los puntos del contorno  $\Gamma$ , se infiere que  $\partial_{\bar{z}}\Phi(z) = 0$ . Al calcular  $\partial_{\bar{z}}^3(C_{\Gamma}g)(z)$

## 1.4 Definición de la Integral de tipo Cauchy bi-polianalítica sobre la clase de Lipschitz con exponente arbitrario

---

y  $\overline{\partial_z^2 \partial_{\bar{z}}(C_\Gamma g)(z)}$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}}^3(C_\Gamma g)(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\lambda-1}{4\lambda} \left\{ \partial_{\bar{z}}^3 \omega(\zeta, z) [(\lambda+1)g^{**}(\zeta) - (\lambda-1)g^{***}(\zeta)] \right\} d\zeta - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\lambda-1}{4\lambda} \left\{ \partial_{\bar{z}}^3 \partial_{\bar{\zeta}} \omega(\zeta, z) [(\lambda+1)\overline{g^*(\zeta)} - (\lambda-1)g^*(\zeta)] \right\} d\zeta - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\lambda+1}{4\lambda} \left\{ \partial_{\bar{z}}^3 \tilde{\omega}(\zeta, z) [(\lambda+1)\overline{g^{**}(\zeta)} - (\lambda-1)\overline{g^{***}(\zeta)}] \right\} d\bar{\zeta} + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\lambda+1}{4\lambda} \left\{ \partial_{\bar{z}}^3 \partial_{\zeta} \tilde{\omega}(\zeta, z) [(\lambda+1)g^*(\zeta) - (\lambda-1)\overline{g^*(\zeta)}] \right\} d\bar{\zeta} \end{aligned}$$

Se puede demostrar que  $\partial_{\bar{z}}^3 \omega = 0$  y  $\partial_{\bar{z}}^3 \partial_{\bar{\zeta}} \omega = 0$ . Pero,

$$\partial_{\bar{z}}^3 \tilde{\omega}(\zeta, z) = \partial_{\bar{z}}^3 \left( \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{\tilde{\zeta} - \zeta}{\tilde{\zeta} - \zeta} \frac{d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}}{\tilde{\zeta} - z} \right)$$

Se tiene que  $\partial_{\bar{z}} T_{\Omega} f(z) = f(z)$ , donde  $T_{\Omega}$  es el Operador de Pompeiu. Por lo tanto,

$$\partial_{\bar{z}}^3 \tilde{\omega}(\zeta, z) = \partial_{\bar{z}}^2 \left( -\frac{z - \zeta}{z - \zeta} \right) = \partial_{\bar{z}} \left( \frac{z - \zeta}{(z - \zeta)^2} \right) = \frac{-2(z - \zeta)}{(z - \zeta)^3}$$

Por otra parte,

$$\partial_{\bar{z}}^3 [\partial_{\zeta} \tilde{\omega}(\zeta, z)] = \partial_{\zeta} [\partial_{\bar{z}}^3 \tilde{\omega}(\zeta, z)] = \partial_{\zeta} \left[ \frac{-2(z - \zeta)}{(z - \zeta)^3} \right] = \frac{2}{(z - \zeta)^3}$$

De ahí que se obtenga:

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}}^3(C_\Gamma g)(z) &= -\frac{\lambda+1}{4\lambda} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} [(\lambda+1)\overline{g^{**}(\zeta)} - (\lambda-1)\overline{g^{***}(\zeta)}] \frac{-2(z - \zeta)}{(z - \zeta)^3} d\bar{\zeta} + \\ &\quad + \frac{\lambda+1}{4\lambda} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} [(\lambda+1)g^*(\zeta) - (\lambda-1)\overline{g^*(\zeta)}] \frac{2}{(z - \zeta)^3} d\bar{\zeta}, \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}}^3(C_\Gamma g)(z) &= \frac{\lambda+1}{4\lambda} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} [(\lambda+1)\overline{g^{**}(\zeta)} - (\lambda-1)\overline{g^{***}(\zeta)}] \frac{2(z - \zeta)}{(z - \zeta)^3} d\bar{\zeta} + \\ &\quad + \frac{\lambda+1}{4\lambda} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} [(\lambda+1)g^*(\zeta) - (\lambda-1)\overline{g^*(\zeta)}] \frac{2}{(z - \zeta)^3} d\bar{\zeta} \end{aligned}$$



## 1.4 Definición de la Integral de tipo Cauchy bi-polianalítica sobre la clase de Lipschitz con exponente arbitrario

---

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
 \partial_z^2 \partial_{\bar{z}}(C_\Gamma g)(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\lambda-1}{4\lambda} \partial_z^2 \partial_{\bar{z}} \omega(\zeta, z) [(\lambda+1)g^{**}(\zeta) - (\lambda-1)g^{***}(\zeta)] d\zeta - \\
 &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\lambda-1}{4\lambda} \partial_z^2 \partial_{\bar{z}} \partial_{\bar{\zeta}} \omega(\zeta, z) [(\lambda+1)\overline{g^*(\zeta)} - (\lambda-1)g^*(\zeta)] d\zeta - \\
 &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\lambda+1}{4\lambda} \partial_z^2 \partial_{\bar{z}} \tilde{\omega}(\zeta, z) [(\lambda+1)\overline{g^{**}(\zeta)} - (\lambda-1)\overline{g^{***}(\zeta)}] d\bar{\zeta} + \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\lambda+1}{4\lambda} \partial_z^2 \partial_{\bar{z}} \partial_{\zeta} \tilde{\omega}(\zeta, z) [(\lambda+1)g^*(\zeta) - (\lambda-1)\overline{g^*(\zeta)}] d\bar{\zeta} \\
 \overline{\partial_z^2 \partial_{\bar{z}}(C_\Gamma g)(z)} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\lambda-1}{4\lambda} \partial_z^2 \partial_{\bar{z}} \overline{\omega(\zeta, z)} [(\lambda+1)\overline{g^{**}(\zeta)} - (\lambda-1)\overline{g^{***}(\zeta)}] d\bar{\zeta} + \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\lambda-1}{4\lambda} \partial_z^2 \partial_{\bar{z}} \partial_{\zeta} \overline{\omega(\zeta, z)} [(\lambda+1)g^*(\zeta) - (\lambda-1)\overline{g^*(\zeta)}] d\bar{\zeta} \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\lambda+1}{4\lambda} \partial_z^2 \partial_{\bar{z}} \overline{\tilde{\omega}(\zeta, z)} [(\lambda+1)g^{**}(\zeta) - (\lambda-1)g^{***}(\zeta)] d\zeta \\
 &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\lambda+1}{4\lambda} \partial_z^2 \partial_{\bar{z}} \partial_{\zeta} \overline{\tilde{\omega}(\zeta, z)} [(\lambda+1)\overline{g^*(\zeta)} - (\lambda-1)g^*(\zeta)] d\zeta
 \end{aligned}$$

Análogamente, se puede demostrar que  $\overline{\partial_z^2 \partial_{\bar{z}} \tilde{\omega}(\zeta, z)} = 0$  y  $\overline{\partial_z^2 \partial_{\bar{z}} \partial_{\zeta} \tilde{\omega}(\zeta, z)} = 0$ . Además,

$$\overline{\partial_z^2 \partial_{\bar{z}} \omega(\zeta, z)} = \partial_z^2 \partial_{\bar{z}} \overline{\omega(\zeta, z)} = \partial_z^2 \left( -\frac{z-\zeta}{z-\bar{\zeta}} \right) = \partial_z \left( \frac{z-\zeta}{(\zeta-z)^2} \right) = \frac{-2(z-\zeta)}{(\zeta-z)^3}$$

puesto que se cumple que  $\partial_z T_\Omega f(z) = f(z)$ , esto va a implicar que  $\partial_z \overline{T_\Omega f(z)} = \overline{f(z)}$

$$\overline{\partial_z^2 \partial_{\bar{z}} \partial_{\zeta} \omega(\zeta, z)} = \partial_{\zeta} [\partial_z \partial_z^2 \overline{\omega(\zeta, z)}] = \partial_{\zeta} \left( \frac{-2(z-\zeta)}{(\zeta-z)^3} \right) = \frac{2}{(\zeta-z)^3}$$

De ahí que se obtenga:

$$\begin{aligned}
 \overline{\partial_z^2 \partial_{\bar{z}}(C_\Gamma g)(z)} &= -\frac{\lambda-1}{4\lambda} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} [(\lambda+1)\overline{g^{**}(\zeta)} - (\lambda-1)\overline{g^{***}(\zeta)}] \frac{-2(\zeta-z)}{(\zeta-z)^3} d\bar{\zeta} + \\
 &\quad + \frac{\lambda-1}{4\lambda} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} [(\lambda+1)g^*(\zeta) - (\lambda-1)\overline{g^*(\zeta)}] \frac{2}{(\zeta-z)^3} d\bar{\zeta}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\partial_z^2 \partial_{\bar{z}}(C_\Gamma g)(z)} &= \frac{\lambda - 1}{4\lambda} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} [(\lambda + 1)\overline{g^{**}(\zeta)} - (\lambda - 1)\overline{g^{***}(\zeta)}] \frac{2(\zeta - z)}{(\zeta - z)^3} d\bar{\zeta} + \\ &\quad + \frac{\lambda - 1}{4\lambda} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} [(\lambda + 1)g^*(\zeta) - (\lambda - 1)\overline{g^*(\zeta)}] \frac{2}{(\zeta - z)^3} d\bar{\zeta} \end{aligned}$$

Luego, al calcular  $(1 - \lambda)\partial_z^3(C_\Gamma g)(z) + (1 + \lambda)\overline{\partial_z^2 \partial_{\bar{z}}(C_\Gamma g)(z)}$ , se obtiene el resultado esperado.

A partir del resultado obtenido en el Teorema 10 es que en lo que sigue a la Integral de tipo Cauchy para la función  $g$  dada en la Definición 10 se le denominará Integral de tipo Cauchy bi-polianalítica sobre la clase de Lipschitz con exponente arbitrario.

## 1.5. Conclusiones parciales

En este capítulo se expusieron las bases sobre las cuales se desarrollará la solución de un problema de contorno de Riemann, así como la teoría existente hasta el momento relacionada con el problema de esta investigación.

Durante la elaboración de este capítulo se definió la herramienta fundamental en la solución del problema de contorno Riemann: la Integral de tipo Cauchy bi-polianalítica sobre la clase de Lipschitz con exponente arbitrario. Se comprobó que dicha definición es legítima y que la Integral de tipo Cauchy bi-polianalítica sobre la clase de Lipschitz con exponente arbitrario representa una función bi-polianalítica de orden 2, resultado análogo al existente en la teoría de funciones analíticas.

## Capítulo 2

# Problemas de Contorno para funciones bi-polianalíticas

En este capítulo se determinan los valores límites de la Integral de tipo Cauchy bi-polianalítica sobre la clase de Lipschitz con exponente arbitrario. Se presenta una solución del problema del salto para funciones bi-polianalíticas, caso particular importante del problema de contorno de Riemann, y del problema de Dirichlet para funciones bi-polianalíticas.

### 2.1. Fórmulas de Plemelj - Sojotski

Se denota por

$$(C_{\Gamma}^{+}g)(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow t \\ z \in \Omega^{+}}} (C_{\Gamma}g)(z)$$

y

$$(C_{\Gamma}^{-}g)(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow t \\ z \in \Omega^{-}}} (C_{\Gamma}g)(z)$$

### 2.1.1. Continuidad hasta la frontera

Sea la representación

$$\begin{aligned} (C_{\Gamma}g)(z) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g^{(0,0)}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\lambda - 1}{4\lambda} \omega(\zeta, z) [(\lambda + 1)g^{**}(\zeta) - (\lambda - 1)g^{***}(\zeta)] d\zeta - \\ & - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\lambda - 1}{4\lambda} \partial_{\bar{\zeta}} \omega(\zeta, z) [(\lambda + 1)\overline{g^*(\zeta)} - (\lambda - 1)g^*(\zeta)] d\zeta - \\ & - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\lambda + 1}{4\lambda} \tilde{\omega}(\zeta, z) [(\lambda + 1)\overline{g^{**}(\zeta)} - (\lambda - 1)\overline{g^{***}(\zeta)}] d\bar{\zeta} + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\lambda + 1}{4\lambda} \partial_{\zeta} \tilde{\omega}(\zeta, z) [(\lambda + 1)g^*(\zeta) - (\lambda - 1)\overline{g^*(\zeta)}] d\bar{\zeta}, \end{aligned}$$

entonces la función dada por la expresión

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

es la Integral de tipo Cauchy, la cual representa una función analítica en todo el plano de la variable compleja, a excepción de los puntos del propio contorno  $\Gamma$ .

Se analizará la continuidad del resto de los sumandos. Se investiga primeramente la función  $I(z)$

$$\begin{aligned} |I(z) - I(t)| & \leq \left| \int_{\Gamma} \omega(\zeta, z) - \omega(\zeta, t) [(\lambda + 1)g^{**}(\zeta) - (\lambda - 1)g^{***}(\zeta)] d\zeta \right| \\ & \leq \int_{\Gamma} |\omega(\zeta, z) - \omega(\zeta, t)| |[(\lambda + 1)g^{**}(\zeta) - (\lambda - 1)g^{***}(\zeta)]| |d\zeta| \end{aligned}$$

pero, en virtud del Corolario 1,  $\omega(\zeta, z) \in H_{\alpha}(\Omega)$  con respecto a la variable  $z$ , y esto va a implicar que existe una constante  $M > 0$  tal que  $|\omega(\zeta, z) - \omega(\zeta, t)| \leq M |z - t|^{\alpha}$ . Puesto que el producto de una función infinitesimal por una acotada, es una función

infinitesimal, se infiere que  $|I(z) - I(t)| \rightarrow 0$  cuando  $z \rightarrow t$ , lo que es equivalente a que la función  $I(z)$  sea continua hasta la frontera.

Por otra parte,

$$II(z) = \int_{\Gamma} \partial_{\bar{\zeta}} \omega(\zeta) [(\lambda + 1) \overline{g^*(\zeta)} - (\lambda - 1) g^*(\zeta)] d\zeta$$

pero,

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{\zeta}} \omega(\zeta, z) &= \partial_{\bar{\zeta}} \left( \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{\overline{\tilde{\zeta} - \zeta}}{\tilde{\zeta} - \zeta} \frac{d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}}{\tilde{\zeta} - z} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \partial_{\bar{\zeta}} \left( \frac{\overline{\tilde{\zeta} - \zeta}}{\tilde{\zeta} - \zeta} \right) \frac{d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}}{\tilde{\zeta} - z} \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{\tilde{\zeta} - \zeta} \frac{d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}}{\tilde{\zeta} - z} \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{\tilde{\zeta} - \zeta} - \frac{1}{\tilde{\zeta} - z} \right) \frac{d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}}{\tilde{\zeta} - z} \\ &= -\frac{1}{\zeta - z} \left( \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{\tilde{\zeta} - \zeta} d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} - \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{\tilde{\zeta} - z} d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} \right). \end{aligned}$$

Como  $1 \in L_p$ ,  $\forall p$ , en particular para  $p > 2$  va a implicar por el Corolario 1 que  $\frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{\tilde{\zeta} - \zeta} d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}$  y  $\frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{\tilde{\zeta} - z} d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}$  pertenezcan a la clase de funciones de Hölder con exponente  $\alpha = \frac{p-2}{p}$ , lo que implica a su vez que ambas funciones son continuas. Para mayor brevedad en las expresiones se denotará por

$$\begin{aligned} A(\zeta) &= (\lambda + 1) \overline{g^*(\zeta)} - (\lambda - 1) g^*(\zeta) \\ B(\zeta) &= \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{\tilde{\zeta} - \zeta} d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} \\ C(z) &= \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{\tilde{\zeta} - z} d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} \end{aligned}$$

De ahí que

$$\begin{aligned}
 II(z) &= \int_{\Gamma} -\frac{1}{\zeta - z} [B(\zeta) - C(z)] A(\zeta) d\zeta \\
 &= \int_{\Gamma} \frac{-B(\zeta) A(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{\Gamma} \frac{C(z) A(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\
 &= \int_{\Gamma} \frac{-B(\zeta) A(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + C(z) \int_{\Gamma} \frac{A(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta
 \end{aligned}$$

La función  $A(\zeta)$  es continua por su definición y la función  $B(\zeta)A(\zeta)$  es continua por ser el producto de funciones continuas sobre la curva  $\Gamma$ . De ahí que ambas funciones pertenezcan a la clase  $L_p(\Omega)$ ,  $\forall p$ , en particular para  $p > 2$ . En virtud del Corolario 1, las funciones  $\int_{\Gamma} \frac{-B(\zeta)A(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$  y  $\int_{\Gamma} \frac{A(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$  pertenecen a la clase  $H_{\alpha}(\Omega)$ , donde  $\alpha = \frac{p-2}{p}$ . Por lo tanto dichas funciones son continuas. Por último, la función  $C(z) \int_{\Gamma} \frac{A(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$  es también continua al ser el producto de funciones continuas. De estos razonamientos se deduce la continuidad de la función  $II(z)$  sobre la frontera, por ser la suma de funciones continuas una función continua. En el caso de  $III(z)$ ,

$$\begin{aligned}
 III(z) &= \int_{\Gamma} \tilde{\omega}(\zeta) [(\lambda + 1)\overline{g^{**}(\zeta)} - (\lambda - 1)\overline{g^{***}(\zeta)}] d\bar{\zeta} \\
 &= \int_{\Gamma} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{\tilde{\zeta} - \zeta}{\tilde{\zeta} - \zeta} \frac{d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}}{\tilde{\zeta} - z} \right\} D(\zeta) d\bar{\zeta} \\
 &= \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{\zeta} - \zeta}{\tilde{\zeta} - \zeta} \frac{d\bar{\zeta}}{\tilde{\zeta} - z} \right\} D(\zeta) d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{\tilde{\zeta} - z} \left\{ \int_{\Gamma} \frac{\tilde{\zeta} - \zeta}{\tilde{\zeta} - \zeta} D(\zeta) d\bar{\zeta} \right\} d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{E(\zeta)}{\tilde{\zeta} - z} d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} D(\zeta) &= (\lambda + 1)\overline{g^{**}(\zeta)} - (\lambda - 1)\overline{g^{***}(\zeta)} \\ E(\tilde{\zeta}) &= \int_{\Gamma} \frac{\tilde{\zeta} - \zeta}{\overline{\tilde{\zeta} - \zeta}} D(\zeta) d\bar{\zeta} \end{aligned}$$

Se puede ver que  $E(\tilde{\zeta}) \in L_p(\Omega), \forall p$ . Luego

$$III(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{E(\tilde{\zeta})}{\overline{\tilde{\zeta} - z}} d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}$$

pertenece a la clase  $H_{\alpha}(\Omega)$ , donde  $\alpha = \frac{p-2}{p}$ , en virtud del Corolario 1. Por tanto la función  $III(z)$  es continua hasta la frontera.

Finalmente, en el caso de

$$\begin{aligned} IV(z) &= \int_{\Gamma} \partial_{\zeta} \tilde{\omega}(\zeta) [(\lambda + 1)g^*(\zeta) - (\lambda - 1)\overline{g^*(\zeta)}] d\bar{\zeta} \\ &= \int_{\Gamma} \partial_{\zeta} \left( \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{\tilde{\zeta} - \zeta}{\overline{\tilde{\zeta} - \zeta}} \frac{d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}}{\tilde{\zeta} - z} \right) [(\lambda + 1)g^*(\zeta) - (\lambda - 1)\overline{g^*(\zeta)}] d\bar{\zeta} \\ &= \int_{\Gamma} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{-1}{\overline{\tilde{\zeta} - \zeta}} \frac{d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}}{\tilde{\zeta} - z} \right\} F(\zeta) d\bar{\zeta} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{\overline{\tilde{\zeta} - z}} \left\{ \int_{\Gamma} \frac{-1}{\overline{\tilde{\zeta} - \zeta}} F(\zeta) d\bar{\zeta} \right\} d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{\overline{\tilde{\zeta} - z}} \left\{ \int_{\Gamma} \frac{F(\zeta)}{\zeta - \tilde{\zeta}} d\bar{\zeta} \right\} d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{E(\tilde{\zeta})}{\overline{\tilde{\zeta} - z}} d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} F(\zeta) &= (\lambda + 1)g^*(\zeta) - (\lambda - 1)\overline{g^*(\zeta)} \\ E(\tilde{\zeta}) &= \int_{\Gamma} \frac{F(\zeta)}{\zeta - \tilde{\zeta}} d\bar{\zeta} \end{aligned}$$

Se puede comprobar que la función  $E(\tilde{\zeta}) \in L_p(\Omega), \forall p$ . Luego la función  $IV(z)$  pertenece a la clase  $H_\alpha(\Omega)$ , donde  $\alpha = \frac{p-2}{p}$ , según el Corolario 1. Por tanto,  $IV(z)$  es continua hasta la frontera.

### 2.1.2. Valores límites

De las consideraciones anteriores se obtiene que los valores límites de la **Integral de tipo Cauchy bi-polianalítica sobre la clase de Lipschitz con exponente arbitrario** pueden expresarse a través de las fórmulas

$$\begin{aligned}
 (C_\Gamma^+ g)(z)(t) &= \frac{1}{2} g^{(0,0)}(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g^{(0,0)}(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta + \\
 &+ \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\lambda - 1}{4\lambda} \omega(\zeta, z) [(\lambda + 1)g^{**}(\zeta) - (\lambda - 1)g^{***}(\zeta)] d\zeta - \\
 &- \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\lambda - 1}{4\lambda} \partial_{\bar{\zeta}} \omega(\zeta, z) [(\lambda + 1)\overline{g^*(\zeta)} - (\lambda - 1)g^*(\zeta)] d\zeta - \\
 &- \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\lambda + 1}{4\lambda} \tilde{\omega}(\zeta, z) [(\lambda + 1)\overline{g^{**}(\zeta)} - (\lambda - 1)\overline{g^{***}(\zeta)}] d\bar{\zeta} + \\
 &+ \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\lambda + 1}{4\lambda} \partial_{\zeta} \tilde{\omega}(\zeta, z) [(\lambda + 1)g^*(\zeta) - (\lambda - 1)\overline{g^*(\zeta)}] d\bar{\zeta} \\
 (C_\Gamma^- g)(z) &= -\frac{1}{2} g^{(0,0)}(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g^{(0,0)}(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta + \\
 &+ \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\lambda - 1}{4\lambda} \omega(\zeta, z) [(\lambda + 1)g^{**}(\zeta) - (\lambda - 1)g^{***}(\zeta)] d\zeta - \\
 &- \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\lambda - 1}{4\lambda} \partial_{\bar{\zeta}} \omega(\zeta, z) [(\lambda + 1)\overline{g^*(\zeta)} - (\lambda - 1)g^*(\zeta)] d\zeta - \\
 &- \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\lambda + 1}{4\lambda} \tilde{\omega}(\zeta, z) [(\lambda + 1)\overline{g^{**}(\zeta)} - (\lambda - 1)\overline{g^{***}(\zeta)}] d\bar{\zeta} + \\
 &+ \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\lambda + 1}{4\lambda} \partial_{\zeta} \tilde{\omega}(\zeta, z) [(\lambda + 1)g^*(\zeta) - (\lambda - 1)\overline{g^*(\zeta)}] d\bar{\zeta}
 \end{aligned}$$



o de forma abreviada,

$$\begin{aligned}(C_{\Gamma}^{+}g)(t) &= \frac{1}{2}(g(t) + S_{\Gamma}g(t)) \\ (C_{\Gamma}^{-}g)(t) &= \frac{1}{2}(-g(t) + S_{\Gamma}g(t))\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde,

$$\begin{aligned}S_{\Gamma}g(t) &= \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g^{(0,0)}(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\lambda - 1}{4\lambda} \omega(\zeta, t) [(\lambda + 1)g^{**}(\zeta) - (\lambda - 1)g^{***}(\zeta)] d\zeta - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\lambda - 1}{4\lambda} \partial_{\bar{\zeta}} \omega(\zeta, t) [(\lambda + 1)\overline{g^{*}(\zeta)} - (\lambda - 1)\overline{g^{*}(\zeta)}] d\zeta - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\lambda + 1}{4\lambda} \tilde{\omega}(\zeta, t) [(\lambda + 1)\overline{g^{**}(\zeta)} - (\lambda - 1)\overline{g^{***}(\zeta)}] d\bar{\zeta} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\lambda + 1}{4\lambda} \partial_{\zeta} \tilde{\omega}(\zeta, t) [(\lambda + 1)g^{*}(\zeta) - (\lambda - 1)\overline{g^{*}(\zeta)}] d\bar{\zeta}\end{aligned}$$

las cuales se denominarán **Fórmulas de Plemelj - Sojotski**. Al restar y sumar las fórmulas (2.1), se obtiene

$$(C_{\Gamma}^{+}g)(t) - (C_{\Gamma}^{-}g)(t) = g(t)\tag{2.2}$$

$$(C_{\Gamma}^{+}g)(t) + (C_{\Gamma}^{-}g)(t) = S_{\Gamma}g(t)\tag{2.3}$$

## 2.2. Problema del salto para funciones bi-polianalíticas

Sea dada en el contorno simple cerrado suave  $\Gamma$ , que divide el plano de la variable compleja en el dominio interior  $\Omega^{+}$  y el exterior  $\Omega^{-}$ , la función de los puntos del

## 2.2 Problema del salto para funciones bi-polianalíticas

contorno  $g(t)$  que pertenece a la clase de Lipschitz con exponente arbitrario. El **Problema del salto para funciones bi-polianalíticas** [4, p. 110] consiste en hallar las funciones  $G^+(t)$  y  $G^-(t)$ , bi-polianalíticas en los dominios  $\Omega^+$  y  $\Omega^-$  respectivamente, (la función  $G(t)$  bi-polianalítica a trozos <sup>1</sup>) incluido  $z = \infty$ , las cuales se anulen en el infinito y en el contorno  $\Gamma$  satisfagan la correlación lineal

$$G^+(t) - G^-(t) = g(t) \quad (2.4)$$

La función (1.15) en virtud de la fórmula (2.2), ofrece una solución del **Problema del salto para funciones bi-polianalíticas** (2.4). Además, si una función pertenece a la clase de Lipschitz con exponente arbitrario tendrá una representación como la diferencia de los valores límites de la Integral de tipo Cauchy bi-polianalítica sobre la clase de Lipschitz con exponente arbitrario.

¿Será única la solución de este problema? Se demuestra que la solución del **Problema del salto para funciones bi-polianalíticas** no es única, a diferencia de lo que ocurre con dicho problema para funciones analíticas.

Se puede observar que toda función analítica representa una función bi-polianalítica, pues si  $f(z)$  es analítica cumple que

$$\partial_{\bar{z}} f(z) = 0$$

por lo que  $f(z)$  va a satisfacer la ecuación (1.11) y será una función bi-polianalítica. Además, toda función de la clase de Lipschitz con exponente arbitrario es de Hölder, pues se cumple que  $Lip(\gamma_1, \Gamma) \subset Lip(\gamma_2, \Gamma)$  cuando  $\gamma_1 > \gamma_2$ . De ahí que se pueda comprobar que los valores límites de la Integral de tipo Cauchy clásica (1.4) también son soluciones del Problema del Salto para funciones bi-polianalíticas, pues al restar las expresiones

$$\begin{aligned} \Phi^+(t) &= \frac{1}{2}f(t) + \Phi(t) \\ \Phi^-(t) &= -\frac{1}{2}f(t) + \Phi(t) \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Se entiende por función bi-polianalítica a trozos a una función bi-polianalítica en toda parte conexa del plano privada de puntos del contorno.

se obtiene

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = f(t)$$

la cual representa el salto de las funciones analíticas  $\Phi^+(z)$  y  $\Phi^-(z)$  a través del contorno  $\Gamma$ , dado por la función  $f(t) \in H_\alpha(\Gamma)$ . Por lo tanto, en virtud de las consideraciones anteriores, en general, no se puede hablar de la unicidad de la solución del **problema del salto para funciones bi-polianalíticas**.

La solución del problema considerado puede enunciarse mediante el siguiente teorema

**Teorema 11.** *Una solución del problema del salto para funciones bi-polianalíticas es la Integral de tipo Cauchy bi-polianalítica sobre la clase de Lipschitz con exponente arbitrario.*

## 2.3. Problema de Dirichlet para funciones bi-polianalíticas

Dada una función  $f \in Lip(\gamma, \Gamma)$ . ¿Existirá una función  $F$  bi-polianalítica en  $\Omega$  y tal que

$$F|_\Gamma = f ?$$

### Solución

De la ecuación (2.2), si

$$(C_\Gamma^- f)(t) \equiv 0 \tag{2.5}$$

se cumple que  $(C_\Gamma^+ f)(t) = f(t)$ , que es la condición de contorno para el **Problema de Dirichlet para funciones bi-polianalíticas**, por lo que la condición (2.5) es suficiente para la solución de dicho problema. De este modo se ha obtenido el siguiente teorema

**Teorema 12.** *Sea  $\Gamma$  un contorno cerrado y suave y  $f(t)$  una función definida sobre  $\Gamma$  tal que  $f(t) \in Lip(\gamma, \Gamma)$ . Para que la función  $f$  sea el valor de contorno de una función bi-polianalítica en el dominio interior  $\Omega^+$  es suficiente que se cumpla la condición (2.5).*

## 2.4. Conclusiones parciales

En el presente capítulo se determinó una solución del problema del salto para funciones bi-polianalíticas, la cual se comprobó que no es única en general. Además, se encontró una condición suficiente para la solución del problema de Dirichlet para funciones bi-polianalíticas.

# Conclusiones

En este trabajo se obtienen nuevos resultados:

- Se define una Integral de tipo Cauchy bi-polianalítica sobre la clase de Lipschitz con exponente arbitrario.
- Se demuestra la legitimidad de la Integral de tipo Cauchy bi-polianalítica sobre la clase de Lipschitz con exponente arbitrario.
- Se demuestra que la Integral de tipo Cauchy bi-polianalítica sobre la clase de Lipschitz con exponente arbitrario representa una función bi-polianalítica de orden 2.
- Se estudian las propiedades de frontera de esta Integral de tipo Cauchy y se obtiene una fórmula para sus valores límites.
- Se resuelve el problema del salto para funciones bi-polianalíticas.
- Se resuelve el problema de Dirichlet para funciones bi-polianalíticas.

# Recomendaciones

Se recomienda para futuras investigaciones:

- Determinar las condiciones necesarias y suficientes que legitimen la unicidad de la solución del problema del salto para funciones bi-polianalíticas.
- Resolver el Problema de contorno de Riemann homogéneo y no homogéneo para funciones bi-polianalíticas.
- Extender los resultados obtenidos para las funciones bi-polianalíticas de orden 2 a las de orden arbitrario.

# Bibliografía

- [1] H. Begehr. Integral representations in complex, hypercomplex and clifford analysis. *Integral Transforms and Special Functions*, 13:305–316, 2002. DOI: 10.1080/10652460290009079. 14
- [2] H. Begehr, A. Chaudhary, and A. Kumar. Bi-polyanalytic functions on the upper half plane. *Complex Variables and Elliptic Equations: An International Journal*, 55(1–3):305–316, January–March 2010. DOI: 10.1080/17476930902755716. 5
- [3] H. Begehr and A. Kumar. Boundary value problems for bi-polyanalytic functions. *Applicable Analysis*, 85:1045–1077, september 2006. DOI: 10.1080/00036810600835110. 5, 16
- [4] F.D.Gájov. *Problemas de Contorno*. Editorial Mir, Moscú, 1980. 1, 2, 5, 10, 35
- [5] K. Gürlebeck, K. Habetha, and W. Sprößig. *Holomorphic Functions in the Plane and n-dimensional Space*. Birkhäuser Verlag AG, Basel · Boston · Berlin, 2008. 9
- [6] J. Ho. The wiener-hopf method and its aplications in fluids. Honours Thesis, november 2007. 1
- [7] A. I. Markushevich. *Teoría de las funciones analíticas*. Editorial Mir, Moscú, 1987. 10
- [8] E. M. Stein. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton University Press, Princeton, New Yersey, 1970. 13
- [9] I. N. Vekua. *Generalized Analytic Functions*, volume 25. Pergamon Press, International Series of Monographs on Pure and Applied Mathematics, Oxford-London-New York-Paris, 1962. 16