EL PLANTEO ANALÓGICO DE PROBLEMAS EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA. BASES EPISTÉMICAS Y RETOS DIDÁCTICOS

Miguel Cruz Ramírez
Universidad de Holguín, Cuba
e-mail: mcruzr@uho.edu.cu

RESUMEN

El planteo de problemas y el razonamiento analógico constituyen rasgos distintivos del pensamiento matemático avanzado, estrechamente relacionados con la resolución de problemas. El trabajo profundiza en las bases epistémicas y en algunos retos didácticos que tienen lugar al confluir ambos aspectos. Son numerosos los problemas teóricos asociados al planteo analógico de problemas, como la estructura de procesos cognitivos subyacentes, las potencialidades para el desarrollo de la creatividad, las oportunidades que brindan los softwares dinámicos, las limitaciones de los dispositivos de evaluación, entre otros aspectos. En particular, se establece una conexión entre el planteo de problemas matemáticos y la teoría de Gentner sobre el razonamiento analógico. Para ello se parte de una estrategia metacognitiva compuesta por etapas orientadas hacia el planteo creativo de problemas, luego se fundamenta el razonamiento analógico por medio del mapeo de predicados, y finalmente se ejemplifican las conexiones entre ambos procesos a partir de un problema de geometría elemental, apoyado en el paquete GeoGebra de geometría dinámica.

PALABRAS CLAVES: planteo de problemas, razonamiento analógico, cognición matemática, teorema de Walter, teorema de Morley.

MATHEMATICAL PROBLEM POSING IN TEACHING MATHEMATICS. EPISTEMIC FOUNDATIONS AND DIDACTIC CHALLENGES

ABSTRACT

Posing new problems and analogical reasoning constitute distinctive features of the advanced mathematical thought, narrowly related with problem solving. This paper deepens in the epistemic bases and in some didactic challenges that both aspects, take place when converging. There are many theoretical problems associated to mathematical problem posing, as the developmental potentialities of creativity, the opportunities provided by dynamic software, the limitations of the devices of evaluation offer, among other aspects. Particularly, a connection between analogical mathematical problem posing and the theory of Gentner on the analogical reasoning are established. For it purpose, the study start from a meta-cognitive strategy, composed by stages guided toward the creative problem posing, next, the foundations of analogical reasoning is established by means of the mapping of predicates, and finally the paper exemplify the connections

between both processes, using a problem of elementary geometry, supported by GeoGebra software in dynamic geometry.

KEY WORDS: problem posing, analogical reasoning, mathematical cognition, Walter's theorem, Morley's theorem.

INTRODUCCIÓN

El planteo de nuevos problemas siempre ha estado ligado al quehacer matemático. Por un lado, ha sido consustancial el vínculo entre planteo y resolución de problemas para el desarrollo de la Matemática como ciencia (Bonotto y Santo, 2015) mientras que, por otro lado, numerosos currículos vienen promulgando la importancia de la enseñanza y el aprendizaje del planteo y la resolución de problemas, como parte de la educación matemática de las nuevas generaciones (Cai, Jiang, Hwang, Nie, y Hu, 2016). Ambos aspectos reafirman la tesis epistémica consistente en que el quehacer matemático implica un componente didáctico y, recíprocamente, todo fenómeno didáctico tiene entre sus bases un componente matemático (Godino, 2015). Este hecho le confiere a la Educación Matemática un carácter especial, lo cual lo hace radicalmente irreducible a la Didáctica General, aunque sin detrimento de ella.

Dentro del ámbito escolar, plantear nuevos problemas está ligado a numerosas problemáticas tales como su desarrollo conceptual y metodológico, es decir: ¿qué es realmente plantear un problema? ¿Se trata de una habilidad matemática o es una competencia? ¿Cuáles son las etapas por las cuales transcurre el proceso cognitivo subyacente? ¿Cómo evaluar su aprendizaje? ¿Qué dispositivos didácticos permiten efectuar dicha evaluación? Incluso, el propio término "plantear" es susceptible de cuestionamiento. Por ejemplo, en la literatura el desacuerdo ha conllevado al empleo de otros verbos tales como "inventar" (Espinoza, Segovia, y Lupiáñez, 2018) y "elaborar" (Bernardo, 2001). El primero ha sido utilizado con la intención de significar el proceso creativo en su totalidad y no enfocado solamente hacia el planteo como acción final, mientras que el segundo ha sido empleado como sinónimo de "construir", en el sentido de elaborar problemas principalmente con fines docentes, o sea: para motivar la introducción de un nuevo contenido, para ejemplificar la realización de cierto procedimiento, para ilustrar la aplicación de un nuevo conocimiento, para evaluar el desarrollo del aprendizaje, entre otros. Como puede apreciarse, el primer camino es coherente con el planteo como una habilidad que puede ser adquirida por el alumno, mientras que el segundo enfatiza el planteo como una competencia profesional propia del docente.

El planteo de problemas tiene un punto de conexión importante con el desarrollo de la creatividad, en el sentido de motivar la búsqueda intencionada de algo relativamente nuevo. También aquí la discusión terminológica suele conllevar a desacuerdos. Por ejemplo, Abdulla y Cramond (2018) realizan un estudio bibliométrico en siete importantes bases de datos, incluyendo a ERIC (*Educational Resources Education Center*), y culminan defendiendo el término "*problem finding*" incluso por encima de "*problem discovery*" que enfatiza el descubrimiento. Sin embargo, las bases de datos seleccionadas o son demasiados amplias, o bien se especializan en la investigación psicológica, de manera que no pueden trasladarse tácitamente estas conclusiones hacia la Educación Matemática.

En el presente trabajo se utiliza el término "planteo" en el sentido del hallazgo intencionado de problemas matemáticos. A pesar de todo posible cuestionamiento o falta de acuerdo, este término ha sido empleado de forma sistemática en importantes currículos, congresos, y estudios científicos de elevado impacto internacional. Como ejemplos respectivos pueden enumerarse los Estándares Curriculares implementados en los Estados Unidos desde el año 2000, la realización de los congresos ICME (*International Congress on Mathematics Education*), y el desarrollo de estudios ICMI (*International Commission on Mathematical Instruction*). Además, el tesauro de la base de datos *MathEduc* utiliza exactamente en su código D50 el término "*problem posing*", de modo que lo más sugerente es conservar esta denominación y concentrar más los esfuerzos en el desarrollo de sus fundamentos didácticos.

Seguidamente se presentan los resultados de un estudio, donde se establecen bases teóricas viables para fundamentar el planteo analógico de problemas. El empleo de analogías también es un proceso estrechamente relacionado con el quehacer matemático, de manera que el planteo analógico constituye un binomio de especial interés para profundizar en los procesos cognitivos asociados al pensamiento matemático.

DESARROLLO

Tanto el planteo de problemas como el uso de analogías son dos procesos de elevado nivel de complejidad (Bernardo, 2001; Cruz, García, Rojas, y Sigarreta, 2016). El primero de ellos ha sido tratado en la literatura en estrecha relación con la resolución de problemas, mientras que el segundo ha seguido un derrotero enfocado hacia los tipos de razonamiento. Abordar cada uno por separado es un reto, por tal motivo a continuación se presentan aspectos relevantes que pueden esclarecer en primera instancia la relación entre ambos procesos, desde un punto de vista predominantemente cognitivo.

Una estrategia para favorecer el planteo de problemas matemáticos

Como proceso cognitivo, el planteo de problemas implica la ejecución de estrategias complejas, el despliegue de habilidades y destrezas matemáticas, la activación de recursos metacognitivos, y también la influencia de creencias y concepciones subyacentes (Cruz, 2019). El acto de plantear nuevos problemas imbrica procesos específicos que han sido descritos por varios autores. Un ejemplo de ello reside en la relación dialéctica entre aceptar un hecho u objetar ¿qué-si-no? (Brown y Walter, 1983). Esta dualidad despliega amplias posibilidades para establecer los puntos de partida, como en el caso de problemas ya resueltos, teoremas ya demostrados, y conceptos ya establecidos. El pensamiento prosigue por un camino inquisitivo y creador, donde se modifican elementos y se indaga acerca de qué pasaría bajo tales condiciones.

En su libro *The Art of Problem Posing*, Brown y Walter (1983) describen cinco etapas por las cuales transcurre el *insight* del planteo de problemas: seleccionar un punto de partida, listar atributos, preguntar ¿qué-si-no?, establecer la pregunta, y analizar el problema. Esta idea es similar a lo observado por Pólya (1957) en el proceso de resolución de problemas matemáticos, donde cuatro etapas generales expresan el camino que sigue el resolutor (comprender el problema, establecer un plan, llevar a cabo el plan, y la mirada retrospectiva). La identificación de etapas tanto en el planteo como en la resolución de problemas refleja la naturaleza estructural de ambos procesos cognitivos, así como la relación estrecha que existe entre los mismos.

En un estudio relacionado con el uso de analogías durante el planteo de problemas, Cruz *et al*. (2016) describen una estrategia metacognitiva para generar problemas a partir de un objeto matemático, la cual tiene en cuenta ciertas regresiones cíclicas y las etapas sugeridas por Brown y Walter (1983). Esta estrategia contiene seis etapas: selección, identificación, asociación, búsqueda, verbalización y transformación. La secuencia de las primeras cinco expresan el camino más lineal, pero al incorporar la transformación se establece un proceso mucho más complejo y dinámico. En lo adelante, a esta estrategia se le denominará SCABV+T para abreviar.

Estructuralmente, la estrategia SCABV+T (Figura 1) comienza con la selección de un objeto o fenómeno dado, lo cual se corresponde con la selección de un punto de partida descrito por Brown y Walter (1983) y expresa la intencionalidad del planteo de problemas como actividad cognitiva consciente y motivada. A continuación, el sujeto escinde el objeto o fenómeno mediante un proceso analítico-sintético, y a esta segunda etapa se le denomina clasificación, para significar la operación mental que implica listar atributos, compararlos y organizarlos según ciertos criterios. Esta fase se caracteriza por la identificación de elementos conocidos dentro del objeto seleccionado.

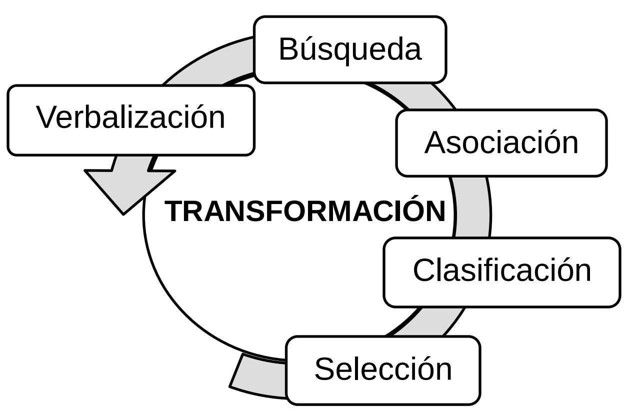

Figura 1. *Una estrategia metacognitiva para el planteo de problemas matemáticos*

La fase subsiguiente comprende la asociación de conceptos y propiedades a los elementos resultantes de la clasificación. Por ejemplo, a un triángulo es posible hacerle corresponder los conceptos de área, perímetro, baricentro, semejanza, en una lista tan profusa como cultura matemática posea el sujeto. Análogamente, la identificación de un triángulo puede conectarse con propiedades tales como el teorema de la suma de las amplitudes de los ángulos interiores, los teoremas de Tales y Pitágoras cuando es rectángulo, entre otras. A continuación, mediante un proceso de toma de decisiones, el sujeto escoge un subconjunto relativamente reducido de los conceptos y propiedades asociados, con el objetivo de conjeturar acerca de posibles relaciones o dependencias. Desde este punto de vista, la etapa de búsqueda es una especie de análogo a la etapa de trazar un plan, señalada por Pólya (1957) en el proceso de resolución de problemas, ya que en ambos casos subyace el enigma del *insight* matemático.

Siguiendo un recorrido predominantemente lineal, la última etapa consiste en la verbalización del problema, lo cual presupone una organización y síntesis de las ideas. Mediante la verbalización se expresa la pregunta o la conjetura que permite socializar el problema. Este subproceso cognitivo requiere de habilidades comunicativas especiales, interconectadas con el lenguaje simbólico de las matemáticas. Por automatizada que resulte, esta etapa entraña dificultades con el rigor del problema planteado, así como formulaciones que se podrían interpretar de formas diferentes (ambigüedad). Es importante diferenciar la realización trivial de una pregunta del acto consciente de plantear un problema. La verbalización es una expresión materializada del planteo y emerge como resultado de un complejo proceso cognitivo, de un conflicto interno asociado a un objeto o fenómeno analizado.

Un recorrido no lineal sugiere la existencia de subprocesos regresivos que devuelven la información relativamente diferente, bajo ciertas transformaciones. La etapa de transformación reconoce la libertad del sujeto para efectuar cambios intencionales en el transcurso de la estrategia. Así, es razonable pensar que algunos componentes del problema pueden ser modificados antes, durante o después del *insight*. Desde este punto de vista, la estrategia ¿qué-si-no? se podría localizar en las relaciones duales como transformación-clasificación o búsqueda-transformación. La tendencia a la transformación puede manifestarse en cualquier estadio de la estructura cíclica, en dependencia del grado de flexibilidad y criticismo alcanzado por el sujeto.

La estrategia SCABV+T representa el avance progresivo hacia el planteo de un nuevo problema. En la Figura 1, la ubicación central de la etapa de transformación refleja su conexión directa con las etapas restantes. O sea, es posible efectuar transformaciones en todo momento; además, el avance hacia el planteo no significa que dejen de existir retrocesos e interacciones dinámicas entre diferentes etapas. Bajo esta estructura, es posible diferenciar los ciclos de Brown y Walter (1983) en dos grupos: los lineales (de tipo I), relacionados con ciclos que tienen lugar entre fases subsiguientes, como asociación-búsqueda, y los ciclos no lineales (de tipo II) que implican el paso por la transformación. La parte final de la saeta en la Figura 1 no significa un vacío ni un estadio conclusivo en el proceso de razonamiento. Precisamente, es este el momento en que el pensamiento matemático avanza hacia el proceso de resolución de problemas. Por tanto, la estrategia metacognitiva descrita tiene lugar en unidad dialéctica con las estrategias de solución de problemas.

El mapeo estructural de Gentner en el planteo analógico de problemas

Para lograr una distinción coherente de los mecanismos empleados durante el razonamiento analógico, es factible adoptar la teoría de Gentner (1983) sobre el papeo de estructuras. El primer concepto sobre el cual se erige esta teoría consiste en un dominio de situaciones, el cual se comprende como un sistema de objetos junto a sus atributos y relaciones. Este aspecto puede reinterpretarse en el campo del planteo de problemas, exactamente como el objeto o fenómeno seleccionado, con sus propiedades conocidas y enriquecido por la dinámica selección-clasificación-identificación descrita en Cruz *et al.* (2016). Un conocimiento amplio favorece la selección de propiedades y relaciones, con mayores oportunidades para la búsqueda posterior de relaciones. No obstante, la amplitud del conocimiento no es lo suficientemente efectiva si carece de otros aspectos reguladores, tales como la fluidez en la distinción de elementos y la flexibilidad en su respectiva selección.

Un segundo aspecto señalado por Gentner (1983) consiste en asumir el conocimiento como redes proposicionales de nodos y predicados. Los nodos representan los conceptos tratados como totalidades, mientras que los predicados aplicados a los nodos expresan proposiciones sobre los conceptos. En tercer lugar, este autor distingue los predicados sintácticamente de dos formas diferentes. Por una parte, los diferencia tomando en consideración los atributos, ya sean de objetos o relaciones; por ejemplo, *área(∆ABC)* y *semejantes(∆ABC,∆PQR)*, respectivamente. Por otra parte, distingue los predicados de primer orden que toman objetos como argumento, y los de orden superior que adoptan proposiciones como argumento, por ejemplo, *causa[dependencia(AB,CD),independencia(AB,EF)]*. Estas distinciones enriquecen la forma de diferenciar las analogías con base en su contenido.

Con las observaciones anteriores es posible delimitar niveles de complejidad durante el establecimiento de analogías. En efecto, haciendo confluir los objetos y sus propiedades por un lado y las relaciones entre objetos por otra, las analogías basadas en los predicados simples expresarían niveles primarios de complejidad. Por su parte, las analogías relacionadas con predicados de orden superior expresarían niveles más avanzados de complejidad analógica.

Como cuarto y último concepto, Gentner (1983) incluye las representaciones, las cuales están destinadas a reflejar la forma en que las personas construyen una situación por intermedio de diferentes clases de predicados. La flexibilidad de estas representaciones va más allá de lo que pudiera parecer lógicamente posible. Sobre esta base, la teoría de mapeo de estructuras tiene el mérito de definir las analogías dependiendo solo de las propiedades sintácticas en que se representa el conocimiento, y no del contenido específico de su dominio. En efecto, una analogía se distingue de una abstracción, una similitud literal y otras clases de comparaciones, en que transporta (mapea, aplica) pocos o ningún atributo de la fuente hacia el objetivo. Por el contrario, las inferencias analógicas se refieren principalmente a la estructura relacional del objeto. Si las relaciones de orden superior están presentes en la fuente, entonces se pueden mapear hacia el objetivo mediante un razonamiento analógico.

Todo mapeo puede representarse como una función que aplica de la fuente en el objetivo $M: F \rightarrow O$, donde a un conjunto de nodos f_i de la fuente le corresponde un conjunto de nodos o_j en el objetivo ($f_i \rightarrow o_j$). Ahora, este mapeo determina otra correspondencia de orden superior que transporta atributos A y relaciones R, en forma de predicados de mayor complejidad. Para potenciar las analogías, Gentner (1983) refiere tres principios básicos: primero, tratar de descartar los atributos de objetos; segundo, tratar de preservar las relaciones entre objetos; y tercero, elegir sistemas de relaciones para así decidir qué relaciones se conservan. A esta tercera idea, dicho autor la denomina “principio de sistematicidad” y sugiere que, al decidir qué relaciones se conservan, es necesario elegir un sistema de relaciones en lugar de predicados aislados.

Seguidamente, se describe el planteo analógico de un problema geométrico, tomando como sustento argumentativo el mapeo estructural de Gentner y la estrategia metacognitiva SCABV+T.

Un ejemplo de razonamiento analógico durante el planteo de un problema geométrico

En el siguiente ejemplo se parte de un teorema de geometría afín, el cual sirve de base para imaginar nuevos problemas por un camino analógico. Se trata del teorema de la matemática germano-norteamericana Marion I. Walter (n. 1928), precisamente la coautora junto a Stephen I. Brown del influyente libro anteriormente referido (Brown y Walter, 1983). No se sabe a ciencia cierta quién formuló este teorema por primera vez, pero se debe a Walter el mérito de popularizarlo. El teorema plantea el siguiente hallazgo:

> **Teorema 1 (de Walter).** Dado un triángulo cualquiera, al trazar las cevianas que trisecan cada lado en tres segmentos iguales y seleccionar convenientemente sus puntos de intersección, queda definida una región hexagonal central cuya área constituye la décima parte del área del triángulo original (ver Figura 2).

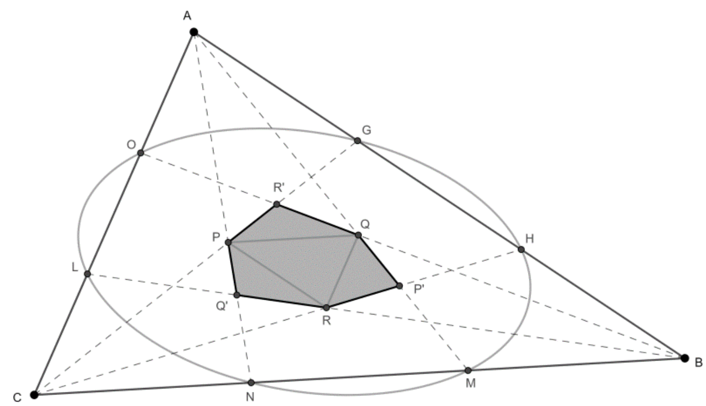

Figura 2. *Formulación de problemas bajo las premisas del teorema de Walter*

El camino de la estrategia SCABV+T favorece el planteo de numerosos problemas. En efecto, la selección corresponde al propio teorema consistente de un objeto matemático y una propiedad que le es inherente. La clasificación implica desmembrar el objeto en partes, lo cual es similar a la implementación de la estrategia heurística descomponer/recomponer, descrita por Pólya (1957) en el proceso de resolución de problemas. Como componentes relevantes del triángulo respecto a la propiedad, figuran las seis cevianas y los puntos de intersección seleccionados convenientemente para la conformación del hexágono *PR'QP'RQ'*. Ahora, existen otros elementos visibles claramente, como los restantes puntos de intersección y los propios pies de las cevianas. En cambio, la geometría del triángulo es inagotable y es posible identificar otros elementos no considerados en el teorema, los cuales podrían favorecer el hallazgo de nuevos problemas. Por ejemplo, considerar las medianas y el baricentro, las mediatrices y el circuncentro, las alturas y el ortocentro, las bisectrices y el incentro, puntos especiales como el de Gergonne, el de Brocard, y el de Miquel, la circunferencia de Euler y la de Lemoine, la recta de Gauss y la de Simson, etcétera.
Seguidamente, a los elementos identificados se les asocia propiedades que resulten afines. Por ejemplo, a los puntos se les puede hacer corresponder la pertenencia o no a cierto lugar geométrico, la colinealidad, la posición relativa respecto a una figura, entre otras. De igual modo, a un segmento se le pueden hacer corresponder los conceptos de longitud, paralelismo, equidistancia, etcétera.
Con los objetos y sus propiedades sobreviene la etapa de búsqueda de relaciones. Este momento es el más complejo pues implica la certeza de que resulten posibles dichas relaciones. Procesos mentales tales como la intuición suelen ayudar a una mejor orientación hacia el planteo de problemas interesantes y con sentido lógico-matemático. Por ejemplo, si se consideran todos los puntos de intercepción de las cevianas, podría identificarse un objeto nuevo por medio de la unión de dichos puntos. Surge así una especie de polígono estrellado, al cual podría asociarse el concepto de área y explorar relaciones similares al teorema original. Similarmente, la consideración del triángulo ΔPQR (ver Figura 3) conlleva

a numerosas ideas relacionadas con su área y posición, donde puede demostrarse que este triángulo es semejante con el triángulo ΔABC.
El uso de un software de geometría dinámica puede ayudar a identificar posibles propiedades como estas con economía de tiempo, y también a descartar tempranamente las falsas hipótesis. Queda así por delante la verbalización como expresión rigurosa del problema que da paso al proceso de resolución. Muchas veces este proceso de resolución se antepone a la propia verbalización, pues la búsqueda de un problema se solapa con la exploración matemática del objeto. Por tanto, una verbalización temprana podría ser: "Hallar los ángulos del triángulo ΔPQR", mientras que otra más avanzada podría ser: "Probar que los triángulos ΔABC y ΔPQR son semejantes, con razón 5:1". La Figura 2 ilustra una propiedad más, relacionada con la posición de los pies de las cevianas del teorema de Walter. En efecto, puede demostrarse que la elipse que pasa por cinco de ellos pasa también por el sexto.
Por otra parte, la transformación constituye una oportunidad para imaginar problemas con mayor despliegue en el pensamiento. Los ciclos no lineales (de tipo II) favorecen reconsiderar elementos seleccionados previamente, la búsqueda de nuevas relaciones, e incluso la variación de condiciones en el objeto. Un camino efectivo lo constituye la implementación de la estrategia ¿qué-si-no? desarrollada por Brown y Walter (1983). Por ejemplo, qué pasaría si en lugar de trisecar cada lado las cevianas trisecan cada ángulo del triángulo ΔABC. En este caso, es oportuno mostrar cómo el razonamiento analógico puede trasladar ideas similares de una figura a otra, de modo que la búsqueda de relaciones implique la identificación de problemas similares. En primera instancia, un nuevo problema surge inmediatamente al considerar el cociente entre las áreas de los triángulos ΔPQR y ΔABC en la Figura 3. ¿Será este cociente, en principio, una constante?

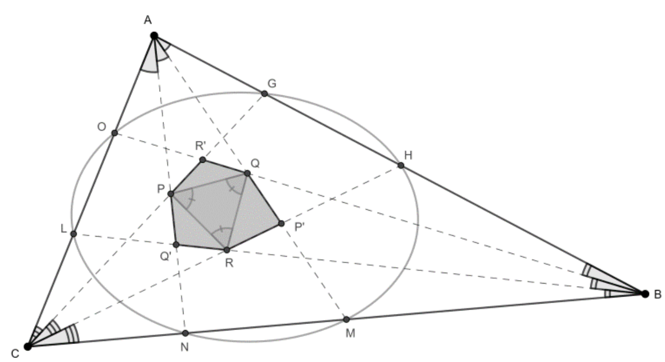

Figura 3. *Problemas análogos bajo las premisas del teorema de Morley*

Con la ayuda de un paquete de geometría dinámica es fácil convencerse de que dicho cociente no es constante. Ahora, al mover los vértices y considerar una amplia variedad de triángulos, llama la atención el hecho de que los cocientes resultantes siempre sobrepasan el valor de una décima. Precisamente, el razonamiento analógico lleva a tomar este hecho como relevante, ya que la razón

1/10 es el valor expresado en el teorema de Walter. Una conjetura sugiere la posibilidad de que esta fracción constituya una cota inferior. Tal conjetura es cierta; en efecto, puede demostrarse que se cumple el siguiente teorema análogo:

> **Teorema 2.** Dado un triángulo cualquiera, al trazar las trisectrices de cada ángulo, y seleccionar convenientemente sus puntos de intersección, queda definida una región hexagonal central cuya área siempre supera la décima parte del área del triángulo original (ver Figura 3).

Ciertamente, también pueden trasladarse a estas nuevas condiciones otros problemas analizados con anterioridad. Por ejemplo, puede demostrarse que los seis pies de las trisectrices también son puntos de una elipse. Asimismo, la consideración de los ángulos interiores en el triángulo ΔPQR favorece el redescubrimiento del teorema del matemático anglo-norteamericano Frank Morley (1860-1937), el cual afirma que este triángulo es siempre equilátero.

Como ha sugerido Gentner (1983), el camino del razonamiento analógico ha partido de un dominio de situaciones. Esencialmente, el sistema original de objetos consta del triángulo, las cevianas cuyos pies trisecan cada lado, así como del hexágono interior definido. El sistema de atributos y relaciones incluye la arbitrariedad del triángulo, el área de este y del hexágono, el cociente entre ambas áreas, entre otros aspectos. Después de transformar el objeto y considerar las trisectrices de los ángulos, ocurre un mapeo de predicados. Por ejemplo, en forma muy primitiva transcurre la transferencia de predicados de primer orden, como M_1: *{área(ΔABC), área(ΔPQR)}* $\rightarrow$ *{área(ΔABC), área(ΔPQR)}*, lo cual lleva a transferir la idea de calcular las mismas áreas del problema original, sin considerar relaciones entre estas. Sin embargo, la transferencia de predicados de orden superior favorece la búsqueda de analogías más profundas. Así, el mapeo M_2: *{cociente(área(ΔABC), área(ΔPQR)) = 1/10}* $\rightarrow$ *{cociente(área(ΔABC), área(ΔPQR)) > 1/10}* sugiere una fuerte analogía entre los dos teoremas antes enunciados.

En este proceso de planteo analógico, cabe destacar la importancia que reviste el principio de sistematicidad de Gentner (1983). En efecto, la aprehensión de un sistema de relaciones provee al sujeto de mecanismos más sofisticados para identificar y transferir estructuras y relaciones desde un sistema conocido (fuente) hacia uno menos conocido (objetivo). Una comprensión más profunda de las relaciones que tipifican el problema original contribuye a una transferencia más efectiva de predicados de orden superior. Por otra parte, la analogía requiere mantenimiento, manipulación, activación e inhibición selectiva de representaciones mentales, dirigidas a establecer correspondencias e inferencias acerca de relaciones de similitud más complejas. El razonamiento analógico se configura gracias a varias operaciones mentales que son especialmente importantes en un sentido amplio de la cognición humana, tales como la comparación, el análisis, la síntesis, la generalización, la clasificación, y la identificación de relaciones causa-efecto. La riqueza de esta actividad cognitiva encuentra en el principio de sistematicidad un efecto catalizador.

Algunas consideraciones sobre el nuevo problema planteado

El problema de demostrar el Teorema 2, invita a reflexionar analógicamente acerca de dos cuestiones fundamentales. Por un lado, el razonamiento analógico ha favorecido el hallazgo de dos teoremas similares por los objetos a los cuales se refieren, y también por las propiedades que en ellos tienen lugar. Por otra parte, cabe preguntarse si también existen analogías entre las demostraciones de ambos teoremas. En la literatura pueden encontrarse numerosas formas de demostrar el Teorema 1, pero esencialmente están alejadas por su naturaleza y menor complejidad del aserto del Teorema 2. De forma general, aunque puede resultar una afirmación apresurada, no son visibles elementos de similitud entre ambos caminos de razonamiento. El segundo resultado está condicionado por el cálculo intermedio del área del triángulo de Morley, resultado elemental con cierto grado de complejidad. El lado de este triángulo equilátero tiene una expresión naturalmente simétrica para su longitud:

$$L = 8R\, sin(\frac{\alpha}{3})\, sin(\frac{\beta}{3})\, sin(\frac{\gamma}{3}),$$

donde *R* es el circunradio del triángulo *⊿ABC* y α, β, γ son las amplitudes de los ángulos ∠*A*, ∠*B*, y ∠*C*, respectivamente. El hexágono *PR'QP'RQ'* está compuesto por el triángulo *⊿PQR* (primer triángulo de Morley) y por tres triángulos *⊿PQR'*, *⊿QRP'*, y *⊿RPQ'*, los cuales puede verificarse que son isósceles con sus bases respectivamente sobre los lados *PQ*, *QR*, y *RP*, todas de longitud *L*. El área del hexágono puede calcularse por medio de la suma de los cuatro triángulos que lo componen. La expresión resultante es la siguiente:

$$A_{PR'QP'RQ'} = 16R^2\, sin^2(\frac{\alpha}{3})\, sin^2(\frac{\beta}{3})\, sin^2(\frac{\gamma}{3}) \left(\sqrt{3} + tan(\frac{\pi-\alpha}{3}) + tan(\frac{\pi-\beta}{3}) + tan(\frac{\pi-\gamma}{3})\right)$$

De aquí resulta, por ejemplo, la siguiente función dependiente de la longitud *a* del lado *BC*, y de los ángulos β y γ:

$$f_{(a,\beta,\gamma)} = \frac{4a^2\, sin^2(\frac{\pi-\beta-\gamma}{3})\, sin^2(\frac{\beta}{3})\, sin^2(\frac{\gamma}{3})\left(\sqrt{3}+tan(\frac{\beta+\gamma}{3})+tan(\frac{\pi-\beta}{3})+tan(\frac{\pi-\gamma}{3})\right)}{sin^2(\beta+\gamma)}.$$

Con iguales argumentos, es posible expresar el área del triángulo original como una función $A_{⊿ABC} = g_{(a,\beta,\gamma)}$, donde:

$$g_{(a,\beta,\gamma)} = \frac{a^2}{2(\cot\beta + \cot\gamma)}.$$

Así, demostrar el Teorema 2 equivale a demostrar que la siguiente función:

$$h_{(a,\beta,\gamma)} = \frac{1}{10} g_{(a,\beta,\gamma)} - f_{(a,\beta,\gamma)},$$

es estrictamente positiva para todos los valores posibles del argumento, donde a, β, γ son reales positivos y β + γ < π. Realmente, desde un inicio es posible prescindir del factor a^2, prefijando a = 1 sin pérdida de generalidad salvo semejanza. Para amplitudes cercanas a cero de los ángulos ∠*A* y ∠*B*, la función *h* produce valores cada vez más pequeños. Por ejemplo, $h_{(1,0.01,0.01)}$ = 0.000245… La Figura 4 ilustra el comportamiento de $h_{(1,\beta,\ \gamma)} = h_{(\beta,\ \gamma)}$ sobre la región triangular abierta Ψ = {0 < β, 0 < γ, β + γ < π}. La cercanía de la función al plano *h* = 0 sugiere que el Teorema 2 es una especie de caso límite del Teorema 1, considerando ciertas variaciones en las cevianas.

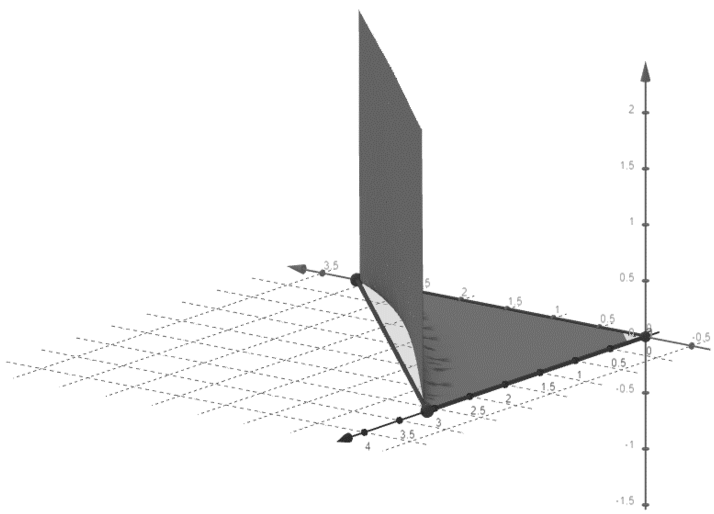

Figura 4. *Un modelo analítico del resultado expresado en el Teorema 2*

CONCLUSIONES

El planteo analógico de problemas expresa un vínculo entre dos aspectos relevantes de la actividad matemática: por una parte, el hallazgo de nuevos problemas y por otro el establecimiento de analogías. Ambos procesos son importantes en la formación matemática de los estudiantes, pero no han sido suficientemente desarrollados. El presente trabajo ha tomado como centro el primero de ambos aspectos, mostrando la utilidad de la estrategia metacognitiva SCABV+T, donde los procesos analógicos pueden ser explicados con la ayuda del mapeo estructural de Gentner (1983). Este enfoque ha mostrado una notable

coherencia entre ambas teorías, donde las conexiones más fuertes se observan por intermedio de la etapa de transformación. No puede afirmarse que esta relación es única, pues se dejaría fuera la búsqueda de analogías entre objetos matemáticos seleccionados sin conexión previa, o sea, sin que uno de ellos se imagine a partir de otro. Sin embargo, el razonamiento analógico entre objetos desligados a priori también puede ser descrito dentro de la estrategia SCABV+T, donde la etapa inicial de selección involucra un objeto nuevo e independiente. Solo a partir de la clasificación-asociación-búsqueda comienza un subproceso que puede sugerir analogías, en el sentido del mapeo de propiedades y relaciones por intermedio de predicados. Si este subproceso no tiene lugar, entonces es difícil transferir problemas análogos de un objeto a otro. Además, los niveles de complejidad de las analogías se corresponden directamente con los niveles de complejidad de los ciclos y también de los predicados mapeados.
Para investigaciones posteriores es interesante profundizar en otros aspectos del planteo analógico de problemas. Por ejemplo, el tipo de analogía conforme a alguna clasificación, como podría ser la diferenciación entre analogías entre propiedades y entre relaciones, lo cual se conecta con dos formas lógicas del pensamiento: los juicios y los razonamientos. Otro elemento por considerar consiste en la relación creatividad/planteo, donde la flexibilidad se relaciona directamente con la capacidad para efectuar transformaciones, mientras que la fluencia está ligada estrechamente a las etapas de clasificación y asociación de propiedades. En este último caso, la fluencia se conecta de forma directa con otra forma lógica del pensamiento: los conceptos. Un mayor conocimiento del objeto analizado favorece la fluidez en la identificación de componentes y propiedades, pero no necesariamente la determina. Finalmente, otro elemento notable consiste en la elaboración de instrumentos válidos y fiables que faciliten la evaluación de la estrategia SCABV+T, a fin de identificar dónde y cómo ocurren los razonamientos analógicos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abdulla, A. M., & Cramond, B. (2018). The creative problem finding hierarchy: a suggested model for understanding problem finding. *Creativity*, 5(2), 197-229. doi: 10.1515/ctra-2018-0019

Bernardo, A. B. I. (2001). Analogical problem construction and transfer in mathematical problem solving. *Educational Psychology*, 21(2), 137-150. doi: 10.1080/01443410020043841

Bonotto, C., & Santo, L. D. (2015). On the relationship between problem posing, problem solving, and creativity in the primary school. In F. M. Singer, N. F. Ellerton, & J. Cai (Eds.), *Mathematical Problem Posing. From Research to Effective Practice* (pp. 103-123). New York: Springer. doi: 10.1007/978-1-4614-6258-3

Brown, S. I., & Walter, M. I. (1983). *The Art of Problem Posing*. New Jersey: Erlbaum.

Cai, J., Jiang, C., Hwang, S., Nie, B., & Hu, D. (2016). How do textbooks incorporate mathematical problem posing? An international comparative study. In P. Felmer, E. Pehkonen, & J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and Solving Mathematical Problems. Advances and New Perspectives* (pp. 3-22). Switzerland: Springer. doi: 10.1007/978-3-319-28023-3

Cruz, M. (2019). Aprendiendo a plantear nuevos problemas. Una experiencia con GeoGebra. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (ALME)*, 32(1). Aprobado para publicar.

Cruz, M., García, M. M., Rojas, O. J., & Sigarreta, J. M. (2016). Analogies in mathematical problem posing. *Journal of Science Education*, 17(2), 84-90. https://www.researchgate.net

Gentner, D. (1983). Structure-mapping: a theoretical framework for analogy. *Cognitive Science*, 7(2), 155-170. doi: 10.1016/S0364-0213(83)80009-3

Espinoza, J., Segovia, I., & Lupiáñez, J. L. (2018). Variables de estudio para caracterizar las producciones de estudiantes con talento matemático ante tareas de invención de problemas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 31(2), 1132-1138. http://clame.org.mx

Godino, J. D. (2015). La articulación de teorías en educación matemática desde la perspectiva ontosemiótica. En N. Planas (Ed.), *Avances y Realidades de la Educación Matemática* (pp. 189-208). Barcelona: Graó. https://www.researchgate.net

Pólya, G. (1957). *How to Solve It: A new Aspect of Mathematical Method* (2nd ed.). Princeton: Princeton University Press.