

TRABAJO DE DIPLOMA EN OPCIÓN DEL TÍTULO DE LICENCIATURA  
EDUCACIÓN MATEMÁTICA FÍSICA

SITUACIONES ORIENTADAS AL APRENDIZAJE DE LAS  
FUNCIONES CUADRÁTICAS, Y LA EDUCACIÓN CIENTÍFICO Y  
TECNOLÓGICO DE ALUMNOS DE NOVENO GRADO

GRETTEL MORA CAMPOS.

HOLGUÍN

2018



TRABAJO DE DIPLOMA EN OPCIÓN DEL TÍTULO DE LICENCIATURA  
EDUCACIÓN MATEMÁTICA FÍSICA

SITUACIONES ORIENTADAS AL APRENDIZAJE DE LAS FUNCIONES  
CUADRÁTICAS, Y LA EDUCACIÓN CIENTÍFICO Y TECNOLÓGICO  
DE ALUMNOS DE NOVENO GRADO

Autor: Grettel Mora Campos

Tutor: MSc. Tania M. Toledo Riverón

HOLGUÍN

2018



## RESUMEN

Este trabajo se realiza con el objetivo de brindar situaciones de aprendizaje donde se evidencie el papel de las funciones cuadráticas en el desarrollo de la ciencia y la tecnología. Permite al alumno de secundaria básica profundizar en el papel importante que juega la Matemática en la vida.

Para ello utilizamos métodos como: análisis y síntesis para interpretar los resultados obtenidos de la aplicación de los métodos empíricos en el orden particular y general y determinar las principales dificultades que presentan los alumnos en el relacionar el aprendizaje de las funciones cuadráticas con la ciencia y la tecnología.

Inductivo - deductivo para realizar inferencias de los resultados obtenidos de cada pregunta y cada instrumento en el orden individual y colectivo así como para triangular toda la información obtenida y determinar el estado actual del problema, sus posibles causas y la factibilidad de las actividades.

La observación para constatar la preparación de los alumnos en cuanto a los conocimientos que estos tienen con respecto al papel de la Matemática en la ciencia y la tecnología. Entrevista a profesores para ver el conocimiento que estos poseen respecto al papel de la Matemática en la ciencia y la tecnología. Matemático para interpretar mediante el análisis porcentual los resultados obtenidos en el diagnóstico inicial y final.



## **ABSTRACT**

This Diploma Paper aims to provide professors with learning situations in which there is evidence of the role of quadratic equations in the scientific and technological development of our society. It allows the secondary school student to deepen in the importance of Mathematics in real life situations.

To reach this goal the author has applied methods like: analyses and synthesis to interpret the results obtained in the application of the empiric methods at particular and general levels and determine the main difficulties that the students present when they have to relate the quadratic equations with science and technology.

Inductive-deductive to infer the results obtained from every question and instrument in the individual and collective orders to triangle the information obtained and determine the current state of the problem, its main causes and the activities' feasibility.

The observation to verify the student's knowledge regards the role of Mathematics in science and technology. Interview to the teachers to establish their knowledge level regards the role of Mathematics in science and technology. Mathematic method to interpret the analyses in percentage terms of the results obtained in the initial and final diagnosis.



## **DEDICATORIA**

A mis padres, por su apoyo en todo momento, por ser ejemplo de dedicación y sacrificio, nada podría haber hecho sin la ayuda y estímulo de ellos.

En especial a mi mamá, por estar siempre presente, sin importar el momento o lugar.

A mi esposo, por su ayuda incondicional y por todo el amor brindado.

A mi tutora por ser ejemplo y guía.

Y a todas aquellas personas que de una forma u otra forman parte de mi vida.



## **AGRADECIMIENTOS**

Constituye mi primer deber dejar constancia de la más profunda gratitud a la MSc Tania M. Toledo Riverón, sin cuya valiosa tutoría no hubiera podido realizarse esta investigación.

A mi familia por su ayuda y comprensión en los momentos difíciles.

A todos los compañeros y demás personas por su apoyo incondicional.

A la Revolución Cubana porque solo ella brinda la posibilidad a cualquier joven de hacer realidad sus sueños.

A todos, mi eterno agradecimiento.



## ÍNDICE

INTRODUCCIÓN .....	1
DESARROLLO.....	7
Epígrafe1: El aprendizaje de la Matemática y su papel en la ciencia y la tecnología. .....	7
1.1 La educación científica y tecnológica de los alumnos de noveno grado de la Secundaria Básica “Celia Sánchez Manduley”. .....	7
1.2 El desarrollo del concepto de función .....	10
1.3 Tratamiento metodológico del proceso de aprendizaje de las funciones cuadráticas en noveno grado.....	21
Epígrafe 2 Situaciones de aprendizaje para los alumnos de noveno grado de la Secundaria Básica “Celia Sánchez Manduley” .....	25
2.1 Las funciones cuadráticas en el desarrollo tecnológico y científico de la sociedad.....	25
2.2 Situaciones de aprendizaje .....	27
Epígrafe 3 Caracterización del estado inicial y final del proceso de aprendizaje de las funciones cuadráticas y su papel en la educación científico y tecnológico de los alumnos de noveno grado .....	32
3.1 Situación actual de los alumnos de noveno grado .....	32
3.2 Constatación de los resultados .....	33
CONCLUSIONES.....	35
RECOMENDACIONES .....	36
BIBLIOGRAFÍA .....	37
ANEXOS .....	42



## INTRODUCCIÓN

El mundo actual se encuentra sumido en una gran revolución sociocultural basada en la ciencia y la tecnología. Esto hace que la forma de pensar y actuar de los científicos haya pasado a formar parte de las distintas ramas de la producción y los servicios. Por ende, el mundo laboral de hoy requiere de personas con conocimientos, instrumentaciones, actitudes y valores acorde con estas exigencias. Al educar a las personas es importante tomar en consideración que “...educar es depositar en una persona toda la obra humana que le ha antecedido; es hacerle resumen del mundo viviente, hasta el día en que vive; es ponerla a nivel de su tiempo para que flote sobre él y no debajo de su tiempo, con lo que no podría salir a flote; es prepararla para la vida”<sup>1</sup>, o sea, para adaptarse y transformar el contexto de su existencia; pues como bien dijo el ilustre educador cubano Enrique José Varona, “...vivir para todos los organismos es adaptarse al medio; más para la persona, vivir no es solo adaptarse al medio sino transformarlo y mejorarlo. Lo demás no sería vivir, sino vegetar.”<sup>2</sup>

Debido a lo planteado los conocimientos científicos que forman hoy parte de la cultura humana, y que son aprendidos por los alumnos en los centros educacionales, no pueden llegarles a ellos desde afuera y ser aprendidos como cadenas verbales, o sea, como una unión consecutiva, estricta e inalterable de palabras o frases, por lo general disfuncional para la persona, como sucede hoy en la mayoría de los casos. Estos conocimientos deben ser aprendidos por el alumno a partir de su actuación y en la calidad que le corresponde.

Las principales tendencias que se han manifestado en el proceso de aprendizaje de las ciencias se encuentran muy ligadas a las propias concepciones que se han tenido sobre la ciencia a lo largo de la historia. Analizar cada tendencia se observa su repercusión en la enseñanza de las ciencias en Cuba.

El problema es tratar de adecuar la concepción acerca de la ciencia que actualmente tienen los científicos a la ciencia de los escolares. El desafío es conseguir que la

---

<sup>1</sup>Martí J. Obras Completas. Editorial Ciencias Sociales. La Habana, 1968.

<sup>2</sup>Varona E. J. Escritos de Educación y Enseñanza. Ediciones UNESCO, La Habana, 1960.



ciencia que se enseñe sea capaz de motivar a los alumnos con problemas interesantes a través de los cuales aprendan conocimientos básicos y fundamentales. Además, los alumnos han de familiarizarse con los procedimientos del quehacer científico y formar valores que puedan utilizar en su vida personal y comunitaria y les ayuden en su toma de decisiones. La escuela por otro lado tiene también la misión de formar a los futuros científicos y por ende desarrollar en sus alumnos aspectos relacionados con la creatividad en la ciencia. La ciencia en la actualidad debe unírsele la interdisciplinariedad.

Los contenidos sobre los que descansa el aprendizaje de los conocimientos científicos y su enseñanza, así como las principales características y los procedimientos fundamentales para la obtención de este tipo de conocimiento, no son del dominio de la mayor parte de los profesores. Esto hace que los mismos no puedan lograr con su enseñanza, el aprendizaje de los conocimientos científicos por parte de los alumnos. Lo que hacen es transmitírselos a ellos de manera ya acabada y hacer que estos los fijen como cadenas verbales a partir de la aplicación mecánica de los mismos. Sin embargo el conocimiento científico debe ser construido por el alumno a partir del establecimiento por él mismo de las relaciones que como generalización se establecen en ese conocimiento.

La utilización de métodos empíricos de investigación científica permitió caracterizar esta situación en la SB “Celia Sánchez M.” y como resultado se determinaron las irregularidades siguientes:

- Falta conocimiento en los alumnos acerca del papel de la Matemática en la ciencia y la tecnología.
- Pobre trabajo en el proceso de aprendizaje de la Matemática que evidencie su significado en el desarrollo de la ciencia y la tecnología para el desarrollo social.
- No se potencia, en particular el papel de las funciones cuadráticas en el desarrollo científico tecnológico, alcanzado por la sociedad.
- En el aprendizaje de las funciones cuadráticas se percibe que los alumnos no lo asocian con el significado práctico de estos contenidos, ni como método



matemático para resolver problemas científicos.

Los argumentos antes planteados dieron lugar al siguiente **problema científico**: Insuficiencias en el proceso de aprendizaje de las funciones cuadráticas no favorecen la comprensión del papel de la Matemática en el desarrollo científico tecnológico de la sociedad por los alumnos de noveno grado de la Secundaria Básica “Celia Sánchez Manduley”.

La revisión bibliográfica respecto al tema que se investiga muestra importantes aportes entorno al papel de la Matemática en la ciencia y la tecnología, algunos de ellos son los de Jiménez A (1991), Núñez, J (1998), Rodríguez, M y otros (2000). Moltó E. (1987, 2000); Valdés, R. y Valdés, P (2004).

Según se aprecia en todas estas valiosas obras científicas se enfatiza en la diferencia entre la ciencia que hacen los científicos y la ciencia que hacen los alumnos y la necesidad de la elaboración de propuestas didácticas para una educación científica de masas, que prepare verdaderamente al hombre para la vida moderna aunque no se orienta suficientemente como lograrlo en la práctica y en particular a través de la enseñanza de contenidos matemáticos de los programas vigentes como es el caso de las funciones cuadráticas.

Es por ello que el **objeto** de la investigación que se plantea es: El proceso de aprendizaje de la Matemática en noveno grado y como **objetivo**: la elaboración de situaciones de aprendizaje donde se demuestre el papel de las funciones cuadráticas en el desarrollo de la ciencia y la tecnología.

Y como **campo** de investigación el proceso de aprendizaje de las funciones cuadráticas en noveno grado y su papel en la ciencia y la tecnología.

En la búsqueda de la solución del problema científico se formulan las siguientes preguntas científicas:

1. ¿Qué fundamentos teóricos metodológicos sustentan el aprendizaje de las funciones cuadráticas, orientado a la educación científica y tecnológica de los alumnos de noveno grado?
2. ¿Cómo se encuentra el estado actual del proceso de aprendizaje de las funciones cuadráticas en noveno grado y su papel en la educación científico y tecnológico de los alumnos de noveno grado?



3. ¿Qué situaciones de aprendizaje pueden utilizarse para el tratamiento a las funciones cuadráticas orientadas a la educación científico y tecnológico de los alumnos de noveno grado?
4. ¿Cómo constatar la utilidad práctica de las situaciones de aprendizaje propuesta?

Y para dar respuesta a estas preguntas se orientan en la lógica de la realización de este trabajo, las siguientes tareas:

- 1- Determinar fundamentos teóricos y metodológicos que sustentan el aprendizaje de las funciones cuadráticas, orientado a la educación científica y tecnológica de los alumnos de noveno grado.
- 2- Diagnosticar el estado actual del proceso de aprendizaje de las funciones cuadráticas en noveno grado y su papel en la educación científico y tecnológico de los alumnos de noveno grado.
- 3- Diseñar situaciones de aprendizaje para el tratamiento a las funciones cuadráticas orientadas a la educación científico y tecnológico de los alumnos de noveno grado.
- 4- Constatar la utilidad práctica de las situaciones de aprendizaje propuesta.

Para acometer con éxito cada una de las tareas planteadas se aplican los siguientes métodos:

#### **Empíricos:**

1. La observación: Para constatar la educación científica y tecnológica de los alumnos de noveno grado a través del proceso de enseñanza- aprendizaje de la Matemática en general y de las funciones cuadráticas en particular.
2. La encuesta: Para constatar la educación científica y tecnológica de los alumnos de noveno grado a través del proceso de enseñanza- aprendizaje de la Matemática en general y de las funciones cuadráticas en particular.
3. Entrevista a profesores: Para constatar la educación científica y tecnológica de los alumnos de noveno grado a través del proceso de enseñanza- aprendizaje de la Matemática en general y de las funciones cuadráticas en particular.
4. Revisión de documentos: Para caracterizar los fundamentos teóricos que



sustentan la propuesta de situaciones que se proponen para la educación científico y tecnológico de los alumnos de noveno grado a través del proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones cuadrática en particular.

5. La entrevista: Para constatar la educación científica y tecnológica de los alumnos de noveno grado a través del proceso de enseñanza- aprendizaje de la Matemática en general y de las funciones cuadráticas en particular.

### **Teóricos:**

1. Análisis y síntesis: Para interpretar los resultados obtenidos de la aplicación de los métodos empíricos en el orden particular y general.

2. Inducción -deducción: para realizar inferencias de los resultados obtenidos de cada pregunta y cada instrumento (Métodos Empíricos) en el orden individual y colectivo así como para triangular toda la información obtenida y determinar el estado actual del problema, sus posibles causas y la determinación de aspectos teóricos- metodológicos que fundamentan el problema planteado y su posible solución.

### **Procedimientos Matemáticos:**

Para interpretar mediante el análisis porcentual los resultados obtenidos en el diagnóstico inicial.

Para realizar esta investigación se determinó la siguiente población y muestra tomadas de la Secundaria Básica “Celia Sánchez Manduley”:

Población: Total alumnos de noveno grado de dicha escuela:

Total: 141

Muestra: Se escoge el grupo que arrojó mayor dificultad en conocimientos acerca del papel de las funciones cuadráticas en el desarrollo científico y tecnológico de la sociedad.

Total: 31

En la presente investigación se aportan ideas novedosas y de gran utilidad práctica que exponen cómo utilizar en distintas situaciones de aprendizaje ejemplos y ejercicios que aparecen en los libros de textos actuales y otras bibliografías



consultadas, para el desarrollo de la educación científica y tecnológica de alumnos de noveno grado de la Secundaria Básica “Celia Sánchez Manduley”.



## DESARROLLO

### **Epígrafe1: El aprendizaje de la Matemática y su papel en la ciencia y la tecnología.**

En este epígrafe se hace referencia a algunas cuestiones acerca de la educación científica y tecnológica de los alumnos de noveno grado a través del proceso de aprendizaje de la Matemática en general y de las funciones cuadráticas en particular.

#### **1.1 La educación científica y tecnológica de los alumnos de noveno grado de la Secundaria Básica “Celia Sánchez Manduley”.**

La tecnología es el conjunto de saberes, conocimientos, habilidades y destrezas interrelacionados con procedimientos para la construcción y uso de artefactos naturales o artificiales que permiten transformar el medio para cubrir anhelos, deseos, necesidades y compulsiones humanas, siendo el uso de la tecnología parte fundamental para el desarrollo de la humanidad durante toda su historia. (Ecured, Enciclopedia Cubana, 4 de abril de 2016.)

La ciencia como conocimiento que se obtiene mediante la observación de patrones regulares, de razonamientos y de experimentación en ámbitos específicos, a partir de los cuales se generan preguntas, se construyen hipótesis, se deducen principios y se elaboran leyes generales y lograrlo. Según Valdés, R. y Valdés, P (2004), durante las últimas cuatro décadas la investigación e innovación en torno a la educación científica ha prestado especial atención a:

- La necesidad de actualizar sistemáticamente los cursos de las diferentes materias, ante los vertiginosos cambios experimentados por la ciencia y la tecnología.
- La elaboración de propuestas didácticas para una educación científica de masas, que prepare verdaderamente al hombre para la vida moderna.

Sobre la primer cuestión afirma además que para la actualización de los cursos hay que tener presente que, hay que tener en cuenta tanto el sistema de conocimientos, las aplicaciones prácticas y el uso de nuevas tecnologías educativas, hacia lo cual usualmente se dirige el interés principal; como también las características del propio



proceso de aprendizaje, cuestión a la que se ha dedicado menos atención.

Se puede verificar lo planteado respecto a que, mientras en los diferentes cursos suelen incluirse conocimientos y aplicaciones técnicas correspondientes a las últimas décadas, los métodos y formas de trabajo empleados a menudo, no siempre reflejan los que se utilizaban en las investigaciones hace ya más de tres siglos, en la época de Galileo y Newton.

Hay que tener en cuenta además que “...para trabajar en la industria moderna, es necesario haber recibido varios años de educación científica. Debido al enorme impacto de la ciencia en la tecnología, la producción y la vida de las personas, existe la necesidad apremiante de una formación científica masiva (UNESCO 1993, National Research Council 1996, García 1996, Niedo y Macedo 1997), que abarque la educación primaria, secundaria, universitaria e incluso de postgrado.”<sup>3</sup>

En la obra citada anteriormente se afirma que la didáctica de las ciencias está llamada a producir profundos cambios en los objetivos, contenido y metodología de la enseñanza, con el fin de solucionar dos problemas básicos: 1) Actualizar los cursos de la distintas asignaturas y 2) lograr que los alumnos aprendan lo previsto; en las condiciones de una educación científica de masas y en medio de profundas y aceleradas transformaciones de la ciencia y la tecnología. Y concreta tres ideas ligadas al tema que se investiga:

- Imprimir una orientación cultural a la educación científica.
- Atender a las características esenciales de la actividad psíquica humana durante el proceso de aprendizaje.
- Considerar durante el proceso de aprendizaje los rasgos fundamentales de la actividad científica investigadora contemporánea.

Y esto no siempre se tiene en cuenta, porque se le deja a la iniciativa del profesor.

La ciencia, su relación con la sociedad y la tecnología, así como su impacto en el proceso de aprendizaje, se empieza a manifestar en la Didáctica de las Ciencias a través de una nueva tendencia basada en un enfoque del proceso de aprendizaje de las ciencias que consiste en aproximar el proceso de aprendizaje a un proceso de

---

<sup>3</sup> Citado por Valdés, R. y Valdés, P (2004), pág. 4.



investigación dirigida que se corresponda con las características anteriormente apuntadas. Esta concepción planteada inicialmente por el Dr. Daniel Gil y sus colaboradores del grupo de Valencia, España, ha sido aceptada y enriquecida en Cuba por un grupo de investigadores cubanos en la Didáctica de las Ciencias de la Facultad de Ciencias de la universidad pedagógica “E. J. Varona” de Ciudad de La Habana, Cuba. Esta concepción enriquecida ha sido denominada por estos investigadores “un enfoque sociocultural del proceso de aprendizaje de las ciencias”. En Cuba está siendo aplicado en las transformaciones que se están haciendo en los currículos de Física y Matemática en la secundaria básica cubana y en las disciplinas de Física y Didáctica de la Física en la formación de profesores para esta ciencia en la referida universidad. Aunque en la práctica, las condiciones materiales de la educación cubana limitan la aplicación de dicho enfoque por lo que la creatividad del profesor en la búsqueda de alternativas para lograrlo juega un papel esencial.

Por ejemplo, a pesar de que en Cuba actualmente se actualizan los cursos de Matemática en todas las educaciones, de manera sistemática, es insuficiente el desarrollo científico y tecnológico que potencialmente se logra en los alumnos de noveno grado a través del aprendizaje de la Matemática, en ocasiones por la falta de orientaciones metodológicas concretas para el tratamiento de las aplicaciones y relaciones que tienen los contenidos a impartir en clases, con la vida diaria, la utilización de las Tecnologías de la Informática y las Comunicaciones, y su utilidad en la ciencia y la tecnología.

Por otro lado se concibe la cultura de la sociedad como el sistema de valores surgido de la actividad práctica, espiritual y teórica del hombre, que distingue a un pueblo, país o a la humanidad en una época determinada (Encarta 2000). Sus componentes principales pueden ser definidos de manera generalizada en la forma siguiente:

- Recursos materiales producidos por el hombre, es decir, el conocimiento humano objetivado en edificaciones, instrumentos de trabajo, máquinas, libros, pinturas, grabaciones musicales, etc.
- Sistema de conocimientos acerca de la naturaleza, la técnica, la sociedad, el



pensamiento y los modos de actuar.

- Características generales de la realización de acciones, intelectuales y prácticas, y muy especialmente de la imprescindible actividad creadora, sin la que es imposible el desarrollo cultural.
- Actitudes, normas de relación hacia el medio y las personas, y determinado sistema de valores morales.

Se deduce entonces que en el desarrollo cultural de la sociedad incide en conocimiento de los valores materiales creados por el hombre y la experiencia históricamente acumulada. Estos elementos generales de la cultura son punto de partida, parte y resultado de la actividad de personas concretas, sin la cual no existirían. Semejante estructura es común para la producción, el arte, la ciencia y el sistema de educación que, entrelazados en la cultura de la sociedad, forman una unidad.

Es responsabilidad de cada profesor trabajar por lograr el desarrollo cultural que necesita hombres y mujeres que deben participar de manera activa en la construcción del socialismo próspero y sustentable que se aspira en Cuba.

## **1.2 El desarrollo del concepto de función**

Desde la Prehistoria existen evidencias de cómo se opera con el concepto de función en cada contexto social:

En tablas de correspondencia que provienen de la observación de fenómenos naturales, ya que la idea de función está ligada históricamente a la percepción desarrollada de correlaciones entre los fenómenos de la naturaleza.

Los babilonios hicieron un progreso notable (ver A. Youschkevich- “The concept of function up to the middle of 19th century”, Archive for History of Exact Sciences, 16 (1976), 36-85).

La noción de función se encuentra en las tablillas astronómicas del período seléucida. Sobre estas tablillas, existen relaciones aritméticas que provienen de la observación de fenómenos análogos, por ejemplo los períodos de visibilidad de un planeta y la distancia angular del mismo al Sol.

Hacia el siglo XIV, los diferentes sabios, retomando las ideas de Aristóteles sobre el movimiento, desarrollaron considerablemente la cinemática; como rama de la



mecánica, ella está evidentemente ligada a la geometría, de manera que su desarrollo no puede ser considerado aislado y separado de la discusión general de relaciones funcionales en el mundo natural.

Uno de esos sabios era Thomas Bradwardine que, en su tratado, aborda el concepto de función potencia (“Tractatus de proportionibus”, 1328). Después de este tratado, varios trabajos han aparecido en los cuales la teoría de las proporciones era desarrollada en relación con esta función.

Particularmente, Nicole Oresme (1323-1382), obispo de Normandía, en su “Algorismusproportium”, explora las reglas para manipular las funciones potencia y es el primero que concibió la noción de potencias fraccionarias.

Además, Oresme, utilizando las expresiones de “latitud” y “longitud”, netamente para la representación de las trayectorias de los astros, fue llevado a la representación gráfica. Muchos historiadores de la Matemática consideran que Oresme con las palabras “latitudoformarum” introdujo el germen de la idea de función (ver Youschkevich, Ob. cit, p.46).

Hasta el siglo XVII, las curvas eran bien definidas por sus propiedades geométricas y el concepto de función era una noción que faltaba al estudio de las curvas.

Descartes con sus aplicaciones de métodos algebraicos en geometría, mostró el camino para la introducción de la noción de función.

Newton, en su “Methodusfluxionum” (escrito en 1671, pero publicado en 1736) hace uso de la locución “relata quantitas” expresión que se aproxima bastante al sentido de la palabra función.

En 1673, en su memoria “Methodustangentium inversa sen de foctionibus”, Leibniz emplea la expresión “functionemfaciens” o “functio” para designar magnitudes cuyas variaciones están ligadas por una ley.

El dice que si uno traslada el punto de la curva al cual le corresponde un valor definido de esas magnitudes, estos varían al mismo tiempo que la abscisa o la ordenada de ese punto.

En 1698, Jean Bernoulli utiliza el término “fonctions des ordonnées” en una carta, concerniente al problema de las isoperimétricas, que él dirigía a Leibniz.

En 1718, él (Bernoulli) da la definición siguiente: “Se llama función de una cantidad variable, una cantidad que compone de una cierta manera de ésta cantidad y de constantes”.



En esa memoria, Jean Bernoulli ha dado, como símbolo, la letra griega  $\sigma$ , para representar la función de una variable dada "... tomando  $\sigma$  por la característica de esas funciones".

Euler, fue el más grande formalista del siglo XVII del cálculo infinitesimal. Habiendo rechazado correctamente los argumentos geométricos como medios válidos para establecer la ciencia de los infinitésimos, Euler fundó el tema sobre una teoría formal de funciones y sus medios, dependiendo de la concepción de función. Para Euler, la funcionalidad era la materia de la representación formal, más que un reconocimiento conceptual de un informe.

Es necesario hacer notar que Euler fue el primero, que había empleado los paréntesis y también la letra f, inicial de la palabra función (ver A. Cajori- "A History of Mathematical Notations", London: Open Court Company, 1929).

Euler, en el primer volumen de su "Introductio in analysisinfinitorum" (1748), definió la función como una expresión analítica cualquiera. Más precisamente, dio la definición siguiente: "La función es la expresión analítica cualquiera de las cantidades variables y de números o con cantidades constantes".

Sin embargo, se debe decir sobre esta definición de Euler que:

Las operaciones admitidas no son claramente distinguidas.

Él no excluye alguna expresión que contenga operaciones infinitas (no hay problema de convergencia).

Sin embargo, la palabra función para Euler no significa totalmente la cantidad concebida como dependiente de las variables, sino como una expresión analítica con constantes y variables que serán representadas por simples símbolos.

Algunas veces, Euler utilizaba otra definición de "función", es decir, "la relación entre Y y X expresadas sobre el plano por una curva trazada a mano libre".

Como se verá, esas dos definiciones concurrentes se encuentran en la historia posterior. Así, Lagrange siguió la idea expresada en la primera definición, mientras que Fourier siguió la idea de la segunda definición.

Hacia la última mitad del siglo XVII se encuentra por una parte la investigación sobre la posibilidad de representar una función por una serie trigonométrica, investigación que resultaba de la investigación de problemas físicos. Pero la concepción de función no responde suficientemente a todas las necesidades de la ciencia. En efecto, ella se encuentra insuficiente en el dominio de la física-



matemática; y sobre todo, en lo que concierne a los problemas de las cuerdas vibrantes. Evitaremos el perdernos en detalles de la famosa discusión en la que cayeron desde 1741, D'Alembert y Euler insistía sobre el punto siguiente: la naturaleza del problema exige que se admitan todas las funciones figuradas por las líneas trazadas por un movimiento libre de la mano. En lo que sigue, Euler insiste sobre el hecho que las funciones arbitrarias de ese género no son, en general, representables por una expresión analítica única que queda invariable para todos los valores de variable independiente.

No estando satisfechos de la definición de función arriba citada, Euler se sentía obligado a formular otra. Esta nueva definición figura en el prefacio de su obra "Institutiones calculidifferentialis", que él escribió en 1755. Con esta nueva definición, Euler abandonó:

Las expresiones analíticas como lo principal de la definición de una función.

El problema de la representación analítica.

La nueva concepción de Euler consiste en dar la definición de función como una relación arbitraria entre las cantidades variables de una dependencia cualquiera. Más precisamente, su definición es la siguiente: "las cantidades dependiendo de las otras de manera que si las otras cambian, esas cantidades cambian también. A ellas, se tiene la costumbre de nombrarlas funciones, metonimia, que es evidente y que contiene en ella misma las maneras con las cuales una cantidad puede ser determinada por las otras. Entonces, si yo pudiera denominar la variable de cantidades, todas las cantidades que dependen de cierta forma de  $x$  o que pueden ser determinadas, se le llama función de esta variable".

Esta idea de función, desembarazada de toda consideración de expresión analítica estaba latente, aún y cuando ella era utilizada frecuentemente. Por tanto, Euler fue el primero que la enuncia de una manera clara subrayando la generalidad de la nueva definición.

Ese concepto nuevo de Euler no tardó en encontrar seguidores. Uno de los primeros sabios que adoptó la nueva definición de Euler fue Condorcet.

La concepción de función está expuesta por Condorcet en su tratado de Cálculo integral que fue presentado por partes a la Academia de Ciencias de París en 1778 - 1782.



El autor, en principio, dio la definición de función analítica: “Supongo que tengo un cierto número de cantidades  $x, y, z, \dots, F$  y que cada valor determinado de  $x, y, z, \dots, F$  tenga una o varios valores determinados que le corresponden; digo que  $F$  es una función de  $x, y, z$ ”. Es notable el concepto de función según Condorcet, pues se aproxima bastante a la definición contemporánea.

Enseguida, el autor continua diciendo: “...si yo se que mientras  $x, y, z$  serán determinadas,  $F$  lo será también, por supuesto yo no conoceré ni la manera de expresar  $F$  en términos de  $x, y, z$ , ni la forma de la ecuación entre  $F$  y  $x, y, z$ ; yo sabré que  $F$  es una función de  $x, y, z, \dots$ ”.

Condorcet distingue tres tipos de funciones:

- funciones cuya forma es dada,
- funciones que no son determinadas más que por una ecuación entre  $F$  y las cantidades donde ella es función.
- funciones que no son dadas más que en ciertas condiciones, como por ejemplo, los radios vectores de los planetas que son funciones del tiempo, de las masas, etc.

Sobre la concepción de función, Lagrange no tenía ideas totalmente divergentes de las de Euler (ver A. F. Monna- “The concept of function in the 19th and 20th centuries, in particular with regard to the discussions between Baire, Borel and Lebesgue”, Archive for History of Exact Sciences, 9 (1972), 57-84). En su obra “Teoría de funciones analíticas...” (París, 1796), él dio la definición siguiente: “Se llama función de una o varias cantidades, toda expresión de cálculo en la cual esas cantidades entran de alguna manera, mezcladas o no, con otras cantidades que se miran como teniendo valores dados e invariables mientras que las cantidades de la función pueden recibir todos los valores posibles”.

En cuanto a las funciones que no son determinadas más que gráficamente, Lagrange mismo, no busca representarlas analíticamente más que de una forma aproximada.

Además, Lagrange nombraba funciones analíticas simples de una variable real  $x$ , a las funciones que pueden ser desarrolladas en series enteras.

Al poner en ecuación las condiciones de la propagación del calor condujo a Fourier a fórmulas análogas a aquellas que rigen las vibraciones de las cuerdas vibrantes



(hacia 1807).

Fourier rompió la continuidad euleriana como lo dice Hankel en su artículo, donde se encuentran también notas interesantes sobre la historia del concepto de función.

“... toda la concepción de la idea de función, como la de Euler, que describiré brevemente con el primer golpe fuerte en 1807 por el importante descubrimiento de Fourier, que es posible representar las funciones por series periódicas; no solamente las funciones analíticas (o continuas en el sentido de Euler) sino otras funciones cualesquiera que no satisfacen a una ley simple o aún a diferentes leyes en diversas partes (discontinuas), son las funciones que llamaré funciones ilegítimas, ... Entonces yo había creído que la única vía para llegar a elucidar la discontinuidad y a decidir la naturaleza de las funciones, es la de negar todos los conceptos, a los que aún el más moderno matemático está relacionado por medio de la idea de la función euleriana, y en primer lugar, la de interpretar el conjunto de relaciones de cantidades posibles de dos variables que están contenidas en la idea pura de la función de Dirichlet, pero al mismo tiempo de dar una atención particular a las funciones ilegítimas que son hasta este momento poco estudiadas...”.

Los métodos de Fourier fueron criticados por los matemáticos ulteriores. Es necesario señalar que Fourier era sobre todo físico y que él guardaba constantemente en su espíritu la idea de la representación.

Más tarde Dirichlet quiso examinar con mayor cuidado las condiciones que el concepto de función debe satisfacer para demostrar la congruencia de la serie que representa (convergencia que Fourier había supuesto a priori).

En el siglo XIX empiezan las primeras incertidumbres sobre los principios del análisis. En efecto, como los métodos anteriores se presentan defectuosos e incorrectos es necesario buscar la causa en el origen.

Especialmente se puede considerar como principales representantes de la evolución del concepto de función: Cauchy, Bolzano, Dirichlet y a Riemann.

Cauchy, en su curso de Análisis en la escuela Politécnica en 1821, no da una definición de función cuando dice que: “... Mientras que cantidades variables son totalmente ligadas entre ellas, el valor de una de ellas siendo dado se puede concluir todos los otros valores, se concibe de ordinario esas diversas cantidades expresadas por medio de una de entre ellas, que toma entonces el nombre de variable independiente y las otras cantidades expresadas por



medio de la variable independiente son las que uno llama funciones de esta variable”.

Dirichlet, es el primero en hacer un estudio riguroso sobre las series de Fourier. El realizó investigaciones para establecer las condiciones suficientes para que la serie de Fourier represente una función.

En 1840, Dirichlet publicó un importante artículo “Sobre la representación de funciones arbitrarias en series de senos y cosenos”, en el cual el definió el concepto de función y de continuidad (ver I. Kleiner- “Evolution of the function concept: A brief survey”, *The College Mathematics Journal*, 20 (1989), 280-300).

Su definición de función no está solamente desprovista de “expresión analítica” sino lo que es notable, es que ella llega a la descripción de correspondencia unívoca de una manera bastante lúcida. En lo que concierne a la continuidad, Dirichlet trata solamente la continuidad global.

Riemann dio la definición sobre el concepto de función en su discurso inaugural en Gotingen en 1851: “...Sea  $z$  una cantidad variable, que toma paso a paso, todos los valores reales de un valor único de la cantidad definida  $w$  y si  $z$  recorre continuamente todos los valores que se encuentran entre dos valores constantes y  $w$  cambia también continuamente entonces se le nombra a ésta función continua”.

Esta definición no define aparentemente ley alguna entre los diferentes valores de la función, de esta manera, si existe una función definida en un cierto intervalo, su prolongación fuera del mismo, es dejada arbitrariamente. La dependencia de la cantidad  $w$  de  $z$  puede ser dada por un principio (ley) matemático, de tal forma que se encuentra para cada valor de  $z$ , la correspondiente  $w$  para ciertas operaciones cuantitativas.

La posibilidad de definir todos los valores que se encuentran en un intervalo dado de  $x$  por la misma ley de la dependencia, era reconocida anteriormente sólo para ciertas funciones (continuas según Fourier).

Se ve que, en la definición de Riemann existe también la concepción de correspondencia.

Weierstrass en su curso “Introducción a la teoría de funciones analíticas” del semestre de 1874 (verano), comienza por el estudio de las funciones analíticas.

Él da la definición de función, anteponiendo reservas sobre su gran generalidad y no



atribuye la paternidad de la definición únicamente a Dirichlet, sino también a Fourier y a Cauchy.

En lo que concierne a la definición de función de Weierstrass, no la considera suficientemente como para sacar conclusiones sobre sus propiedades, es decir, evita el dar una definición de función pero 'poco a poco en el transcurso de sus lecciones' él dará una representación correcta y utilizable de función”.

En su último curso de Análisis, en la Universidad de Berlín, en 1886, teniendo como título “Capítulos seleccionados de la teoría de funciones”, él consagra su primer capítulo al estudio histórico del concepto de función. Considerando la idea de función como una relación aritmética entre dos variables (noción que tiene su origen en Leibniz) y la de Dirichlet que Weierstrass considera como la más general, él da la definición de función como correspondencia entre los elementos y llega a la conclusión de que mientras esta correspondencia es continua, esas dos nociones son las mismas. Menger considera a Weierstrass “como el matemático que ha dado a la definición de función un aspecto conjuntivista...”, mérito que no compartió hasta que en la década de los 30 de este siglo, se introdujo la definición de función como conjunto de pares de números, ya que las definiciones antiguas de Dirichlet y otros, a pesar de su gran fecundidad no podían ser consideradas como definiciones conjuntistas.

Lebesgue dice que en Francia existía el hábito de definir una función continua como aquella que no puede pasar de un valor a otro sin tomar todos los intermedios, y esta definición era considerada como equivalente a la de Cauchy. Darboux demostró que las dos definiciones eran muy diferentes.

Como lo dice Bruschi, habría algo de injusticia al no marcar el lugar de Frege en la historia. Frege, espíritu polivalente, quiso reformular las ideas fundamentales, entre ellas la de función. Así en 1831, en un estudio escribe: “Mi punto de partida es el de saber lo que se llama función en matemáticas,...debemos regresar a la época donde el Análisis fue descubierto, si queremos saber lo que la palabra función significa en su origen.

En el inicio del siglo XX mientras que la teoría de conjuntos de Cantor penetraba progresivamente en toda la matemática, el concepto de función no era muy lúcido a principios de siglo. Varios matemáticos como Baire, querían clarificar la idea de función.



Lebesgue apuntaba: “Bien que, después de Dirichlet y Riemann, uno está generalmente de acuerdo en decir que existe una función cuando hay correspondencia entre un número  $y$ , y números  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sin preocuparse del procedimiento que sirve para establecer esta correspondencia, muchos matemáticos parecen no considerar como funciones más que aquellas que son establecidas por correspondencias analíticas.

Se puede pensar que si se introduce tal vez así una restricción bastante arbitraria; sin embargo, es cierto que ello no restringe el campo de las aplicaciones, puesto que, sólo las funciones presentadas analíticamente son efectivamente empleadas hasta el momento”.

Más adelante, Lebesgue cita cuando un “objeto” está definido.

“Un objeto está definido o dado cuando se ha pronunciado un número finito de palabras... aplicándose a ese objeto y sólo a ese, es decir, cuando se ha nombrado una propiedad característica del objeto. Para dar una función  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  se nombran generalmente una propiedad perteneciendo a todos los conjuntos de nombres:  $x_1, x_2, \dots, f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  y sólo a ellos; pero ello no es de ningún modo necesario se pueden nombrar otras propiedades características de esta función. Eso es lo que se hace, por ejemplo, cuando una función  $f(x)$  siendo definida de cualquier manera, se dice que  $F(x)$  es de las funciones primitivas de  $f(x)$  la que se anula para  $x=0$ . Es nombrar una función, que es decir que ella es igual a cero o, que la constante de Euler  $C$  es racional o no.

No es necesario, por otra parte, creer que una función es necesariamente mejor definida cuando se da una propiedad característica del conjunto  $y, x_1, x_2, \dots, x_n$ , ya que una propiedad tal no permite, en general, calcular  $y$ , por ejemplo, la función  $X(x)$  que aún ella admite una representación analítica conocida, no es conocida para  $x=c$ , bien que uno sepa calcular  $c$  con tantos decimales como se quiera, si la conocemos para  $x=\pi$ , no es su expresión analítica la que nos la hace saber”.

La cuestión sobre la existencia y la definición de función era uno de los puntos de controversia entre Borel y Lebesgue. En 1912, Borel desarrollando sus ideas sobre la teoría de integración, cita sus pensamientos sobre la existencia y la definición de objetos matemáticos:

“Diremos que una función es calculable, en tanto que su valor es calculable para todo valor calculable de la variable. En otros términos, si  $a$  es un



número calculable, se debe saber calcular el valor de  $f(a)$  tan preciso como se pida, para cualquier  $n$ . Una función no puede pues ser calculable sólo si es continua, a menos para los valores calculables de la variable”.

En 1918 Lebesgue responde al artículo de Borel de 1912:

“M. Borel ve una gran diferencia entre sus definiciones y las mías, porque yo considero las funciones y los conjuntos en sí (es decir, sin ocuparme de la forma en que esas funciones y conjuntos me son dados), mientras que él pretende razonar únicamente sobre seres dados de una cierta manera.

Desde que yo aplico las definiciones, yo no encuentro, es verdad, en la práctica más que las funciones y conjuntos estudiados por Borel”.

De aquí en lo adelante se apoya en ejemplos históricos, lo que parece poner fin a la controversia a favor de Lebesgue. Con todo, Borel siguió escribiendo varios artículos sobre la cuestión fundamental de las definiciones en matemáticas.

En la misma época, Frechet, Eliakin, Hasting Moore trabajaban en el concepto actual de función. Frechet desde 1904 (en su tesis), generaliza la definición de función como sigue:

“Supongamos que damos una cierta categoría (elementos cualesquiera, números, superficies, etc.) en la cual se sabe discernir los diferentes elementos. Podemos decir que  $V \alpha$  es una función (operación funcional), uniforme en un conjunto  $E$  de elementos de  $c$ , si a todo elemento  $A$  de  $E$  le corresponde un número bien determinado  $V \alpha$ ”.

Así, desde 1904-1905, se llegó a la concepción de valor numérico definido en un conjunto absolutamente arbitrario.

Desde 1909, Frechet generalizó también el conjunto donde la función toma sus valores. Así, en su famoso “Los espacios abstractos” él afirma:

“...No obstante una nota. Si se ha generalizado la teoría de funciones intercambiando la variable numérica por una variable cualquiera, por qué no generalizar íntegramente intercambiando también la función numérica por una función de cualquier naturaleza. Y entonces, el Análisis general aparece ahora como el estudio de las relaciones entre dos elementos de naturaleza cualquiera, (en donde uno podrá jugar el rol de variable y el otro funcional). El caso donde la funcional es un número y aquél ha sido estudiado hasta ahora con más detalle; por tanto el estudio de las propiedades infinitas, de las relaciones entre dos



variables de cualquier naturaleza ha atraído la atención. Ello no es otro que el estudio de las transformaciones abstractas continuas o bicontinuas. Nosotros habíamos considerado desde 1909 esas transformaciones y particularmente los 'homeomorfismos', es decir, las correspondencias biunívocas y bicontinuas entre dos elementos de naturaleza cualquiera”.

De esta forma, la concepción actual de función ha sido, en lo esencial, formulada en los años 1904-1909.

En la época moderna, este concepto de función, penetró progresivamente en las matemáticas, estando las principales dificultades relacionadas con el hecho que los matemáticos seleccionaban sus definiciones según las teorías que ellos querían desarrollar, así, Caratheodory, en 1917, definió la función como una correspondencia de un conjunto sobre los números reales. En 1939, en las estructuras fundamentales del Análisis de Bourbaki, se puede leer: “Sean E y F dos conjuntos distintos o no, una relación entre una variable  $x$  de E y una variable  $y$  de F, se dice relación funcional en  $y$ , o relación funcional de E hacia F, si para toda  $x$  perteneciente a E, existe un sólo  $y$  que pertenece a F, que está en la relación considerada con  $x$ . Se da el nombre de función a la operación que asocia así a todo elemento “ $x$ ” en E, el elemento “  $y$  ” en F que se encuentra en la relación dada con “  $x$ ”, y que la función está determinada por la relación funcional considerada. Dos relaciones funcionales equivalentes determinan la misma función...”. O sea, la definición de función como un cierto conjunto del producto cartesiano  $E \times F$ .

La importancia intrínseca de esta evolución del concepto de función, es que ella reformuló los principios del Análisis. Particularmente, considerando la función como una correspondencia, se agrandan los conceptos llamados “clásicos” como por ejemplo continuidad, continuidad uniforme, discontinuidad, estudiando ahora los conceptos de semi-continuidad (lateral o no), oscilación de una función, función de variación acotada; nociones que deben su aparición a la nueva definición de función como correspondencia y por el cerco de las propiedades topológicas de los conjuntos de puntos.

Por último, debemos decir, que a fines de la primera década de este siglo, la definición de Dirichlet-Bourbaki ya estaba establecida en los libros de textos (ver M. A. Malik- “Historical and pedagogical aspects of the definition of function” , International J. of Mathematics Education in Science and



Technology, 11 (1980), 489-492) y en los años 60, los libros de textos de esta época, presentaban básicamente tres tipos de definición de función (ver C. P. Nicholas- "A dilemma in definition" , The American MathematicaMonthly, 73 (1966), 762- 768):

- funciones definidas en términos de variables,
- funciones definidas en términos de conjuntos,
- funciones definidas en términos de una regla de correspondencia,
- funciones definidas en términos de INPUT-OUTPUT.

Esta última relacionada con el desarrollo computacional experimentado en estos años.

Estas reflexiones tomadas de la obra de Nápoles Valdés Juan Eduardo (1996) reflejan no sólo el vínculo con el desarrollo social y de otras ciencias que tiene el desarrollo del concepto de función, evidencia además métodos y procedimientos de los científicos para obtener el conocimiento, forma de pensar que debe irse formando en los alumnos desde edades tempranas.

### **1.3 Tratamiento metodológico del proceso de aprendizaje a las funciones cuadráticas en noveno grado.**

El tratamiento de las funciones en la Educación Secundaria resulta de gran significación no solo por lo que representa este contenido en desarrollo de la Matemática como ciencia, además por cuanto representan los métodos aplicados por los científicos para obtener dicho conocimiento y su relación con el desarrollo social y tecnológico del contexto histórico donde surge y se desarrolla y sus posteriores aplicaciones, en el desarrollo de otras ciencias, por cuanto contribuye a modelar múltiples fenómenos y procesos de la realidad. Por eso desde la infancia se trata de sentar las bases para que los niños desarrollen poco a poco un pensamiento funcional antes que se convierta explícitamente en objeto de enseñanza y asimilen las propiedades, relaciones, formas de representación y aplicaciones que giran en torno al concepto función (Álvarez, 2015).

Contribuir a la educación integral de los alumnos, al mostrar cómo la Matemática favorece el desarrollo de valores y actitudes posibilita comprender y transformar el mundo y propicia la formación de una concepción científica de este, de ahí que el desafío es conseguir que la ciencia que se enseñe y en especial las funciones



cuadráticas sea capaz de motivar a los alumnos con problemas interesantes a través de los cuales aprendan conocimientos básicos y fundamentales. Para la enseñanza de la Matemática las funciones cuadráticas tienen un significado especial, atendiendo al que poseen en la propia ciencia. Esto se evidencia en el desarrollo del pensamiento funcional desde los primeros grados, por su importancia en la explicación de procesos de cambio y evolución, lo que justifica su presencia en todos los niveles y grados.

Una revisión a los diferentes documentos relacionados con el tratamiento a las funciones cuadráticas plantea entre otras cosas como darle tratamiento a estos contenidos.

Los alumnos de noveno grado deben formular y resolver problemas extra matemáticos que se modelan a través de una función lineal o cuadrática, aplicando integradamente los conocimientos y habilidades de las distintas áreas matemáticas y los adquiridos en otras disciplinas, de modo que puedan realizar valoraciones sobre cuestiones que les atañen personalmente o que son importantes para su educación integral. Se precisa, por tanto que la formación del concepto de funciones cuadráticas se realice a partir de un conjunto de problemas que involucren situaciones de correspondencias preferentemente relacionadas con la ciencia y la tecnología lo que posibilita discriminar lo común que tienen aquellas que se pueden modelar a través del concepto de función. Los alumnos se enfrentan en el proceso de elaboración del concepto función a los mismos obstáculos que se presentaron a lo largo de su evolución. Es conocido que el concepto función se concibió sucesivamente como variación, proporción, gráfica, curva o ecuación hasta llegar a su definición actual. Por eso no es de extrañar que muchos alumnos consideren que una función es una curva, específicamente la trayectoria de puntos en movimiento, o una ecuación, deben conocer ejemplos de situaciones representativas que se modelan a través de una clase de funciones determinada, lo que puede servir de base para el establecimiento de analogías al resolver un problema determinado.

Las funciones cuadráticas se entrelazan con otros contenidos por varias razones, una por ser el concepto función- como el de conjunto- fundamento para la definición o explicación de casi todos los contenidos matemáticos y por otra parte, porque brinda grandes oportunidades para el desarrollo de las



capacidades cognitivas, hábitos, convicciones y cualidades de la personalidad de los educandos.

Una revisión a los diferentes documentos relacionados con el tratamiento a las funciones cuadráticas, entre otros, a las orientaciones metodológicas, evidencia el objetivo de la unidad así como los contenidos antecedentes y posteriores que el alumno de noveno grado debe conocer. La unidad prepara al alumno para utilizar los contenidos matemáticos en ejercicios que poseen una gran carga de pensamiento lógico y habilidades de interpretar y caracterizar situaciones prácticas que lo ayudan en su preparación para la vida.

La unidad recibe el nombre de " Trabajo con variables, ecuaciones cuadráticas y funciones cuadráticas" y es la cuarta en el programa de noveno grado teniendo como objetivo: Formular y resolver, con los recursos de la matemática elemental, problemas que se modelen a través de funciones cuadráticas relacionados con el desarrollo político, económico y social del país y el mundo, así como con fenómenos y procesos científico – ambientales que le conduzcan a actitudes revolucionarias y responsables ante la vida.

El alumno debe conocer, como contenido antecedente, los conceptos de función , función lineal y sus propiedades, ya en noveno grado, el concepto de función cuadrática como una correspondencia definida por la ecuación  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ ). La función  $f(x) = ax^2$ ,  $a \neq 0$ . Representación gráfica y propiedades, los conceptos de dilatación, contracción y reflexión de la parábola, concepto de cero de una función cuadrática, fórmula para calcular la abscisa del vértice de la parábola, traslación de la parábola en la dirección de los ejes de coordenadas y debe resolver ejercicios y problemas. En la educación media los alumnos de 10mo grado continúan ampliando el estudio sobre las funciones, en este caso, se inicia con una sistematización de las funciones estudiadas en el nivel medio básico (lineales y cuadráticas) y se amplía con el tratamiento de las funciones modulares y potenciales de exponente entero. Posteriormente, los alumnos de 11no grado, estudian las funciones potenciales de exponente fraccionario, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas y en el 12mo grado se estudian las sucesiones numéricas (funciones de dominio natural), de modo que les permita describir o interpretar fenómenos y procesos de la realidad y de otras asignaturas que se puedan modelar con el



recurso de las funciones.

Lo fundamental en esta unidad lo constituye “la resolución de problemas” vinculados a la vida y de carácter político-ideológico, económico-social, y científico-tecnológico-ambiental mediante las funciones cuadráticas, su concepto y propiedades. Para lograr esto es necesario que los alumnos desarrollen habilidades en:

Reconocer que las funciones cuadráticas se definen por la ecuación de la forma  $y=ax^2+bx+c$  con  $a, b, c$  números reales con  $a \neq 0$  y que su gráfico es una parábola.

Determinar el dominio y conjunto imagen de una función cuadrática.

Calcular valores funcionales de una función cuadrática. Determinar la ecuación de una función cuadrática dada su representación gráfica o los ceros de la función.

Esbozar la representación gráfica de una función cuadrática dada su ecuación.

Calcular los ceros de una función cuadrática. Calcular el valor máximo y el valor mínimo de una función cuadrática. Analizar el crecimiento de una función cuadrática.

Esbozar la representación gráfica de funciones cuadráticas dadas por ecuaciones de la forma  $y=(x+d)^2+e$  e como resultado de traslaciones de la parábola en la dirección de los ejes de coordenadas. Resolver problemas sencillos de utilizando las propiedades de las funciones cuadráticas.

Este tratamiento metodológico propone, entre otros tipos de ejercicios situaciones de aprendizaje que puede ser un ejercicio, una búsqueda de nuevo contenido (auto preparación para la próxima clase), una investigación, etc. Esto responderá a la interrogante referida a ¿cómo va a enfrentar el alumno la situación de aprendizaje concebida por el profesor? En este sentido, el profesor indicará un orden lógico de pasos que deberá seguir el alumno para que se oriente a la hora de su aprendizaje.

En el tratamiento de las funciones cuadráticas es recomendable asignar tareas a los alumnos para que investiguen las propiedades de distintas funciones así como sus aplicaciones en la ciencia y la tecnología, En la fijación se deberán proponer tareas variadas, tanto formales como de generalización, modelación y de aproximación de funciones.

Los alumnos deben explorar dependencias funcionales, digamos, entre magnitudes geométricas, como por ejemplo entre la longitud de la circunferencia y su radio. Deben determinar, a partir de la ecuación o relación que describe a una función, sus



propiedades y su gráfico, pero también deben desarrollar otras tareas, como por ejemplo, construir funciones que posean ciertas propiedades; o basadas en alguna de sus aplicaciones en el desarrollo científico tecnológico, o hallar los valores de los parámetros de la ecuación que describe a una función elemental a partir de su gráfico; o reconocer dentro de un grupo de gráficas cuál es la que representa una situación determinada.

En el libro de texto de noveno grado aparecen textos importantes acerca de la historia de las funciones cuadráticas así como algunas de las aplicaciones de esta en la ciencia y la tecnología pero es poca la información que se brinda al igual que en las orientaciones metodológicas, se hace poca referencia al uso de la parábola y de las funciones cuadráticas en el desarrollo científico y tecnológico de la sociedad, solo en algunos ejercicios aparecen algún tipo de vinculación y aplicación.

## **Epígrafe 2 Situaciones de aprendizaje para los alumnos de noveno grado de la Secundaria Básica “Celia Sánchez Manduley”.**

En este epígrafe aparecen reflejadas algunas de las aplicaciones de las funciones cuadráticas en el desarrollo científico y tecnológico de la sociedad así como algunas situaciones de aprendizaje para que el alumno explore y se apropie del conocimiento.

### **2.1 Las funciones cuadráticas en el desarrollo tecnológico y científico de la sociedad.**

El primero en usar el término parábola fue el griego Apolonio de Perge (262 a.n.e. – 190 a.n.e.) en su tratado Cónicas, considerada obra cumbre sobre el tema de las matemáticas griegas.

Es Apolonio quien menciona que un espejo parabólico refleja de forma paralela los rayos emitidos desde su foco, propiedad usada hoy en día en las antenas satelitales. La parábola también fue estudiada por Arquímedes, nuevamente en la búsqueda de una solución para un problema famoso: la cuadratura del círculo, dando como resultado el libro Sobre la cuadratura de la parábola.

Las aplicaciones de las funciones cuadráticas son diversas. Puede describir trayectorias como el lanzamiento de la bala en el atletismo, el tiro al arco en el baloncesto los chorros de agua de una fuente , el lanzamiento vertical y de caída



libre de un cuerpo. Es utilizada en las construcciones de puentes o fachadas, cuya forma permite abaratar costos y mejorar la resistencia de las obras. En arquitectura su conocimiento es de gran interés, pues numerosos arcos en templos y otros edificios, así como represas, tienen forma de parábola.

Pueden ser incorporadas en estructuras como reflectores parabólicos que forman la base de los platos satelitales, usadas en las tecnologías de las telecomunicaciones, las que han experimentado enormes progresos a partir

del desarrollo y puesta en órbita de los primeros satélites de comunicaciones; del aumento de velocidad y memoria, y la disminución de tamaño y coste de las computadoras; de la miniaturización de circuitos electrónicos (circuito integrados); de la invención de los teléfonos celulares; etc. Todo ello permite comunicaciones casi instantáneas entre dos puntos cualesquiera del planeta, en los espejos parabólicos en los faros de los coches y a los radares y las antenas para radioastronomía, radiotelescopios y televisión por satélite. La concentración de la radiación solar en un punto, mediante un reflector parabólico tiene su aplicación en pequeñas cocinas solares y grandes centrales captadoras de energía solar. En el campo de la óptica, algunos espejos y lentes tienen curvatura en forma de parábola.

El estudio de las funciones cuadráticas resulta de interés no sólo en la Matemática sino también en otras áreas del conocimiento como por ejemplo: en Física, la trayectoria de una pelota lanzada al aire, la trayectoria que describe un río al caer desde lo alto de una montaña, la forma que toma una cuerda floja sobre la cual se desplaza un equilibrista, el recorrido desde el origen, con respecto al tiempo transcurrido, cuando una partícula es lanzada con una velocidad inicial tienen forma de parábolas.

El lanzamiento de un proyectil, como la bala disparada por un cañón, describe una trayectoria representada por una línea curva. Mediante la función cuadrática puedes saber qué distancia recorre la bala, qué altura máxima alcanza durante su recorrido, qué ecuación describe el comportamiento de la relación entre el tiempo transcurrido y la altura a la que se encuentra la bala, qué gráfica describe este fenómeno. Este tipo de movimientos los estudia la balística. Al lanzar una pelota con un ángulo de inclinación respecto al suelo primero inicia el ascenso hasta alcanzar una altura máxima, que corresponde al vértice de la parábola; a partir de ahí empieza a



descender, hasta llegar al suelo. La distancia que separa el punto desde donde se lanza hasta el punto donde cae la pelota, se llama alcance máximo.

Puede ser aplicada en la ingeniería civil, para resolver problemas específicos tomando como punto de apoyo la ecuación de segundo grado, en la construcción de puentes colgantes que se encuentran suspendidos en uno de los cables amarrados a dos torres.

Los biólogos utilizan las funciones cuadráticas para estudiar los efectos nutricionales de los organismos y la variación de la población de una determinada especie que responde a este tipo de función, para obtener así información sin necesidad de recurrir a la experimentación.

En la economía, las funciones cuadráticas también ayudan a predecir ganancias y pérdidas en los negocios. En la arquitectura, para dar mayor belleza y resistencia a las construcciones. Muchos de los objetos que usamos hoy en día, desde los carros hasta los relojes, no existirían si alguien, en alguna parte, no hubiera aplicado funciones cuadráticas para su diseño, es por ello que las funciones cuadráticas son de suma importancia para la vida y vemos su aplicación en todas las esferas de la vida, desde la Matemática hasta su uso en la ciencia y la tecnología donde juega un papel fundamental.

## **2.2 Situaciones de aprendizaje**

Las situaciones de aprendizaje, son actividades de exploración para el alumno, las mismas favorecen en los alumnos las actividades de exploración y búsqueda de nuevas reflexiones y conocimientos.

Resulta de interés en la concepción de las situaciones lo expresado por Castellano S, D. (1999) "... el aprendizaje, y muy en particular, el aprendizaje escolar, está mediado por la existencia de " los otros" (el profesor, el grupo escolar, la cultura, expresada en el currículo) y de la actividad de comunicación que constituye una característica esencial de este proceso. Pero es el maestro el principal mediador quien, partiendo de una intención educativa, estructura situaciones de aprendizaje. Organiza flexiblemente el proceso de dominio progresivo por parte de los estudiantes de las estrategias y modos de actuar, actuando como un experto, que plantea retos, brinda modelos, sugerencias, alternativas, retroalimentación y ayuda individualizada, y estimula y guía paulatinamente la ampliación de las zonas de



desarrollo potencial y el tránsito del control externo al interno, individual. El aprendizaje es en consecuencia el resultado de una práctica mediada, que el educador adecua oportunamente (será una práctica repetitiva, reflexiva, etc.) de acuerdo a los objetivos y contenidos a aprender, y a las condiciones existentes.<sup>4</sup>

A continuación aparecen situaciones de aprendizaje donde se refleja la vinculación de la Matemática en general y de las funciones cuadráticas en particular, con la vida diaria y con la ciencia y la tecnología.

A través de estas situaciones pueden estudiarse conceptos, definiciones y propiedades de las funciones cuadráticas y sus elementos de manera significativa; también con la utilización de las Tecnologías de la Informática y las Comunicaciones en general y en particular de los asistentes matemáticos que ayudan tanto a los científicos y al desarrollo tecnológico de la sociedad.

Estas situaciones pueden utilizarse en la motivación para el estudio de la unidad sobre las funciones cuadráticas donde el alumno se relaciona con algunas de las actividades que realiza un científico (el experimento, la observación) y en algunos con la utilización de la tecnología.

1. Dispón una cartulina perpendicularmente a un haz luminoso; obtienes así un perfil circular sobre la cartulina. Al mover la cartulina, describe el perfil que se obtiene.

2. En una lata de conservas abre agujeros a distinta altura. Llénalo de agua y observa la trayectoria descrita por los chorros de agua que salen de los distintos agujeros. ¿Qué figura geométrica representa cada trayectoria?

3. Coloca en el borde de una mesa dos pelotas. A una déjala caer libremente y a la otra dale un impulso horizontal.

¿Qué trayectoria sigue cada una? Repite este experimento tratando de que las dos pelotas se pongan en movimiento en el mismo instante.

¿Qué pelota sigue una trayectoria más larga? ¿Cuál de las dos llega antes al suelo?

¿Acaso no llegan al mismo tiempo?

(Ideas tomadas del Libro de texto Matemática noveno grado página 395)

---

<sup>4</sup>Castellanos Simons Doris. La comprensión de los procesos del aprendizaje: Apuntes para un marco conceptual (2da. Versión, Febrero/1999)



La Física explica estos experimentos.

4. La ecuación  $V(a) = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$  representa la dependencia funcional del volumen ( $\text{cm}^3$ )

de un envase en forma de pirámide de base cuadrada en función de la longitud de la arista de la base para un mismo valor de su altura  $h$ .

- Representa esta función para  $0 \leq a \leq 4$ , si  $h = 3$ .
- Apoyándote en el gráfico, determina el volumen máximo que puede alcanzar la pirámide en este tramo representado.

(Libro de texto Matemática noveno grado página 406 ejercicio 17)

La utilización de las funciones cuadráticas está presente en los diferentes momentos de la vida, y en la fundamentación de otras ciencias, son ejemplos que pueden utilizarse en la fijación.

1. La utilidad mensual en miles de dólares de una empresa dedicada a la venta de artículos de computadoras se expresa mediante la ecuación  $u(x) = -2x^2 + 20x - 15$ , donde  $x$  representa el número de artículos, en cientos, que se producen y venden en un mes.

- Determina la cantidad de artículos que la empresa debe producir y vender en un mes para que la utilidad sea máxima.
- Halla el monto de la utilidad máxima.

(Libro de texto Matemática noveno grado página 406 ejercicio 22)

Las funciones cuadráticas tienen estrecha relación con otras disciplinas como por ejemplo con Física ya que puede describir la trayectoria de una pelota lanzada al aire, o una bala cuando es disparada, además en la unidad 3 “Corriente eléctrica”, cuando se calcula la potencia conocido el voltaje e intensidad de la corriente en el circuito.

2. Una pelota es lanzada hacia arriba, denotemos por  $h$ , en metros, la altura y por  $t$ , en segundos, el tiempo transcurrido a partir del instante que se lanza. La dependencia de  $h$  en función del tiempo  $t$  se expresa mediante la fórmula  $h = 25t - 5t^2$ , sin tener en cuenta el viento.

- ¿Cuál es la mayor altura que alcanza la pelota?
- ¿Durante cuánto tiempo la pelota asciende? ¿Y durante cuánto tiempo desciende?
- ¿Al cabo de cuánto tiempo de lanzada la pelota llega al suelo?



(Libro de texto Matemática noveno grado página 406 ejercicio 19)

Una de las aplicaciones de la función cuadrática es en la construcción de puentes. Este ejercicio se puede utilizar como tarea extraclase y ayuda a un mejor entendimiento de la relación existente entre la Matemática y la ciencia y la tecnología.

3. El arco de un puente es una parábola que responde a la función cuadrática de ecuación  $y = -0,002x^2 + 0,2x$ . Considerando al eje horizontal sobre la superficie plana que contiene la entrada y salida del puente:

- Representa gráficamente la parábola que describe el arco del puente.
- Halla la altura máxima que alcanza el puente.
- Calcula la distancia que hay de la entrada del puente a la salida.

(Libro de texto Matemática noveno grado ejemplo 2 página 387)

4. Un nadador desciende al fondo del mar y luego emerge de nuevo a la superficie siguiendo la trayectoria que representa el gráfico de la función  $y = 2x^2 + x - 6$ . (Considera el metro como unidad de medida).

- Representa en un sistema de coordenadas rectangulares la trayectoria descrita por el nadador.
- ¿A qué distancia del lugar de entrada emergió el nadador?
- ¿Cuál fue la profundidad máxima que alcanzó?

(Libro de texto Matemática noveno grado página 399 ejemplo 6)

Esta situación de aprendizaje puede ser utilizada para motivar una clase de funciones cuadráticas o en la consolidación para alumnos de alto rendimiento.

5. Una pelota lanzada hacia arriba desde la azotea de un edificio describe una parábola cuya ecuación es  $h = -16t^2 + 80t + 45$ .

h: altura en metros que alcanza la pelota.

t: tiempo transcurrido en minutos.

- ¿Qué tiempo tarda la pelota en alcanzar su altura máxima?
- ¿Cuál fue la altura máxima alcanzada por la pelota?

(Libro de texto Matemática noveno grado página 401 ejemplo 7)

Esta situación de aprendizaje puede orientarse como tarea para que los alumnos en el laboratorio de informática realicen la actividad.

6. Utilizando algún asistente matemático a tu alcance, por ejemplo el Geogebra, realiza las siguientes acciones:



- a) Traza la gráfica de la función  $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ .
- b) Varía el valor del parámetro  $a$  y analiza cómo va cambiando la parábola respecto a la que trazaste inicialmente.
- c) Varía el valor del parámetro  $b$  y analiza cómo va cambiando la parábola respecto a la que trazaste inicialmente.
- c) Varía el valor del parámetro  $c$  y analiza cómo va cambiando la parábola respecto a la que trazaste inicialmente.
- d) Escribe las conclusiones a la que arribaste sobre cómo cambia la parábola al variar los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

(Libro de texto Matemática noveno grado página 406 ejercicio 23)

A continuación aparecen algunas situaciones de aprendizaje prácticas que el alumno aventajado puede realizar de forma independiente en su hogar y así podrá evidenciar otra de las relaciones de la Matemática con la ciencia y la tecnología fundamentalmente con las funciones cuadráticas.

7. Un campesino dispone de 80m de cerca. Determina el área rectangular máxima que puede encerrar con la cantidad de cerca disponible.

(Libro de texto Matemática noveno grado ejemplo 8 página 401)

8. Considera la fórmula  $h = vt - 4,9t^2$  la cual nos permite calcular la altura que alcanza un objeto lanzado hacia arriba. ¿Cuántos segundos aproximadamente tardará una pelota de tenis en alcanzar una altura de 16,4 m si es arrojada con una velocidad de 20,3 m/s?

(Libro de texto Matemática noveno grado página 411 ejercicio 28)

Estas situaciones de aprendizaje, teniendo en cuenta su relación con la ciencia y la tecnología, favorecen la comprensión del papel de la Matemática en el desarrollo científico tecnológico de la sociedad por los alumnos de noveno grado de la Secundaria Básica “Celia Sánchez Manduley”..

9.El puente Golden Gate (Puerta Dorada) está ubicado en el estrecho de California suspendido sobre 2 cables, tiene una longitud aproximada de 1.280 m, el mismo se encuentra sobre 2 torres de 227m.

- a) Estima a que altura están los cables cuando la distancia es de 300 m del centro del puente.
- b) Hallar la ecuación de la parábola que forman los cables del puente Golden Gate.



c) Usar la ecuación obtenida en el punto 2 para hallar la altura de los cables cuando la distancia es de 300 m y comparara el resultado con el del punto 1.

10. Un lanzador de peso puede ser modelado usando la ecuación  $y = -0.024x^2 + x + 5.5$ , donde  $x$  es la distancia recorrida (en pies) y  $y$  es la altura (también en pies). ¿Qué tan largo es el tiro?

### **Epígrafe 3 Caracterización del estado inicial y final del proceso de aprendizaje de las funciones cuadráticas y su papel en la educación científico y tecnológico de los alumnos de noveno grado**

En este epígrafe se hará referencia al estado actual del proceso de aprendizaje de las funciones cuadráticas en noveno grado y su papel en la educación científico y tecnológico de los alumnos de noveno grado.

#### **3.1 Situación actual de los alumnos de noveno grado**

Para profundizar en la situación actual de la educación científica y tecnológica de los alumnos de noveno se determinó como muestra 31 alumnos del grupo 1 de una población de 141 alumnos de noveno grado que hay en la Secundaria Básica “Celia Sánchez Manduley” del municipio Holguín. En particular se profundiza en los siguientes aspectos en estudiantes y profesores de dicha escuela:

- Conocimiento acerca del papel de la Matemática en la ciencia y la tecnología y su importancia.
- Significado práctico del conocimiento de las funciones cuadráticas en el proceso de enseñanza - aprendizaje en noveno grado.
- Tratamiento en la clase del papel de las funciones en el desarrollo científico tecnológico alcanzado por la sociedad.

En una revisión de los documentos normativos que orientan el proceso de aprendizaje de las funciones cuadráticas en noveno grado (orientaciones metodológicas y libros de textos), se reflejan algunas situaciones que podrían potenciar la orientación de la educación científica y tecnológica de los alumnos, pero no siempre se logra tal objetivo en la clase, ni son suficientes para las potencialidades que tienen estos contenidos con este fin, en particular su orientación desde el aprendizaje de este contenido.

El análisis a encuestas realizadas y la observación participante en el proceso de



aprendizaje de las funciones cuadráticas en noveno de la Secundaria Básica “Celia Sánchez Manduley” corrobora que:

- Alumnos y profesores no asocian los conocimientos acerca del papel de la Matemática con la ciencia y la tecnología y su importancia.
- Es pobre el significado práctico del conocimiento de las funciones cuadráticas en los alumnos.
- En las clases de Matemática pocas veces (40%) se da tratamiento al papel de las funciones en el desarrollo científico tecnológico alcanzado por la sociedad.
- Los alumnos de noveno grado poseen escasos conocimientos acerca del papel de las funciones cuadráticas en el desarrollo científico y tecnológico de la sociedad (61.29%).

Al triangular estos resultados se determina que en las clases apenas se hace referencia al papel de las funciones cuadráticas en el desarrollo científico y tecnológico de la sociedad, su importancia; y aunque el profesor de Matemática en ocasiones hable del tema es insuficiente la información brindada por estos y pobre la utilización de las potencialidades que tiene el proceso de aprendizaje de las funciones cuadráticas con este fin, que se revela en:

- Falta de conocimiento de los alumnos acerca del papel de la Matemática en la ciencia y la tecnología.
- Pobre trabajo en el proceso de enseñanza- aprendizaje de la Matemática que evidencie su significado en el desarrollo de la ciencia y la tecnología para el desarrollo social.
- No se potencia en particular el papel de las funciones en el desarrollo científico tecnológico alcanzado por la sociedad.

### **3.2 Constatación de los resultados**

Las insuficiencias determinadas en el proceso de aprendizaje de las funciones cuadráticas que no favorecen la comprensión del papel de la Matemática en el desarrollo científico tecnológico de la sociedad y en particular por los alumnos de noveno grado de la Secundaria Básica “Celia Sánchez Manduley”., y la revisión bibliográfica respecto al tema que se investiga donde se muestra importantes



aportes entorno al papel de la Matemática en la ciencia y la tecnología, entre los que se encuentran autores como: Jiménez A (1991), Núñez, J (1998), Rodríguez, M y otros (2000). Moltó E. (1987, 2000); Valdés, R. y Valdés, P (2004); permitieron el cumplimiento del objetivo sobre la elaboración de situaciones de aprendizaje donde se demuestre el papel de las funciones cuadráticas en el desarrollo de la ciencia y la tecnología presentes en esta investigación.

Lo anterior se corrobora porque:

La propuesta realizada fue valorada por profesores de la Secundaria Básica “Celia Sánchez Manduley” y el metodólogo de la asignatura Matemática del municipio los cuales afirman su utilidad práctica y alto valor científico para su implementación por otros docentes y que además realizaron las siguientes sugerencias para su perfeccionamiento:

Utilizar sistemáticamente las situaciones de aprendizaje propuestas en las clases de Matemática.

Poner al servicio de los otros profesores las diferentes ideas que aparecen en este trabajo.

La puesta en práctica de las situaciones de aprendizaje que aparecen en el epígrafe 2 de este trabajo, reveló además una mayor comprensión de los alumnos de la muestra sobre la relación de la Matemática con la ciencia y la tecnología (32,25 %) también una mayor cantidad de estudiante reconocen la importancia de las funciones cuadráticas en este sentido (41,94 %). Ver anexos 1 y 2.

Después de aplicada en las clases de Matemática las situaciones de aprendizaje que en el presente trabajo aparecen, hubo una mejora en la comprensión del significado práctico de los diferentes contenidos relacionados con las funciones cuadráticas por parte de los alumnos de la muestra.



## CONCLUSIONES

La valoración de los hitos en el desarrollo histórico del concepto función, vinculados a las condiciones socioeconómicas y culturales de cada momento, las dificultades que se debieron superar, las personalidades que hicieron posibles los avances, y los ulteriores desarrollos, son aspectos a valorar en las clases y en el estudio individual por los alumnos, para favorecer los aspectos formativos y lograr que los alumnos se percaten que muchos obstáculos que presentan en su aprendizaje se corresponden con los que se manifestaron en el desarrollo de los contenidos matemáticos.

La constatación inicial del problema planteado, muestra la pobre educación científica tecnológica de los estudiantes de noveno grado, producto a la insuficiente utilización de ejemplos que aparecen en libros de textos actuales, la no vinculación del aprendizaje de las funciones cuadráticas con la tecnología, la actividad del científico y con el contenido de otras ciencias.

La utilización y aplicación de las funciones cuadráticas son numerosas en el desarrollo científico y tecnológico de la sociedad lo que permite una mayor explotación de este contenido en las clases de Matemática y por ende una mayor comprensión por parte de los alumnos de esta vinculación.

Resultan novedosas y de gran utilidad práctica las ideas que se exponen de cómo utilizar en distintas situaciones de aprendizaje, ejemplos y ejercicios que aparecen en los libros de textos actuales para el desarrollo de la educación científica y tecnológica de alumnos de noveno grado, que exige la sociedad cubana.



## RECOMENDACIONES

Seleccionar, de las situaciones propuestas, aquellas que puedan ser utilizadas como un instrumento, insertar las mismas en el proceso de aprendizaje de la Matemática específicamente en el contenido relacionado con funciones cuadráticas y lograr un correcto seguimiento al diagnóstico, así como ampliar la propuesta haciendo uso de los conocimientos propios de cada docente, sus experiencias profesionales y las características individuales de cada educando y al entorno en que este se desarrolla.



## BIBLIOGRAFÍA

Albarrán Pedroso, J.V. (2003). Las habilidades pedagógico-profesionales para la instrucción heurística de la Matemática. Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. en: Base de datos educación - cied - Ministerio de Educación.

Álvarez Pérez M. y otros: El proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática, Editorial Pueblo y Educación La Habana, 2014.

Álvarez Pérez, M. (Compiladora) (2004). Interdisciplinariedad. Una aproximación desde la enseñanza aprendizaje de las ciencias. Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

Álvarez Pérez, M. (2005). Las causas de los errores matemáticos de los alumnos en: La enseñanza – aprendizaje de Español, Matemática e Historia. Molinos Trade, S. A., La Habana, pp.85-89.

Andreiev I. Problemas (1984).Lógicos del Conocimiento Científico. Edit. Progreso. Moscú.

Ballester Pedroso, S. (1995). La sistematización de los conocimientos matemáticos, Editorial Academia, La Habana.

Ballester Pedroso, S. y otros (1992).Metodología de la enseñanza de la Matemática, t. I, Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

\_\_\_\_\_ (2000). Metodología de la enseñanza de la Matemática, t. II, Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

\_\_\_\_\_ (2002).El transcurso de las líneas directrices en los programas de Matemática y la planificación de la enseñanza, Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

Bermúdez R. y Rodríguez M. Teoría y metodología del Aprendizaje. Edit. Pueblo y Educación. La Habana, 1996.

Campistrous Pérez, L. Y Otros (1989). Matemática 10. (Libro de texto) Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana.

Campistrous Pérez, L. Y Otros (1990). Matemática 11. (Libro de texto) Editorial



Pueblo y Educación, Ciudad de La Habana.

Campistrous Pérez, L. y otros (1991). Matemática 12. Primera parte (Libro de texto) Editorial Pueblo y Educación, Ciudad de La Habana.

Castellanos Simons, D. y otros: Aprender y enseñar en la escuela. Una concepción desarrolladora, Editorial Pueblo y Educación, La Habana, 2007.

Castro Pimiento, O.: "La evaluación Pedagógica", Centro de Estudios de la Pedagogía Técnica y Profesional, ISPETP Héctor A. Pineda Zaldívar, La Habana, 1992.

Colectivo De Autores (1982). Conferencias sobre Metodología de la enseñanza de la Matemática 3. Editorial Pueblo y Educación, Ciudad de La Habana.

Colectivo de autores: Libro de texto de Matemática noveno grado. Editorial Pueblo y Educación, La Habana, 2015.

Colectivo de autores: Conferencia sobre Metodología de la enseñanza de la Matemática 3, Editorial Pueblo y Educación, La Habana, 1982.

Davydov V. La Enseñanza Escolar y el Desarrollo Síquico. Editorial Progreso. Moscú. 1986.

Díaz González, M. (2004). Problemas de Matemática para los entrenamientos de la Educación Secundaria Básica I. Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

Díaz González, M. (2007). Problemas de Matemática para los entrenamientos de la Educación Secundaria Básica II. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.

Díaz González, M. (2004). Problemas de Matemática para los entrenamientos de la Educación Preuniversitaria I. Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

Díaz González, M. (2007). Problemas de Matemática para los entrenamientos de la Educación Preuniversitaria II. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.

Dorofeiev, G. y otros (1973

Ershow, Y.- Ciencia, cultura, sociedad. En revista Ciencias Sociales. Editorial Ciencias Sociales. Moscú. 1987.

Fazenda, I.- Prácticas interdisciplinares na escola. Editorial Cortez. Sao Paulo,



Brasil. 1994.

Flores X. Una Propuesta Didáctica para la Enseñanza de los Conocimientos Físicos en la Secundaria Básica del Ecuador. La Habana, 1999. ( Tesis en opción al grado de máster en Didáctica de la Física).

Gil D. y otros. Temas Escogidos de Didáctica de la Física. Edit. Pueblo y Educación, La Habana, 1996.

Gil D. Concepciones del profesorado sobre la ciencia y su enseñanza. IPLAC. La Habana, 1996.

González Rey F. Comunicación, Personalidad y Desarrollo. Edit. Pueblo y Educación, La Habana, 1995.

Labarrere Sarduy, G.: Pedagogía, Editorial Pueblo y Educación, La Habana, 1988.

Macedo, B.- Tendencias actuales en la enseñanza de las ciencias. Conferencia impartida en el V Taller Internacional sobre Enseñanza de la Física. IPLAC. La Habana. 1998.

Ministerio de Educación (1987). Proyecto. Matemática. Concepción general de la asignatura en el subsistema de la educación general politécnica y laboral.

Ministerio de Educación (1998). Programa Director de Matemática. Ministerio de Educación. Ciudad de La Habana. Soporte magnético.

Ministerio de Educación (2011). Programas. Matemática 7<sup>mo</sup> y 8<sup>vo</sup> grados (Vigente para el curso 20d

Ministerio De Educación (2012). Programa. Matemática 9<sup>no</sup> grado (Vigente para el curso 2012 – 2013). Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

Ministerio De Educación. Informes de investigación sobre resultados de los operativos nacionales I-XII de la Educación Primaria, I-VIII de Secundaria Básica, I–VI de Preuniversitario.

Moltó, E.- La relación interdisciplinaria de la Física en las Carreras de Biología y de Química. Ponencia presentada en la Conferencia Metodológica de la Facultad de Biología. ISPEJV. La Habana. 1987.

\_\_\_\_\_ (2000) Breve estudio de algunas concepciones acerca de la ciencia



y su reflejo en la enseñanza de las ciencias. Conferencia en soporte digital. Universidad Pedagógica “E.J.Varona”.

Muñoz Baños, F. y otros (1989). Matemática 7. (Libro de texto) Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana.

Muñoz Baños, F. y otros (1991). Matemática 9. (Libro de texto) Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana.

Muñoz Baños, F. y otros (1990). Matemática 8. (Libro de texto) Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana.

Nápoles Valdés J. 1996) De las cavernas a los fractales. Conferencias de historia de las matemáticas. Editorial de la Universidad Tecnológica Nacional - U.T.N edUTecNe<http://www.edutecne.utn.edu.ar>.

Nieda J.; Macedo B. Un Currículo Científico para Estudiantes de 11 a 14 Años. OEI-UNESCO. Madrid, 1997.1968.

Núñez, J.- (1998). La ciencia y la tecnología como procesos sociales. Lo que la educación científica no debería olvidar. Soporte electrónico. La Habana.

-----.- (1998).Algunas nociones de interdisciplinariedad y los sistemas complejos. Fotocopia. La Habana.

-----.- (1999).Educación y relaciones CTS. Conferencia ofrecida en la Facultad de Ciencias del ISPEJV. (25/5). La Habana.

Ruiz, A. (1990). Matemática y filosofía. Editorial de la Universidad de Costa Rica

Piaget J. (1979). Seis Estudios de Psicología. Edit. Seis Barral. Barcelona,

Porlán R., A. Rivero, (1998). Martín del Pozo R. Conocimiento profesional y epistemología de los profesores. Revista Enseñanza de las Ciencias. 16 ( 2 ),

Porlán R. Pasado, (1998). Presente y futuro de la Didáctica de las Ciencias. Revista Enseñanza de las Ciencias. 16 (1),

Quintana Valdés, A. y otros (2004). Cuadernos complementarios de Matemática. Séptimo grado. Editorial Pueblo y Educación, Ciudad de La Habana.

Quintana Valdés, A. y otros (2005). Cuadernos complementarios de Matemática.



Octavo grado. Editorial Pueblo y Educación, Ciudad de La Habana.

Quintana Valdés, A. y otros (2006). Cuadernos complementarios de Matemática.

Noveno grado. Editorial Pueblo y Educación, Ciudad de La Habana.

Rodríguez M. Bermúdez R. Psicología del Pensamiento Científico. Edit. Pueblo y Educación. La Habana, 1999.

Rodríguez, M y otros (2000). La Formación de los Conocimientos Científicos en los Estudiantes. Ponencia.

Rodríguez M., Moltó E., Bermúdez R. La Formación de los conocimientos científicos en los estudiantes. Edit. Academia. La Habana, 1999.

Valdés,R.y Valdés, P (2004). Tres ideas básicas de la didáctica de las ciencias. Didáctica de las Ciencias. Nuevas perspectivas. Pueblo y Educación. La Habana.

Vigotsky L. Pensamiento y Lenguaje. Edit. Pueblo y Educación. La Habana,

Villegas, E. y L. Placeres: “El Tratamiento de conceptos y definiciones: situación típica de la enseñanza de las ciencias”, Interdisciplinariedad: una aproximación desde la enseñanza b de las ciencias, Editorial Pueblo y Educación, La Habana, 2004.

Zilmer, W.: Complemento de metodología de la enseñanza de la Matemática, Editorial de Libros para la Educación, La Habana, 1981.



## ANEXOS

### Anexo 1

#### Encuesta

Objetivo: Conocer la situación actual de los alumnos con respecto a la relación que ven de la Matemática con la ciencia y la tecnología.

Lee y responde con detenimiento, resultaría de gran ayuda para la investigación que se realiza perfeccionar la educación científica tecnológica de los alumnos de noveno grado desde la clase de Matemática.

Guía de preguntas:

1. Existe relación entre la Matemática, la ciencia y la tecnología.

Mucha relación\_\_\_\_ poca relación\_\_\_\_ ninguna relación \_\_\_\_no sé \_\_\_\_

2. El conocimiento de las funciones son importante para la educación científica y tecnología de la sociedad.

Muy importante\_\_\_\_ importante \_\_\_\_ poco importante \_\_\_\_ no sé\_\_\_\_

3. Conoces alguna situación de la práctica que se resuelva con el conocimiento de los contenidos sobre funciones. Si\_\_\_\_no\_\_\_\_

3.1 En caso afirmativo argumenta.

4. En las clases de Matemática vinculan las funciones cuadráticas con la vida, el contexto donde vives?

Siempre\_\_\_\_ casi siempre \_\_\_\_a veces \_\_\_\_nunca \_\_\_\_no sé \_\_\_\_

5. En las clases te preparan para reconocer el significado que tiene el contenido matemático para el desarrollo científico, tecnológico y de la sociedad.

Siempre \_\_\_\_casi siempre \_\_\_\_nunca \_\_\_\_no sé\_\_\_\_



## Anexo 2

### Entrevista a los profesores

Objetivo: Conocer la situación actual de los profesores con respecto al tratamiento de la relación que existe entre la Matemática y la ciencia y la tecnología en las clases.

Lee y responde con detenimiento, resultaría de gran ayuda para la investigación que se realiza perfeccionar la educación científica tecnológica de los alumnos de noveno grado desde la clase de Matemática.

Guía de preguntas:

1. Son importantes los contenidos sobre las funciones cuadráticas para el desarrollo tecnológico de la sociedad.

Muy importantes \_\_\_importantes\_\_\_ nada importante\_\_\_ no sé\_\_\_

1.1 Si los consideras de alguna importancia, argumenta.

2. Usted cuando da tratamiento al contenido relacionado con las funciones cuadráticas lo relaciona con la práctica:

Siempre\_\_\_ algunas veces\_\_\_ nunca\_\_\_

2.2. Ejemplifique en caso de hacerlo.

3. En las preparaciones metodológicas le dan atención a la educación científica tecnológica de los alumnos de noveno grado:

Siempre\_\_\_ algunas veces\_\_\_ nunca\_\_\_

4. Cómo se siente preparado para la educación científica tecnológica de los alumnos de noveno grado a través de las clases sobre funciones cuadráticas?

Muy preparada\_\_\_ poco preparada \_\_\_no estoy preparada\_\_\_



Tablas referentes a los anexos 1 y 2 donde se recogen los resultados, por cantidades de alumnos y profesores, de las encuestas realizadas acerca de la relación, importancia, significado práctico y tratamiento en clases de las funciones.

	Relación	Importancia	Significado práctico	Tratamiento en clases
Estudiantes	mucha :1 poca: 11 ninguna :15 no sé : 4	no sé: 15 muy importante: 3 importante: 5 poco importante: 8	conocen: 3 no conocen: 28	siempre: casi siempre: a veces: 15 nunca: 10 no sé: 6

	Importancia	Significado práctico	Tratamiento en clases
Profesores	muy importante: importante: 2 poco importante: 1 no sé:	conocen: conocen un poco: 3 no conocen:	siempre: casi siempre: a veces: 3 nunca:

Total de profesores a los que se le realizó la encuesta: 3



Tablas referentes a los anexos 1 y 2 donde se recogen los resultados, por cantidades de alumnos, de las encuestas realizadas nuevamente acerca de la relación, importancia, significado práctico y tratamiento en clases de las funciones cuadráticas.

	Relación	Importancia	Significado práctico	Tratamiento en clases
Estudiantes	mucha :28 poca: 1 ninguna : no sé :2	no sé: 1 muy importante: 21 importante: 7 poco importante: 2	conocen: 27 no conocen: 4	siempre:12 casi siempre:16 a veces: nunca: 1 no sé: 2

La encuesta se les aplicó a 31 alumnos.



### Anexo 3

Utilización de asistentes matemáticos. GeoGebra.

Funciones. Construcción paso a paso.

Preparamos el escenario.

Preparación.

Sí

Sí

Automático

Crearemos la familia de funciones lineales.

Etapa 1

- Entrada: 1 (se creará el número a).
- Entrada: 1 (se creará el número b).
- Entrada: 1 (se creará el número c).
- En el cuadro de diálogo Propiedades de Objeto (clic derecho sobre c por ejemplo, o clic en Propiedades del menú Edita), seleccionamos el tipo Número, que es equivalente a seleccionar todos los números, y activamos Muestra Objeto en la pestaña Básico.

Nota: Este procedimiento es igual de rápido que el uso de la herramienta Deslizador, pero ofrece la ventaja de disponer los deslizadores perfectamente alineados. Posteriormente, si así lo deseamos, podríamos desplazarlos en bloque seleccionándolos a la vez con ayuda de la tecla Control o enmarcándolos con la herramienta fundamental  Elige-y-Mueve.

En la Barra de Entrada:  $a x^2 + b x + c$  (se creará la función f).

Nota: En la expresión anterior, no hay que omitir el espacio entre "a" y "x", y entre "b" y "x", pues tal espacio es el operador de multiplicación (equivale a \*). Si se omite, GeoGebra consideraría "ax" y "bx" como variables no definidas. Por otra parte, si en vez de los parámetros a, b y c colocamos números concretos (p.e.,  $3x^2+5x+2$ ) podríamos omitir el operador multiplicación, pues GeoGebra sólo puede interpretar "3x" como un producto, nunca como el nombre de un objeto (los nombres siempre comienzan con una letra).

Si hubiéramos introducido la expresión  $y = a x^2 + b x + c$  (como una ecuación en x e y), GeoGebra consideraría a la cuadrática como objeto "parábola" (o "cónica") en



vez de como objeto "función". La diferencia entre ambas consideraciones se revela en las distintas acciones que podemos efectuar a través de los comandos:

## Etapa 2

- Herramienta  Texto. Hacemos clic en un lugar vacío de la Vista Gráfica y editamos el texto " $f(x) =$ " + f.

Nota: También podríamos haber optado por mostrar simplemente el rótulo de f, eligiendo la opción "nombre y valor". Hay dos inconvenientes si usamos este método: no tendremos acceso a estilos de letra y no podremos posicionar con precisión el texto. Además, la posición del texto se moverá con la gráfica, lo que a veces será deseable y a veces no.

- Varía los parámetros a, b y c observa en cada caso cómo afectan sus cambios a la gráfica de la función, particularmente el signo de cada uno.

## Comentarios

Algo similar ocurre con la recta (como lugar geométrico) y la función afín. Si introducimos " $y = 2x + 3$ ", GeoGebra entiende una recta mientras que si introducimos simplemente " $2x + 3$ " se entenderá y nombrará como una función.

Para el trabajo independiente:

- ¿Qué trayectoria describe el vértice de la parábola al variar b? Crear el vértice Extremo[f], activar su Rastro y desplazar b. Comprobar que la trayectoria del vértice sigue la función  $h(x) = -a x^2 + c$ . ¿Por qué?
- ¿Qué sucede con las funciones afines definidas como  $f(x) = a x + a$ ? ¿Y con las cuadráticas definidas como  $f(x) = a x^2 + a x + a$ ? Probar a activar el rastro de cada una de estas funciones antes de mover el deslizador "a".
- Realizar pruebas con los comandos específicos de funciones, para conocer la sintaxis de cada uno, basta introducir su nombre en el campo de Entrada y pulsar F1.

