PROCEDIMIENTO PARA REDUCIR A LA FORMA CANÓNICA LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO EN TRES VARIABLES

Mario Rafael Estrada Doallo[1], Ariel Hernández Hernández[2], Luis Grimaldy Romay[3]
[1]Universidad de Holguín, e-mail: mestradad@uho.edu.cu, [2] Universidad de Holguín, e-mail: arielhh@uho.edu.cu, [3] Universidad de Holguín, e-mail: lgrimaldyr@uho.edu.cu

RESUMEN

La formación de profesionales de la Matemática constituye una prioridad de los Ministerios de Educación y Educación Superior en Cuba y en particular, la formación de profesores de Matemática, cuyo fin es impartir clases con calidad de esta asignatura en las diferentes educaciones. Uno de los contenidos que se imparte en las carreras de la Licenciatura es el referido al estudio de la ecuación de segundo grado en tres variables. Este estudio conlleva a la eliminación de los términos lineales y mixtos de dicha ecuación con el objetivo de obtener la ecuación en la forma canónica, aspecto que resulta trabajoso y complicado al estudiante. En el trabajo se propone un procedimiento para la reducción de la ecuación de segundo grado usando los productos vectorial y escalar, contenidos que resulta fácil de aplicar para la reducción de la ecuación a la forma canónica. Los métodos utilizados en la investigación fueron los de carácter empíricos como la observación y la entrevista que permitieron constatar la situación sobre el empleo del procedimiento aplicado. Al mismo tiempo se emplearon métodos teóricos como el histórico - lógico y análisis - síntesis, los que permitieron la elaboración del procedimiento propuesto.

PALABRAS CLAVES: Geometría Analítica, Ecuación de Segundo Grado, Producto Vectorial, Producto Escalar.

ABSTRACT

The training of professionals of Mathematics is a priority of the Ministries of Education and Higher Education in Cuba and in particular, the training of teachers of Mathematics, whose purpose is to teach quality courses of this subject in different educations. One of the contents taught in the Bachelor's degree programs is that related to the study of the second degree equation in three variables. This study leads to the elimination of the linear and mixed terms of said equation with the aim of obtaining the equation in the canonical form, an aspect that is laborious and complicated for the student. The paper proposes a procedure for the reduction of the second degree equation using vector and scalar products, contents that are easy to apply for the reduction of the equation to the canonical form. The methods used in the investigation were those of an empirical nature, such as observation and interview, which allowed us to verify the situation regarding the use of the procedure applied. At the same time theoretical methods such as historical - logical and analysis - synthesis were used, which allowed the elaboration of the proposed procedure.

KEY WORDS: Analytical Geometry, Second Degree Equation, Vector Product, Scalar Product

1. INTRODUCCIÓN

El estudio de la ecuación de segundo grado en tres variables conlleva la reducción de esta ecuación a la forma canónica, para luego poder hacer la clasificación de las cuádricas o superficie de segundo grado. Este contenido lo recibe el estudiante, como parte de la asignatura Geometría Analítica que se imparte en la Licenciatura en Educación Matemática y en la Licenciatura en Matemática.

El procedimiento que tradicionalmente se aplicaba en los panes de estudio, para de la eliminación de los términos mixtos en la ecuación de segundo grado en tres variables, era el procedimiento de ortogonalización de Schmidt, el cual resultaba trabajoso y complejo para el estudiante.

Teniendo en cuenta esta problemática se propone un procedimiento con su argumentación, donde se utiliza el producto vectorial y el producto escalar, el cual resulta más sencillo al estudiante cuando elimina los términos mixtos de la ecuación de segundo grado en tres variables.

2. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En el estudio realizado para las secciones cónicas, se analiza que la traslación conveniente de los ejes coordenados elimina los términos lineales de la ecuación de segundo grado en dos variables. De forma análoga, se puede estudiar el procedimiento para eliminar la ecuación de segundo grado en tres variables.

La ecuación de segundo grado en tres variables, en forma matricial se escribe de la siguiente manera:

$$\overline{x}^T A_3 \overline{x} + 2 \cdot \overline{a}^T \overline{x} + a_{00} = 0$$

y las ecuaciones de la traslación son:

$$x = x' + h$$
$$y = y' + k$$
$$z = z' + l$$

y estas pueden expresarse en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix}$$

o más breve: $\overline{x} = \overline{x'} + \overline{c}$; si se sustituyen en la ecuación de la superficie se obtiene:

$$\left(\overline{x'} + \overline{c}\right)^T A_3 \left(\overline{x'} + \overline{c}\right) + 2 \cdot \overline{a}^T \left(\overline{x'} + \overline{c}\right) + a_{00} = 0 \quad (1)$$

Trabajando en esta ecuación y teniendo en cuenta que la matriz A es simétrica y considerando que $\overline{a}^T \cdot \overline{x'} = \overline{x'}^T \cdot \overline{a}$, se obtiene:

$$\overline{x'}^T A_3 \overline{x'} + 2 \cdot \overline{x'}^T \left(A_3 \overline{c} + \overline{a}\right) + a'_{00} = 0 \qquad (2)$$

donde el término independiente es:

$$a'_{00} = \overline{c}^T \cdot A_3 \cdot \overline{c} + 2 \cdot \overline{a}^T \cdot \overline{c} + a_{00} \quad (3)$$

Como se puede apreciar se calcula de manera análoga a las cónicas. También, derivando parcialmente la ecuación de la superficie, se hallan las ecuaciones en función de h, k y l, y se pueden escribir las ecuaciones de la traslación.

RESUMIENDO:
Todos los términos lineales de la ecuación de segundo grado, se eliminan si y sólo sí $A_3 \cdot \bar{c} + \bar{a} = \bar{0}$. Y el conjunto de todos los puntos que satisfacen esta ecuación recibe el nombre de *ente singular*. Si el sistema de ecuaciones que se obtiene tiene una sola solución, entonces se dice que la superficie tiene centro.

Ya se conoce cómo eliminar los términos lineales de la ecuación de segundo grado en tres variables, es por ello que, a partir de este momento, el estudio se centrará en la parte cuadrática, con el objetivo de obtener dicha parte lo más simple posible, es decir, sin términos mixtos.

Además, se conoce que la rotación de los ejes coordenados elimina el término mixto en la ecuación de segundo grado en dos variables. ¿Eliminará la rotación de los ejes, en el espacio, los términos mixtos de la ecuación de la superficie? La respuesta a esta interrogante es afirmativa, pero el procedimiento es mucho más complejo que para el plano, es por ello que se estudiará un procedimiento más simple.

Luego, para darle respuesta a la problemática planteada, se debe encontrar un sistema de coordenadas ortogonal (o una matriz ortogonal) en el espacio, en el cual la parte cuadrática de la ecuación de segundo grado en tres variables tome la forma $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2$, es decir, sin términos mixtos.

Se toma un sistema de coordenadas $\{O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ donde:

Sea C = $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ y $\bar{x} = C \cdot \bar{x}'$, con C ortogonal (aquí los vectores de forman la matriz C se toman en columna).

Sustituyendo en la parte cuadrática de la ecuación se obtiene:

$$\bar{x}^T \cdot A_3 \cdot \bar{x} = (C \cdot \bar{x}')^T \cdot A_3 \cdot C \cdot \bar{x}' = \bar{x}' \cdot C^T \cdot A_3 \cdot C \cdot \bar{x}'$$

En el nuevo sistema de coordenadas la matriz de la forma cuadrática será: $A_3' = C^T \cdot A_3 \cdot C$, donde C es la matriz de transformación de coordenadas. De donde A_3' es simétrica evidentemente.

Como A_3' no debe tener términos mixtos, entonces A_3' debe ser una matriz diagonal.

Si se encuentra el sistema de coordenadas $\{O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ en el cual A_3' es diagonal, entonces:

$$A_3' = C^T \cdot A_3 \cdot C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$ multiplicando por C

$$A_3 \cdot C = C \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$ pues $C^TC = I$

$$\left(A_3 \cdot \overrightarrow{e_1},\ A_3 \cdot \overrightarrow{e_2},\ A_3 \overrightarrow{e_3}\right) = \left(\overrightarrow{e_1} \cdot \lambda_1, \overrightarrow{e_2} \cdot \lambda_2, \overrightarrow{e_3} \cdot \lambda_3\right)$$

(Aquí los vectores $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$, son tomados en columnas y forman la matriz C de transformación)

Se obtiene:

$$\left(A_3 - \lambda_1 \cdot I_3\right) \cdot \overrightarrow{e_1} = 0, \quad \left(A_3 - \lambda_2 \cdot I_3\right) \cdot \overrightarrow{e_2} = 0, \quad \left(A_3 - \lambda_3 \cdot I_3\right) \cdot \overrightarrow{e_3} = 0 \qquad (4)$$

Luego:

$$\text{(I)} \qquad \left(A_3 - \lambda_n \cdot I_3\right) \cdot \overrightarrow{e_n} = \overline{0} \qquad (n = 1,2,3)$$

Para que el sistema (I) tenga solución no nula debe cumplirse que:

$$\left|A_3 - \lambda_n I_3\right| = 0$$

Es posible demostrar que existe una *base ortogonal* en la cual la ecuación carece de términos mixtos, **teorema 1** que es de gran importancia, su demostración no se realizará, para la misma es necesario demostrar la proposición siguiente:

<u>Proposición 1</u>: *La matriz de la forma cuadrática en cualquier sistema de coordenadas ortonormado es simétrica.*

<u>Demostración</u>:

Sea $\{O, \overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ un nuevo sistema de coordenadas, $\overline{x} = C \cdot \overline{x'}$ y $A' = C^T \cdot A \cdot C$

Luego: $(A')^T = \left(C^T \cdot A \cdot C\right)^T = C^T \cdot \left(C^T \cdot A\right)^T = C^T \cdot A^T \cdot C = C^T \cdot A \cdot C = A'$

Por tanto, A' es simétrica.

<u>Teorema 1</u>:

Existe una base ortonormal $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ *tal que en el sistema de coordenadas* $\{O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ *la matriz de la forma cuadrática tiene la forma diagonal.*

Ahora se puede definir:

<u>Definición 1</u>: El conjunto solución de la ecuación $\left(A_3 - \lambda_n I_3\right) \cdot \overline{e_n} = \overline{0}$ se llama espacio propio de la matriz A para el valor λ.

Definición 2: El valor λ es un valor propio de la matriz A si $|A_3 - \lambda_n I_3| = 0$

Definición 3: La ecuación $|A_3 - \lambda_n I_3| = 0$ recibe el nombre de polinomio característico y lo se denota por $P(\lambda)$.

Definición 4: El vector $\bar{e}$ es un vector propio correspondiente al valor propio λ si $(A_3 - \lambda_n I_3)\cdot \overline{e_n} = \bar{0}$

El conjunto de los vectores propios correspondientes al valor propio λ forman un subespacio que se llama subespacio propio del valor propio λ y se denota por E_λ.

Teniendo en cuenta (4) el problema se reduce a construir una base ortonormal formada por vectores propios, en esta base la matriz de la forma cuadrática será diagonal y en la diagonal estarán los valores propios. A continuación, se trabajará para construir esta base.

Proposición 2: *El polinomio característico* $P(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I)$ *no varia al pasar de un sistema de coordenadas ortonormado a otro*.

Demostración:

Sea $\{O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ el nuevo sistema de coordenadas y A' = $C^T AC$

$$(A' - \lambda \cdot I) = C^T \cdot A \cdot C - \lambda \cdot C^T \cdot I \cdot C = C^T (A - \lambda \cdot I) \cdot C$$

$$|A' - \lambda \cdot I| = |C^T (A - \lambda \cdot I) \cdot C| = |C^T| \cdot |A - \lambda \cdot I| \cdot |C| = |C^T| \cdot |C| \cdot |A - \lambda \cdot I| = |A - \lambda \cdot I|$$

Teorema 2: *Los valores propios de la matriz de la forma cuadrática son todos reales.*

Demostración:

Teniendo en cuenta el teorema 1 y la proposición 2 es suficiente demostrar que el polinomio característico de una matriz diagonal tiene tres raíces reales, lo cual es evidente, ya que este último tiene la forma $(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda)$, donde λ_1; λ_2; λ_3 son los números que aparecen en la diagonal de la matriz.

Proposición 3: *Los valores propios correspondientes a valores propios diferentes son ortogonales.*

Demostración:

Sean λ_1 y λ_2 dos valores propios diferentes y $\overrightarrow{e_1}$ y $\overrightarrow{e_2}$ los vectores propios correspondientes a estos valores, luego:

$A_2 \overrightarrow{e_1} = \lambda_1 \overrightarrow{e_1}$ y $A_2 \overrightarrow{e_2} = \lambda_2 \overrightarrow{e_2}$

Entonces, $\overrightarrow{e_2}^T \cdot A \cdot \vec{e}_1 = \lambda_1 \overrightarrow{e_2}^T \cdot \overrightarrow{e_1}$ multiplicando por $\overrightarrow{e_2}^T$

$\overrightarrow{e_1}^T \cdot A \cdot \vec{e}_2 = \lambda_1 \overrightarrow{e_1}^T \cdot \overrightarrow{e_2}$ multiplicando por $\overrightarrow{e_1}^T$

Pero: $\overline{e_2}^T A \cdot \overline{e_1} = (\overline{e_2}^T \cdot A \cdot \overline{e_1})^T = \overline{e_1}^T A \cdot \overline{e_2}$, entonces $\lambda_1 \overrightarrow{e_2}^T \overrightarrow{e_1} = \lambda_2 \overrightarrow{e_1}^T \overrightarrow{e_2}$ pero $\overrightarrow{e_2}^T \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_1}^T \overrightarrow{e_2}$

$(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \overrightarrow{e_1}^T \overrightarrow{e_2} = 0$, entonces $\overrightarrow{e_1}^T \overrightarrow{e_2} = 0$, luego $\overrightarrow{e_1} \perp \overrightarrow{e_2}$

Proposición 4: *El rango del espacio propio correspondiente a un número λ no depende del sistema de coordenadas ortonormado.*

Demostración:

La dimensión del subespacio E_λ está determinado por el rango de la matriz $A_3 - \lambda \cdot I$ o de $A'_3 - \lambda \cdot I$, y por el teorema, se tiene que:

$$\rho(A'_3 - \lambda \cdot I) = \rho\left[C_3^T (A_3 - \lambda \cdot I) \cdot C_3\right] = \rho(A_3 - \lambda \cdot I)$$

Proposición 5: *Si la multiplicidad de λ en la ecuación característica es igual a k, entonces se puede escoger k vectores propios perpendiculares dos a dos.*

Demostración:

Es suficiente demostrar que la dimensión del subespacio propio es igual a la multiplicidad del valor propio.

Según la proposición 3 basta demostrar que la multiplicidad k del valor propio λ es igual a la dimensión del subespacio solución de la ecuación $(A'' - \lambda \cdot I) \cdot \overline{x} = \overline{0}$, pero ρ (A'' - λI) = 3 – k, por ser A'' diagonal y por aparecer el valor λ en la diagonal exactamente k – veces. Luego la dimensión del subespacio solución será 3 – (3 – k) = k.

Por tanto, en E_λ se escoge dimE_λ = m (λ)

RESUMEN:

1. Siempre es posible encontrar una base ortonormal donde la matriz sea diagonal.
2. Para encontrar una base donde la matriz sea diagonal es necesario encontrar una base formada por vectores propios.
3. Para determinar los vectores es necesario determinar los valores propios y luego resolver la ecuación $(A - \lambda \cdot I) \cdot \overline{e} = \overline{0}$.
4. En caso de valores propios de multiplicidad mayor que dos se deben escoger dos vectores propios ortogonales.
5. $|C| = 1$

A continuación, se presenta un procedimiento para determinar la base ortonormal y el mismo se basa, simplemente, en la aplicación del producto vectorial de vectores.

PROCEDIMIENTO:

Determinar los valores propios λ_1, λ_2, λ_3, pueden ocurrir los siguientes casos:

a) Si λ_1, λ_2 y λ_3 son distintos dos a dos, entonces

$\overrightarrow{e_1} : (A - \lambda_1 I) \cdot \overrightarrow{e_1} = \vec{0}$ (tomar el producto vectorial de dos filas no proporcionales de la matriz $(A - \lambda_1 I)$)

$\overrightarrow{e_2}$: similar a $\overrightarrow{e_1}$

$\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2}$

- Normalizar los vectores

b) Si $\lambda_1 = \lambda_2$, λ_3, entonces

$\overrightarrow{e_3}$: es una fila no nula de la matriz $(A - \lambda_1 I)$

$\overrightarrow{e_2}$: lo tomamos perpendicular a $\overrightarrow{e_3}$

$\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_3}$

- Normalizar los vectores

c) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ (distinto de cero)

En este caso la base $\{\vec{i};\ \vec{j}; \vec{k}\}$ será propia, la ecuación original carece de términos mixtos.

d) Si λ_1, $\lambda_2 = \lambda_3$ y la superficie no es centrada, entonces

$\overrightarrow{e_1}$: tomar una fila no nula de la matriz A.

$\overrightarrow{e_2} = \vec{a} \times \overrightarrow{e_1}$

- Normalizar los vectores

La fundamentación del procedimiento puede encontrarse en Estrada (2017).

A continuación, se presenta un ejemplo donde se aplica el procedimiento anterior.

<u>EJEMPLO</u>

Reducir las siguientes ecuaciones a la forma canónica.

a) $-y^2 + 2xz - 2x + 1 = 0$
b) $x^2 + z^2 + 2xz + 2y = 0$

<u>Solución:</u>

a) Eliminación de los Términos Lineales.

- Se construye la matriz de la forma cuadrática.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Se determina el vector $\bar{a}$, formado por la mitad de los coeficientes de los términos lineales.

$$\bar{a} = (-1; 0; 0)$$

- Se resuelve la ecuación $A \cdot \bar{c} = -\bar{a}$, este sistema de ecuaciones tiene la solución única (0, 0, 1).

Por tanto, la superficie tiene centro.

- Se toma como nuevo origen de coordenadas O' (0,0,1).

entonces $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z'+1 \end{cases}$, donde (x'; y'; z') son las coordenadas de un punto en el sistema $\{O'; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}\}$. En la ecuación de la superficie, en este nuevo sistema, no aparecen los términos lineales, y el término independiente es a_{oo} = 1. Luego se obtiene:

$$-y'^2 + 2x'z' + 1 = 0$$

- Se determinan los valores propios.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

- Resolviendo esta ecuación se obtiene:

$$\lambda_1 = 1; \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$

- De acuerdo al procedimiento dado anteriormente:

$$\overrightarrow{e_1} = (1; 0; 1) \quad \overrightarrow{e_2} = (0; 1; 0) \quad \overrightarrow{e_3} = (-1; 0; 1)$$

- Normalizando estos vectores:

$$\overrightarrow{e_1}* = \frac{1}{\sqrt{2}}(1; 0; 1) \quad \overrightarrow{e_2}* = (0; 1; 0) \quad \overrightarrow{e_3}* = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1; 0; 1)$$

- Luego al realizar la transformación de coordenadas

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}} x'' - \frac{1}{\sqrt{2}} z'' \\ y' = y'' \\ z' = \frac{1}{\sqrt{2}} x'' + \frac{1}{\sqrt{2}} z'' \end{cases}$$

se obtiene la ecuación de la cuádrica, en el sistema $\{O'; \overrightarrow{e_1}*; \overrightarrow{e_2}*; \overrightarrow{e_3}*\}$, siguiente:

$$x''^2 - y''^2 - z''^2 + 1 = 0$$

b) Eliminación de los Términos Lineales.

- Se construye la matriz de la forma cuadrática.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Se determina el vector $\overline{a}$, formado por la mitad de los coeficientes de los términos lineales.

$$\overline{a} = (0; 1; 0)$$

- Se resuelve la ecuación $A \cdot \overline{c} = -\overline{a}$, este sistema de ecuaciones no tiene solución. Por tanto la superficie no es centrada.

Se pasa a eliminar el término Mixto.

- Se determinan los valores propios.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

- Resolviendo esta ecuación se obtiene:

$$\lambda_3 = 2; \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

- De acuerdo al procedimiento dado anteriormente:

$$\overrightarrow{e_1} = (0; 1; 0) \quad \overrightarrow{e_2} = (1; 0; -1) \quad \overrightarrow{e_3} = (1; 0; 1)$$

- Normalizando estos vectores:

$$\overrightarrow{e_1}* = (0; 1; 0) \quad \overrightarrow{e_2}* = \frac{1}{\sqrt{2}}(1; 0; -1) \quad \overrightarrow{e_3}* = \frac{1}{\sqrt{2}}(1; 0; 1)$$

- Luego al realizar la transformación de coordenadas donde (x’; y’; z’) son las coordenadas de un punto en el sistema $\{O'; \overrightarrow{e_1}*; \overrightarrow{e_2}*; \overrightarrow{e_3}*\}$ se elimina el término mixto y se obtienen los nuevos términos lineales en el sistema de coordenadas $\{0; x'; y'; z'\}$; la ecuación toma la forma:

$$2z'^2 + 2x' = 0$$

En este caso no es necesario completar cuadrados, es decir, realizar un desplazamiento del origen de coordenadas para obtener la forma canónica.

Como se ha podido apreciar el estudiante con este procedimiento solo necesita dominar el producto vectorial y el producto escalar para obtener la base ortonormal en la cual la ecuación de segundo grado en tres variables tome la forma canónica, además ya no es necesario la solución de sistema de ecuaciones, otro aspecto trabajoso para el estudiante.

3. CONCLUSIONES

1. Se considera que el tratamiento dado al contenido, posibilita que los estudiantes asimilen de una forma más rápida los contenidos relacionados con la eliminación de los términos lineales y mixtos de la ecuación de segundo grado en tres variables.

2. El enfoque que se presenta contribuye a una mejor compresión, por parte de los estudiantes, del procedimiento para eliminar, sobre todo, los términos mixtos en la ecuación.

3. Además, se pudo constatar, a través de las evaluaciones realizadas, que los estudiantes asimilan de forma correcta el procedimiento para reducir la ecuación de segundo grado en tres variables a la forma canónica.

4. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Brehmer, S.; Belkner, N. (1984). *Introducción a la Geometría Analítica y al Álgebra Lineal*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Estrada, M. (2017). *Ecuación de segundo grado en tres variables*. Material de apoyo a la docencia. Universidad de Holguín. Holguín.

Efimov, N. (1980). *Formas Cuadráticas y Matrices*. La Habana: Empresa Impresoras Gráficas. MINED.

5. **SOBRE LOS AUTORES**

Mario Rafael Estrada Doallo, Master en Didáctica de la Matemática, profesor del Departamento de Licenciatura en Matemática de la UHO, Profesor Auxiliar. Profesor Pincipal de Año Académico. 37 años de experiencia en la Educación Superior. Miembro de la SCMC. Correo: mestradad@uho.edu.cu

Ariel Hernández Hernández, Master en Didáctica de la Matemática, profesor del Departamento de Licenciatura en Matemática de la UHO, Profesor Auxiliar. Segundo Jefe de Departamento. 36 años de experiencia en la Educación. Miembro de la SCMC. Correo: erielhh@uho.edu.cu

Luis Grimaldy Romay, Master en Didáctica de la Matemática, profesor del Departamento de Licenciatura en Matemática de la UHO, Profesor Auxiliar. Profesor Pincipal de Año Académico. 36 años de experiencia en la Educación. Miembro de la SCMC. Correo: lgrimaldyr@uho.edu.cu