



CONFERENCIA DE INFORMÁTICA, MATEMÁTICA Y CIENCIAS DE LA INFORMACIÓN

Universidad de Holguín, 2020

Sistema de ejercicios para favorecer el aprendizaje de los contenidos curriculares de Ingeniería Mecánica relacionados con la trigonometría

Exercise system to promote learning of the Mechanical Engineering curriculum content related to trigonometry

Primer autor (Luis Enrique Rodríguez González)¹, Segundo autor (Alberto Rodríguez Guerrero)², Tercer autor (Jorge Luis Parra Paneque)³.

¹Universidad de Holguín, Departamento de Matemática, Cuba, luise@uho.edu.cu,

²Universidad de Holguín, Departamento de Matemática, arodriguezg@uho.edu.cu,

³Universidad de Holguín, Departamento de Matemática, jparra@uho.edu.cu.

RESUMEN

Con la creación del Cálculo Diferencial e Integral, la trigonometría ganó formas definitivas en la Matemática, siendo empleada en otras ciencias como Física, Química, Astronomía e Ingeniería, entre otras. Los estudiantes de la carrera de Ingeniería Mecánica presentan dificultades en la trigonometría, a pesar de ser un contenido tratado en enseñanzas precedentes. Esto dificulta el proceso de enseñanza-aprendizaje de otros contenidos curriculares que utilizan la trigonometría como herramienta; por esto, se precisa desarrollar habilidades trigonométricas en los estudiantes, para lo cual se tiene como objetivo general de la investigación: Proponer un sistema de ejercicios de trigonometría para la mejoría del proceso de Enseñanza-aprendizaje en la carrera de Ingeniería Mecánica de la Escuela Superior Politécnica de Zaire/Soyo, Angola. Como resultado final se desarrolló un sistema de ejercicios con un enfoque teórico-práctico, donde debe transitarse por varios niveles de conocimiento, que va del nivel teórico a la aplicación de la teoría trigonométrica.

Palabras clave: Trigonometría; proceso de Enseñanza-aprendizaje; Sistema de ejercicios.

ABSTRACT

With the creation of Differential and Integral Calculation, trigonometry gained definitive molds in Mathematics, being used in other sciences such as Physics, Chemistry, Astronomy and Engineering, among others. Students of the Mechanical Engineering degree present difficulties in trigonometry, despite being a content discussed in previous teachings. This hinders the teaching-learning process of other curricular contents that use trigonometry as a tool; Therefore, it is necessary to develop trigonometric skills in students, for which it has as a general objective of the research: Propose a system of trigonometry exercises for the improvement of the Teaching-learning process in the Mechanical Engineering career of the Higher School Polytechnic of Zaire/Soyo, Angola.



CONFERENCIA DE INFORMÁTICA, MATEMÁTICA Y CIENCIAS DE LA INFORMACIÓN

Universidad de Holguín, 2020

As a final result, an exercise system was developed with a theoretical-practical approach, where it must be passed through several levels of knowledge, ranging from the theoretical level to the application of trigonometric theory.

Keywords: Trigonometry; Teaching-learning process; Exercise system.

1. INTRODUCCIÓN

Las ramas de la Matemática incluyen la tradicional aritmética (dedicada al estudio de los números y de sus propiedades), el cálculo algebraico, la teoría de conjuntos (aplicada de forma dinámica a la informática), la geometría, el análisis matemático y la trigonometría.

Los ángulos son básicamente la conformación que se da entre dos líneas rectas que convergen en un punto común, que es considerado como un vértice o sobre la denominación de punto de origen, partiendo desde sus planos internos. Es una medida que es analizada por la trigonometría, como rama de la matemática que se encarga de la aplicación de distintas formas de medición de los triángulos.

“La trigonometría objetivó la elaboración de los estudios de las funciones trigonométricas, relacionadas a los ángulos y a los fenómenos periódicos. A partir del siglo XV, la modernidad de los cálculos creó nuevas situaciones teóricas y prácticas relacionadas a los estudios de los ángulos y de las medidas. Con la creación del Cálculo Diferencial e Integral, por los científicos Isaac Newton y Leibniz, la trigonometría ganó formas definitivas en el escenario de la Matemática siendo constantemente ampliada en otras ciencias”. Marcos Noe (2013).

Lo expuesto por este autor permite inferir que la trigonometría está indisolublemente relacionada con el desarrollo científico y tecnológico de la sociedad humana. En general, la trigonometría permite resolver muchos problemas de ingeniería con énfasis particular en la Ingeniería Mecánica, en la cual se precisan determinaciones de ángulos, longitudes, áreas de superficies y volúmenes de sólidos, entre otras determinaciones.

A pesar de lo anterior los estudiantes universitarios presentan insuficientes habilidades trigonométricas que afectan el proceso de Enseñanza-aprendizaje no solo de las Matemáticas, sino también de otras asignaturas del plan de estudio.

En la carrera de Ingeniería Mecánica de la referida escuela, los estudiantes carecen de las habilidades trigonométricas necesarias asimilar los contenidos curriculares en asignaturas tales como: Matemática I, Matemática II, Matemática III, Física I, Física II, Mecánica Teórica I, Mecánica Teórica II y Resistencia de Materiales, entre otras. Los mismos se muestran frustrados al trabajar los ejercicios que precisan de tales habilidades para su resolución y por consiguiente, obtienen calificaciones negativas en sus evaluaciones.

Todo lo anterior atenta contra la calidad del proceso de Enseñanza-aprendizaje. Además de eso:

1. Los estudiantes (34,88%) dicen que la trigonometría es un contenido de difícil comprensión.



CONFERENCIA DE INFORMÁTICA, MATEMÁTICA Y CIENCIAS DE LA INFORMACIÓN

Universidad de Holguín, 2020

2. Los estudiantes (93,02%) consideran que en la enseñanza media existen deficiencias que afectan, de manera general el aprendizaje de la Matemática y, en lo particular, el aprendizaje de la trigonometría.
3. Los estudiantes exponen que en la enseñanza media algunos de ellos (13,95%) no reciben la asignatura de Matemática porque no está contemplada en determinados planes de estudio.
4. Los estudiantes (86,04%) consideran que poseen insuficiente bibliografía y/o que la disponible se encuentra en otros idiomas.
5. Los estudiantes (30,23%) dicen que en las literaturas que tratan la trigonometría aparecen pocos ejercicios de aplicación en la Ingeniería Mecánica.
6. Los estudiantes (83,72%) dicen que la mayoría de los folletos de estudio son extensos y que por eso se hace difícil su impresión, afectando la preparación de aquellos que no poseen computadoras o no tienen electricidad donde residen.
7. Los estudiantes (83,72%) muestran gran interés por aprender la trigonometría ya que reconocen su importancia.
8. Algunos profesores manifiestan que los peores resultados se obtienen en aquellos exámenes donde se precisan herramientas trigonométricas para su resolución.
9. Los profesores de la carrera de Ingeniería Mecánica dicen que muchos de los estudiantes (88,38%) presentan dificultades en la interpretación de textos en portugués. Por todo lo anterior se justifica la selección del tema debido a las dificultades que presentan los estudiantes en la trigonometría, en contraposición con su importancia y aplicabilidad en el proceso de Enseñanza-aprendizaje de la carrera.

A partir de esta problemática se consideró que un sistema de ejercicios de trigonometría puede ser usado para la mejoría del proceso de Enseñanza-aprendizaje en este contexto. En función de esta realidad se formuló la siguiente pregunta: ¿Cómo diseñar un sistema de ejercicios de trigonometría que sirva como medio de Enseñanza-aprendizaje de la carrera de Ingeniería Mecánica en la Escuela Superior Politécnica de Zaire/Soyo?

Atendiendo a lo anterior, se declaró como objetivo general: “Proponer un sistema de ejercicios de trigonometría para la mejoría del proceso de Enseñanza-aprendizaje de la carrera de Ingeniería Mecánica en la Escuela Superior Politécnica de Zaire/Soyo”.

2. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Para la realización del diagnóstico fueron utilizados tres instrumentos: dos pruebas parciales de la asignatura Curso Introductorio de Matemática, un cuestionario para estudiantes de Ingeniería Mecánica y una entrevista a cuatro profesores del claustro de la carrera.

Análisis de los resultados de las pruebas parciales

Se utilizaron solamente los resultados de las dos pruebas parciales de la asignatura Curso Introductorio de Matemática y no el examen final porque, en este último, un grupo de los mejores estudiantes fue eximido de realizar el mismo. En cada una de las dos



CONFERENCIA DE INFORMÁTICA, MATEMÁTICA Y CIENCIAS DE LA INFORMACIÓN

Universidad de Holguín, 2020

pruebas parciales fueron evaluadas tres preguntas, algunas de ellas con formato de selección múltiple.

En la primera prueba parcial se evaluaron los contenidos siguientes:

Pregunta 1. Resolución de ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Pregunta 2. Descomposición de fracciones racionales propias en suma de fracciones simples.

Pregunta 3. Resolución de inecuaciones racionales.

En la segunda prueba parcial se evaluaron los contenidos siguientes:

Pregunta 1. Resolución de ecuaciones con radicales.

Pregunta 2. Problemas que conducen a la resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Pregunta 3. Trigonometría y sus aplicaciones.

En la Figura 1 se muestran los resultados obtenidos por los estudiantes en las dos pruebas parciales.

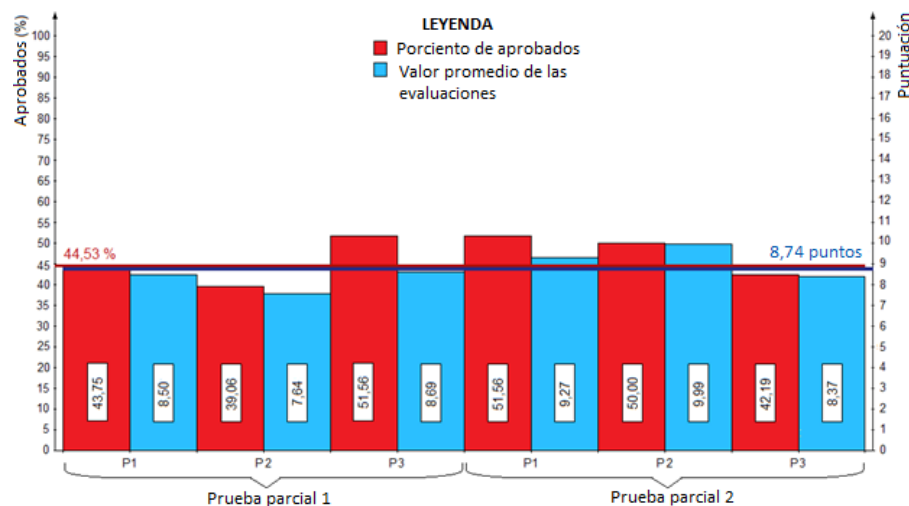


Figura 1. Resultados de las pruebas parciales de la asignatura Curso Introductorio de Matemática.

Puede apreciarse que los estudiantes presentaron las mayores dificultades en el orden decreciente que se muestra a continuación:

1. Descomposición de fracciones racionales propias en suma de fracciones simples.
2. Trigonometría y sus aplicaciones.
3. Resolución de ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

La pregunta de trigonometría evaluó los contenidos siguientes: demostración de identidades trigonométricas, resolución de ecuaciones trigonométricas y resolución de problemas con texto a través de triángulos rectángulos.

A pesar de que la pregunta de trigonometría presentó un formato de selección múltiple y haberse dedicado un mayor fondo de tiempo con respecto a otros contenidos, se



CONFERENCIA DE INFORMÁTICA, MATEMÁTICA Y CIENCIAS DE LA INFORMACIÓN

Universidad de Holguín, 2020

identificó como uno de los dos contenidos más difíciles de la asignatura. Debido a su mayor aplicabilidad en las asignaturas de la carrera de Ingeniería Mecánica se hizo necesaria la utilización de medios de enseñanza que permitieran potencializar la asimilación del referido contenido y, con esto, obtener mayor calidad del proceso de Enseñanza-aprendizaje de la carrera.

Análisis de los resultados del cuestionario

En el cuestionario que se les aplicó a los estudiantes se indagó en aspectos relacionados con el conocimiento de la Matemática, en general, y de la trigonometría y sus aplicaciones, en particular.

En relación a la Segunda Prueba Parcial, el 54,69% de los estudiantes trabajó la pregunta de demostración de identidades trigonométricas, 20,93% trabajó a resolución de ecuaciones trigonométricas y solamente el 20,93% trabajó en la resolución de problemas con textos a través de triángulos rectángulos.

De los estudiantes que respondieron la pregunta de demostración de identidades trigonométricas, 25,58% lo hizo porque consideró que era el contenido menos complejo, sin embargo, tenían conocimientos para responder cualquiera de los contenidos restantes. El 18,60% pudo haber respondido, además de eso, otro de los dos contenidos evaluados e igual porcentaje reconoció no tener dominio del resto de los contenidos evaluados en la pregunta de trigonometría.

Además de los elementos anteriores, 23,26% de los referidos estudiantes consideró que en su selección influyó el hecho de que, en la demostración de las identidades trigonométricas, no se requiere de la interpretación de textos complicados en los enunciados.

Por último, solo el 13,95% de los estudiantes seleccionó un contenido complejo porque consideró que trabajarlo constituía un desafío personal.

Respecto a las cuestiones generales: el 93,02% de los estudiantes consideró que la trigonometría es un contenido de media a difícil comprensión y que en la enseñanza media existen deficiencias que afectan, de manera general, el aprendizaje de la matemática y, en lo particular el aprendizaje de la trigonometría; el 58,14% de los estudiantes respondió que recibió la asignatura de Matemática en la enseñanza media de forma parcial (44,19%) o no la recibió (13,95%). En relación a la bibliografía, el 86,04% consideró que es insuficiente y/o que la disponible se encuentra en otras lenguas; el 30,23% de los estudiantes consideró que en las literaturas que tratan la trigonometría, aparecen pocos ejercicios de aplicación a la Ingeniería Mecánica, mientras que el 53,49% consideró que aparecen de manera parcial; el 83,72% de los estudiantes respondieron que los folletos de ejercicios son, en su mayoría, extensos, lo cual se traduce en dificultades en su impresión o que les obliga a utilizar sus computadoras, dependiendo así del servicio eléctrico durante su auto-preparación o de poseer o no una computadora personal.

Por último, el 83,72% de los estudiantes conocen la importancia que tiene la trigonometría para la carrera que estudian, mientras que el 100% consideró que las



CONFERENCIA DE INFORMÁTICA, MATEMÁTICA Y CIENCIAS DE LA INFORMACIÓN

Universidad de Holguín, 2020

preguntas más complejas son las de trigonometría asociadas a la interpretación de textos.

Análisis de los resultados de la entrevista

Inicialmente se realizó una revisión del plan de estudio de la carrera, para identificar las asignaturas con mayor presencia de la trigonometría como herramienta matemática. De ahí, la selección de la muestra de los profesores del claustro, para ser entrevistados.

Entre las disciplinas donde se manifiesta una mayor relación entre la trigonometría y sus contenidos, se encuentran: Mecánica Aplicada, Matemática Superior, Física y Procesos Tecnológicos.

Parte de los resultados de la entrevista realizada a los profesores del curso de Ingeniería Mecánica se muestran en la Tabla 1, lo cual corrobora la importancia de la trigonometría en el proceso de Enseñanza-aprendizaje de esta carrera.

Tabla 1. Aplicabilidad de la trigonometría en las asignaturas de la carrera Ingeniería Mecánica

Profesores	Asignaturas	Grado de aplicación		
		Bajo	Medio	Alto
Dr. Ángel Isaac Moreno Delfrade	Mecánica Teórica I			X
	Mecánica Teórica II			X
	Resistencia de los Materiales I			X
	Resistencia de los Materiales II			X
M.Sc. Luis Enrique Rodríguez González	Curso Introductorio de Matemática			X
	Matemática I			X
	Matemática II	X		
	Matemática III	X		
M.Sc. Andrés Ferrer Castillo	Curso Introductorio de Física			X
	Física I			X
	Física II			X
	Electricidad Aplicada a la Ingeniería Mecánica			X
M.Sc. Raúl Felipe Pacheco Gamboa	Teoría de los Mecanismos			X
	Elementos Finitos			X
	Mediciones Técnicas	X		
	Procesos Tecnológicos I	X		
	Procesos Tecnológicos II			X

Un aspecto a destacar, del resultado de la entrevista realizada a los cuatro profesores, es que sus disciplinas son afectadas, cada vez que se precisa de la trigonometría como herramienta para la resolución de ejercicios, dada la gran aplicabilidad de la misma en



CONFERENCIA DE INFORMÁTICA, MATEMÁTICA Y CIENCIAS DE LA INFORMACIÓN

Universidad de Holguín, 2020

los contenidos de sus asignaturas y a las dificultades de base que poseen los estudiantes.

Propuesta del sistema de ejercicios

A partir de la caracterización general de los sistemas, se diseñó un sistema de ejercicios de trigonometría, como contribución fundamental de la investigación, el cual presenta las características que se relacionan a continuación.

1. Lenguaje adecuado: el lenguaje utilizado es claro, preciso, acorde al contexto, sin olvidar el carácter técnico y universal del lenguaje matemático. Lo anterior facilita a los estudiantes profundizar el contenido estudiado en clases y/o el aprendizaje de manera autodidacta, a pesar de las dificultades que estos presentan en la interpretación de textos en lengua portuguesa.
2. Estructura lógica: los ejercicios tienen un orden de aparición que va desde los contenidos más simples hasta los más complejos, de manera gradual y sistémica.
3. Presentación estética: la utilización pertinente de figuras, esquemas y gráficos, facilita el aprendizaje de los contenidos, ya que contribuye al aprendizaje, sobre todo con el uso de colores atractivos, sin que se pierda el carácter científico de la investigación.
4. Inclusión de ejemplos resueltos: resultan un patrón o guía para la aplicación de la teoría a la resolución de los ejercicios propuestos, tanto para los docentes como para los estudiantes.
5. Nivel accesible de los ejercicios propuestos: permite que los estudiantes puedan resolver dichos ejercicios, elevando así la autoconfianza y la motivación en el aprendizaje de los contenidos.
6. Diversidad de ejercicios: satisfacen las necesidades de aprendizaje de los estudiantes, de acuerdo a sus posibilidades individuales y con aplicación en distintas asignaturas del curso de Ingeniería Mecánica.
7. Igual finalidad: entre los ejemplos resueltos fueron utilizados diferentes métodos y procedimientos de resolución, posibilitando a los estudiantes identificar las ventajas y desventajas de cada uno, lo cual facilita la selección del método o procedimiento a emplear en la resolución de los ejercicios propuestos.
8. Orientaciones metodológicas: Constituye una guía para los estudiantes y profesores, en función de un mejor y más rápido aprendizaje.

A continuación, se presenta una pequeña parte del sistema de ejercicios propuesto, donde se observa las características expuestas anteriormente.

3.2.3 Exercícios de equações trigonométricas

A continuação determinan-se as soluções de algumas equações trigonométricas condicionais, com o uso dos procedimentos algebraico e gráfico, o qual constitui uma guia para a resolução dos exercícios propostos.

3.2.3.1 Exercícios resolvidos

Exercício 1: Encontre as soluções das equações trigonométricas seguintes no intervalo $[0; 2\pi)$:



CONFERENCIA DE INFORMÁTICA, MATEMÁTICA Y CIENCIAS DE LA INFORMACIÓN

Universidad de Holguín, 2020

$$a) 2 \cos^2 x - \cos x = 0 \quad b) 2 \sin^2 x + \sin x = 0$$

$$c) \sin 2x = \sin x \quad d) \sin^2 x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

Resposta

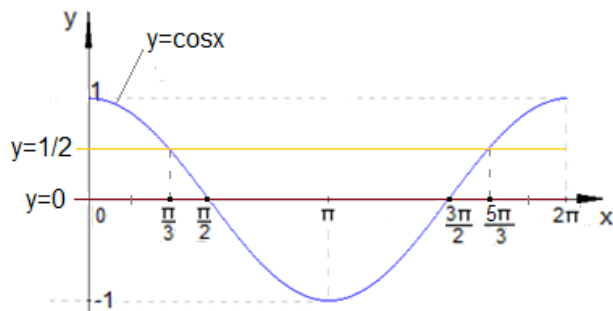
$$a) 2 \cos^2 x - \cos x = 0$$

$$\cos x(2 \cos x - 1) = 0 \quad 2 \cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = \cos x \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} y = \cos x \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Aplicando o método gráfico irão apreciar as soluções da equação no intervalo $(0; 2\pi]$, como é mostrado abaixo.



$$\therefore S = \left\{ x_1 = \frac{\pi}{3}, x_2 = \frac{\pi}{2}, x_3 = \frac{3\pi}{2} \text{ e } x_4 = \frac{5\pi}{3} \right\}$$

Outra maneira de determinar ditas soluções é com a aplicação do inverso das funções trigonométricas e a utilização da circunferência unitária, como é mostrada abaixo.

$$\cos x = 0 \quad \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\arccos(\cos x) = \arccos 0$$

$$\arccos(\cos x) = \arccos \frac{1}{2}$$

$$x = \arccos 0 \quad x = \arccos \frac{1}{2}$$

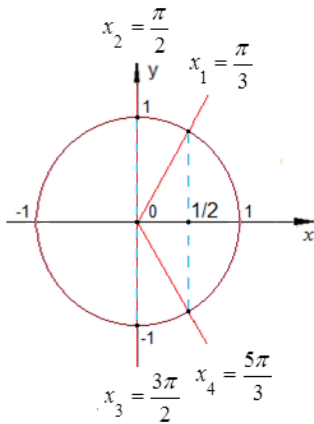
$$x = \frac{\pi}{2}$$



CONFERENCIA DE INFORMÁTICA, MATEMÁTICA Y CIENCIAS DE LA INFORMACIÓN

Universidad de Holguín, 2020

$$x = \frac{\pi}{3}$$



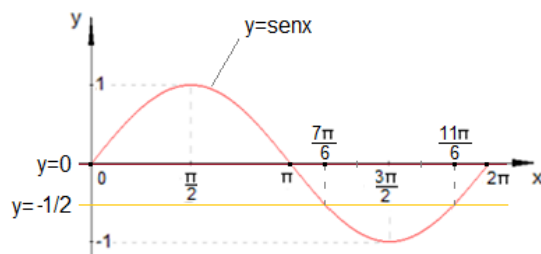
$$\therefore S = \left\{ x_1 = \frac{\pi}{3}, x_2 = \frac{\pi}{2}, x_3 = \frac{3\pi}{2} \text{ e } x_4 = \frac{5\pi}{3} \right\}$$

b) $2 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 0$

$$\operatorname{sen} x (2 \operatorname{sen} x + 1) = 0 \quad 2 \operatorname{sen} x + 1 = 0$$

$$\operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = \operatorname{sen} x \\ y = 0 \end{cases} \quad \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} y = \operatorname{sen} x \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Aplicando o método gráfico irão apreciar as soluções da equação no intervalo $(0; 2\pi]$, como é mostrado abaixo.



$$\therefore S = \left\{ x_1 = 0, x_2 = \pi, x_3 = \frac{7\pi}{6} \text{ e } x_4 = \frac{11\pi}{6} \right\}$$

3. CONCLUSIONES

1. La utilización del sistema de ejercicios propuesto, permitirá potencializar el desarrollo intelectual de los estudiantes, ya que acelera la aproximación entre los niveles real y potencial del propio desarrollo (Zona de Desarrollo Próximo), durante la resolución de ejercicios con o sin ayuda del profesor.



CONFERENCIA DE INFORMÁTICA, MATEMÁTICA Y CIENCIAS DE LA INFORMACIÓN

Universidad de Holguín, 2020

2. Como resultado del diagnóstico realizado a los estudiantes de primer año de la carrera de Ingeniería Mecánica, se determinó que la trigonometría y sus aplicaciones constituyen uno de los contenidos más complejos de la asignatura Curso Introductorio de Matemática, debido a problemas de interpretación de textos en lengua portuguesa y por ser un contenido muy integrador. Todo lo anterior unido a su gran aplicabilidad y a los problemas detectados en las evaluaciones, justificó su selección como tema a investigar.

3. El diseño del sistema de ejercicios de trigonometría propuesto tuvo en cuenta los aspectos teóricos contenidos en la teoría general de los sistemas, por eso su estructura sistémica permitirá un aprendizaje gradual y sólido por parte de los estudiantes y una mejor orientación por parte de los profesores. Como consecuencia, una mejoría del proceso de Enseñanza-aprendizaje de la trigonometría, de la asignatura Curso Introductorio de Matemática y por ende, del resto de las asignaturas de la carrera.

4. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barnett, R. A., y otros. (2003). Pre-cálculo. Funciones y Gráficas. Editorial Félix Varela. La Habana. Cuba.

Correa, F. (2015). Fundamentación del uso de los medios de enseñanza. http://www.unacar.mx/cuerpos/educacion_fisica/contenido/articulos_ef/medios.html

_____ (2015) Ejercicios e problemas resueltos de trigonometría. www.vitutor.com/al/trigo/triactividades.html

De Luna, M., Díaz, J. J., Salinas, H., & Hernández, H. (2019). Situaciones didácticas y aprendizaje colaborativo en la enseñanza de conceptos de trigonometría: experiencia aúlica.

Noé, M. (2016). Trigonometría. <http://www.brasilecola.com/matematica/trigonometria.htm>

5. SOBRE LOS AUTORES

Luis Enrique Rodríguez González: Profesor de Matemática Superior en el Departamento de Matemática, Facultad de Informática Matemática de la Universidad de Holguín, Máster en Eficiencia Energética y Profesor Auxiliar, correo de contacto: luise@uho.edu.cu.

Alberto Rodríguez Guerrero: Profesor de Matemáticas Superior en el Departamento de Matemática, Facultad de Informática Matemática de la Universidad de Holguín, Máster en Ciencias y Profesor Auxiliar, correo de contacto: arodriguezg@uho.edu.cu.

Jorge Luis Parra Paneque: Profesor de Matemática Superior en el Departamento de Matemática, Facultad de Informática Matemática de la Universidad de Holguín, Máster



**CONFERENCIA DE INFORMÁTICA, MATEMÁTICA Y
CIENCIAS DE LA INFORMACIÓN**

Universidad de Holguín, 2020

en Matemática Avanzada para la Ingeniería y Profesor Auxiliar, correo de contacto:
jparra@uho.edu.cu.