UNIVERSIDAD DE ORIENTE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

FUNCIONES INFRAMONOGÉNICAS Y SUS APLICACIONES EN LA TEORÍA DE LA ELASTICIDAD LINEAL

Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Matemáticas

M.SC. ARSENIO MORENO GARCÍA

Santiago de Cuba
2019

UNIVERSIDAD DE ORIENTE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

FUNCIONES INFRAMONOGÉNICAS Y SUS APLICACIONES EN LA TEORÍA DE LA ELASTICIDAD LINEAL

Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Matemáticas

Autor: M.Sc. Arsenio Moreno García
Tutores: Dr.Cs. Ricardo Abreu Blaya
Dr.C. Tania Moreno García

Santiago de Cuba
2019

Síntesis

La tesis se enmarca en el Análisis de Clifford el cual ofrece un marco teórico ventajoso para abordar problemas matemáticos y físicos en dimensión mayor que dos. Cuando el operador de Dirac actúa dos veces sobre una función puede hacerlo de dos formas: a un mismo lado, o bien una vez por cada lado. Así se tienen dos clases de funciones, que satisfacen respectivamente las ecuaciones $\partial_{\underline{x}}\partial_{\underline{x}}f = 0$ y $\partial_{\underline{x}}f\partial_{\underline{x}} = 0$. Las soluciones de la primera son las funciones armónicas y las de la segunda las funciones inframonogénicas. Antes de la presente investigación no se había reportado una fórmula capaz de expresar una función inframonogénica en el interior de un dominio a partir de integrales de la función y de sus derivadas tomadas sobre la frontera. En esta tesis se demuestra una fórmula integral de tipo Cauchy para funciones inframonogénicas la cual se usa para obtener una descomposición de tipo Almansi para las funciones simultáneamente inframonogénicas y armónicas. Además estos resultados se aplican a la teoría de la elasticidad lineal por medio de una reformulación del sistema homogéneo de Lamé-Navier en términos del operador $\partial_{\underline{x}}(.)\partial_{\underline{x}}$ para obtener una descomposición aditiva de sus soluciones, lo que permite descubrir nuevas propiedades de esta ecuación.

Índice general

Lista de símbolos

- $\mathbb{R}_{0,m}$ Álgebra de Clifford real de signatura $(0, m)$
- $\sim$ Isomorfismo
- $[.]_k$ Parte k-vectorial
- $[.]$ Clase de equivalencia
- $\partial_{\underline{x}}$ Operador de Dirac
- $\partial_{\underline{x}}(.)\partial_{\underline{x}}$ Operador que define las funciones inframonogénicas
- $\partial_{\underline{x}}^k$ Operador de Dirac iterado k veces
- $\triangle_m$ Operador de Laplace en $\mathbb{R}^m$
- $\mathcal{L}_{\lambda,\mu}$ Operador de Lamé-Navier
- $\mathcal{L}^*_{\lambda,\mu}$ Operador de Lamé-Navier generalizado
- $\mathcal{M}^l$ Espacio de las funciones monogénicas por la izquierda
- $\mathcal{M}^r$ Espacio de las funciones monogénicas por la derecha
- $\mathcal{M}^b$ Espacio de las funciones monogénicas por ambos lados
- $\mathcal{H}$ Espacio de las funciones bimonogénicas
- $\mathcal{I}$ Espacio de las funciones inframonogénicas
- $E_0(\underline{x})$ Núcleo de Cauchy

- $E_1(\underline{x})$ Núcleo del operador de Laplace en $\mathbb{R}^m$ para $m \geq 3$
- $E_{k-1}(\underline{x})$ Núcleo del operador $\partial_{\underline{x}}^k$
- $\mathcal{C}_\Gamma^l$ Transformada de Cauchy por la izquierda
- $\mathcal{C}_\Gamma^r$ Transformada de Cauchy por la derecha
- $\mathcal{C}_\Gamma^{l,k}$ Transformada de Cauchy por la izquierda de orden k
- $\mathcal{C}_\Gamma^{r,k}$ Transformada de Cauchy por la derecha de orden k
- $\mathcal{C}_\Gamma^{\mathbf{infra}}$ Transformada de Cauchy inframonogénica
- $\mathcal{C}_\Gamma^{\mathbf{infra},k}$ Transformada de Cauchy infrapolimonogénica
- $\mathcal{T}_\Omega^l$ Transformada de Teodorescu por la izquierda
- $\mathcal{T}_\Omega^r$ Transformada de Teodorescu por la derecha
- $\mathcal{T}_\Omega^{l,k}$ Transformada de Teodorescu por la izquierda de orden k
- $\mathcal{T}_\Omega^{r,k}$ Transformada de Teodorescu por la derecha de orden k
- $\mathcal{T}_\Omega^{\mathbf{infra}}$ Transformada de Teodorescu asociada al operador $\partial_{\underline{x}}(.)\partial_{\underline{x}}$
- $\mathcal{T}_\Omega^{\mathbf{infra},k}$ Transformada de Teodorescu asociada al operador $\partial_{\underline{x}}^{2k-1}(.)\partial_{\underline{x}}$
- $\Psi(.) := \sum_{k=1}^m e_k\,(.)\,e_k$ Operador Psi
- C_i, C_h Operadores de conjugación inframonogénica y de conjugación armónica respectivamente

Introducción

El Análisis de Clifford es una teoría de funciones que generaliza el Análisis Complejo clásico al caso n-dimensional [6, 8]. Su principal objeto de estudio es la clase de las funciones monogénicas, es decir, funciones con valores en álgebras de Clifford y que pertenecen al núcleo del operador de Dirac, el cual tiene en esta teoría el mismo papel que el operador de Cauchy-Riemann en el Análisis Complejo.

Muchos resultados clásicos han sido generalizados como la fórmula de Borel-Pompeiu, la fórmula integral de Cauchy, el teorema integral de Cauchy y las fórmulas de Plemelj-Sojotski, a veces de forma natural, otras no de forma tan evidente, pues al pasar de dos a más dimensiones surgen muchas dificultades tanto geométricas como algebraicas. Una de las de más peso es la no conmutatividad de la multiplicación en las álgebras de Clifford de dimensión mayor que dos. Esta dificultad trae como consecuencia que el producto de dos funciones monogénicas no sea en general una función monogénica, en contraste con el producto de dos funciones holomorfas de variable compleja que es una función holomorfa. Para profundizar en los aspectos históricos y aplicaciones del Análisis de Clifford se recomienda revisar [8].

Una de las líneas del desarrollo ulterior del Análisis de Clifford ha sido el estudio de propiedades de las funciones que están en el núcleo de otros operadores que generalizan al de Dirac; por ejemplo, las funciones polimonogénicas, las cuales conforman el núcleo del operador de Dirac iterado varias veces por un solo lado, ya sea por la derecha o la izquierda (ver [3, 26]).

Para funciones polimonogénicas, en los trabajos mencionados se probó una fórmula de representación integral de tipo Cauchy, la cual se obtiene como consecuencia de una fórmula de tipo Borel-Pompeiu, en términos del operador de Dirac iterado k veces a un solo lado.

Antes de la presente investigación, no se había resuelto el problema de extraer una fórmula de tipo Cauchy para las funciones que anulan el operador de Dirac iterado p veces por la izquierda y q veces por la derecha (p y q números impares) incluso para el caso del operador $\partial_{\underline{x}}(.)\partial_{\underline{x}}$ que aplica el operador de Dirac una sola vez por cada lado. La solución de estos problemas constituye uno de los aportes de esta tesis.

Los primeros intentos de hallar una representación integral para las soluciones de la ecuación $\partial_{\underline{x}} f \partial_{\underline{x}} = 0$, son reportados en [19, 18], en los cuales se introduce el término inframonogénicas para denominar las soluciones de esta ecuación, las cuales se definen con la motivación de ser una generalización de las monogénicas y un refinamiento de las funciones biarmónicas. Los principales resultados de estos trabajos consisten en el uso de estas funciones inframonogénicas para obtener una nueva descomposición de Fischer para polinomios homogéneos en $\mathbb{R}^m$, un teorema de Cauchy-Kowalevski y algunas propiedades básicas de las funciones inframonogénicas.

La inframonogenicidad es un concepto que surge específicamente en el Análisis de Clifford y está estrechamente vinculado a la no conmutatividad del producto cliffordiano.

Las funciones inframonogénicas devienen un marco teórico ventajoso para reformular el sistema de Lamé-Navier de la teoría de la elasticidad lineal (ver detalles en [2, 15]). A partir de la fórmula de representación integral de Cauchy para las funciones inframonogénicas se pueden deducir propiedades de la estructura de las soluciones de este sistema. En este tema se concentran los aportes de la segunda parte de esta tesis.

La aplicación de las funciones cuaterniónicas ψ-hiperholomorfas en $\mathbb{R}^3$, donde ψ denota un conjunto estructural (ver detalles en [28]), es natural en el establecimiento de una nueva representación para la solución general del sistema de Lamé-Navier, previamente reportado en mencionado en [5, 9, 10, 11, 24, 31], por ejemplo.

Si se tiene en cuenta todo lo mencionado anteriormente, se formula el problema científico de este trabajo:

¿Cómo obtener una fórmula de representación integral de tipo Cauchy para las funciones inframonogénicas y cómo aplicar esta clase de funciones para caracterizar la estructura de las soluciones de la ecuación de Lamé-

Navier?

Un resultado importante de esta tesis, es el vínculo entre las funciones inframonogénicas en $\mathbb{R}^3$ y las soluciones del sistema homogéneo de Lamé-Navier que fue publicado en [22]. Además en ese artículo se demuestran algunas propiedades de las funciones simultáneamente inframonogénicas y armónicas así como la identificación de estas con la clase de los así llamados desplazamientos universales (ver [30]).

La presente investigación está encaminada a lograr los siguientes objetivos:

- Obtener propiedades de las funciones inframonogénicas por medio de de una fórmula de representación de tipo Cauchy. En particular, obtener una representación de tipo Almansi.

- Definir una transformada de Cauchy inframonogénica y una de Teodorescu asociada a esta, así como estudiar una generalización no trivial de estos resultados al caso de funciones infrapolimonogénicas (soluciones del sistema $\partial_{\underline{x}}^k f \partial_{\underline{x}} = 0$, k impar).

- Caracterizar las soluciones del sistema homogéneo de Lamé-Navier en términos de funciones inframonogénicas y armónicas.

Concretamente, los resultados de esta tesis son los siguientes:

- Una fórmula de representación integral de tipo Cauchy para funciones inframonogénicas (publicado en [20]).

- Definición de una transformada de Cauchy inframonogénica y una transformada de tipo Teodorescu asociada a esta (publicado en [20]).

- Una representación de tipo Almansi para las funciones simultáneamente inframonogénicas y armónicas (enviado a publicar en [22]).

- Una fórmula de representación integral de tipo Cauchy para funciones infrapolimonogénicas (enviado a publicar en [22]).

- Definición de una transformada de Cauchy infrapolimonogénica y una transformada de tipo Teodorescu asociada a esta (enviado a publicar en [22]).

- Descomposición aditiva de las soluciones del sistema de Lamé-Navier homogéneo en términos del operador $\partial_{\underline{x}}(.)\partial_{\underline{x}}$ (publicado en [23]).

- Caracterización del espacio de los desplazamientos universales como aquel de las funciones que son simultáneamente inframonogénicas y armónicas (publicado en [23]).

- Reformulación de la solución clásica de Kelvin en el Análisis de Clifford como superposición de dos transformadas de tipo Teodorescu.

En el Capítulo 1 se exponen los principales conceptos y teoremas del Análisis de Clifford, en el marco del cual se desarrolla la presente investigación. Los aportes se concentran en los capítulos 2 y 3.

El Capítulo 2 está dedicado al estudio de las funciones inframonogénicas y de las infrapolimonogénicas. Como resultados fundamentales: se demuestra una fórmula integral de tipo Cauchy para las funciones inframonogénicas, se demuestra además una generalización no trivial de esta para las funciones infrapolimonogénicas y se extrae una descomposición de tipo Almansi para las funciones que son simultáneamente inframonogénicas y armónicas.

El Capítulo 3 está dedicado a las aplicaciones de los resultados del Capítulo 2 a la teoría de la elasticidad lineal, en particular al sistema de Lamé-Navier. Se demuestran varios teoremas sobre la estrutura de las soluciones de este sistema.

Capítulo 1

Elementos básicos del Análisis de Clifford

En este capítulo se introducen los principales conceptos y resultados básicos del Análisis de Clifford que permiten dar cumplimiento a los objetivos los objetivos propuestos.

1.1. Preliminares algebraicos

El concepto de álgebra de Clifford generada por el espacio euclídeo $\mathbb{R}^m$ constituye una generalización del álgebra de los números complejos al caso multidimenisonal.

Sea $\mathbb{R}^{0,m}$ $(m \in \mathbb{N})$ el espacio vectorial real $\mathbb{R}^m$ provisto de una forma cuadrática no degenerada de signatura $(0, m)$ y sea $(e_j)_{j=1}^m$ la base ortogonal correspondiente para $\mathbb{R}^{0,m}$. Entonces $\mathbb{R}_{0,m}$, el álgebra de Clifford universal sobre $\mathbb{R}^{0,m}$, es un álgebra real lineal asociativa con identidad, tal que los elementos e_j, $j = 1, \ldots, m$, satisfacen las reglas básicas de multiplicación

$$e_j^2 = -1, \; j = 1, \ldots, m;$$

$$e_i e_j + e_j e_i = 0, \; i \neq j.$$

Para $A = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, m\}$ con $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant m$, pongamos $e_A = e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}$, mientras para $A = \emptyset$, $e_\emptyset = 1$ (el elemento identidad en $\mathbb{R}_{0,m}$). Entonces $\{e_A : A \subset \{1,\ldots,m\}\}$ es una base para $\mathbb{R}_{0,m}$, que permite expresar cada elemento $x \in \mathbb{R}_{0,m}$ de forma única como

$$x = \sum_A x_A e_A. \tag{1.1}$$

donde A recorre el conjunto de multíndices de los elementos de la base y los coeficientes x_A son números reales.

Se usará la notación $Sc(x)$ para denotar la parte escalar de x.

Como consecuencia de las reglas básicas de multiplicación para x, $y \in \mathbb{R}_{0,m}$ su producto se define como

$$xy = \sum_{A,B\subset\{1,\ldots,m\}} x_A y_B e_A e_B.$$

Para $1 \leqslant k \leqslant m$, con m fijo, el espacio $\mathbb{R}_{0,m}^{(k)}$ de los k-vectores o multivectores de grado k en $\mathbb{R}_{0,m}$, se define como

$$\mathbb{R}_{0,m}^{(k)} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(e_A : \ |A| = k).$$

Claramente

$$\mathbb{R}_{0,m} = \sum_{k=0}^{m} \oplus \mathbb{R}_{0,m}^{(k)}.$$

Así, cada elemento $a \in \mathbb{R}_{0,m}$ puede ser escrito de forma única como

$$a = [a]_0 + [a]_1 + \cdots + [a]_m$$

donde $[\,]_k : \mathbb{R}_{0,m} \longrightarrow \mathbb{R}_{0,m}^{(k)}$ denota la proyección de $\mathbb{R}_{0,m}$ sobre $\mathbb{R}_{0,m}^{(k)}$. El número de Clifford $[a]_k$ se denomina parte k-vectorial de a.

Si se identifica el vector $(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_m) \in \mathbb{R}^m$ con el número de Clifford $\underline{x} = \sum_{j=1}^m e_j \underline{x}_j$, entonces $\mathbb{R}^m$ puede ser considerado como subespacio de $\mathbb{R}_{0,m}$.

Obsérvese que para dos vectores $\underline{x}$ e $\underline{y}$, su producto está dado por

$$\underline{x}\underline{y} = \underline{x} \bullet \underline{y} + \underline{x} \wedge \underline{y}$$

donde

$$\underline{x} \bullet \underline{y} = \frac{1}{2}(\underline{x}\underline{y} + \underline{y}\underline{x}) = -\sum_{j=1}^{m} \underline{x}_j \underline{y}_j$$

es -salvo el signo de menos- el producto interno estándar entre $\underline{x}$ e $\underline{y}$, mientras

$$\underline{x} \wedge \underline{y} = \frac{1}{2}(\underline{x}\underline{y} - \underline{y}\underline{x}) = \sum_{i<j} e_i e_j (\underline{x}_i y_j - \underline{x}_j \underline{y}_i)$$

representa el producto exterior estándar entre ellos.

En general, para un 1-vector $\underline{x}$ y un k-vector Y_k, su producto $\underline{x}Y_k$ es la suma de un $(k-1)$-vector y un $(k+1)$-vector:

$$\underline{x}Y_k = [\underline{x}Y_k]_{k-1} + [\underline{x}Y_k]_{k+1}.$$

Los productos interno y exterior entre $\underline{x}$ e Y_k se definen respectivamente como

$$\underline{x} \bullet Y_k = [\underline{x}Y_k]_{k-1} \text{ y } \underline{x} \wedge Y_k = [\underline{x}Y_k]_{k+1}. \tag{1.2}$$

La conjugación en el álgebra de Clifford se define como $\overline{a} := \sum_A a_A \overline{e_A}$, donde

$$\overline{e_A} = (-1)^k e_{i_k} \cdots e_{i_2} e_{i_1}, \text{ si } e_A = e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}.$$

Entonces, para $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$, se tiene que

$$\underline{x}\,\overline{\underline{x}} = \overline{\underline{x}}\,\underline{x} = |\underline{x}|^2.$$

Por medio de esta conjugación es posible proveer a $\mathbb{R}_{0,m}$ de la norma euclideana $|a|^2 = [a\overline{a}]_0$. Si $|a|_0^2 = 2^m |a|^2$ entonces se obtiene un álgebra normada.

1.2. Preliminares analíticos

La presente investigación se concentra en funciones definidas en dominios de $\mathbb{R}^m$, $(m > 2)$, las cuales toman valores en el álgebra de Clifford $\mathbb{R}_{0,m}$. Una de tales funciones pertenece a alguna clase clásica de funciones si cada una de sus componentes pertenece a dicha clase. Así, por ejemplo, en esta tesis una función con valores en $\mathbb{R}_{0,m}$ se denomina armónica si lo son cada una de sus 2^m componentes reales.

De esta forma, si G es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^m$, se denota por $C^k(G)$ la clase de funciones k-veces continuamente diferenciables en G. En general, para un subconjunto $E \subset \mathbb{R}^m$ cerrado la clase $C^k(E)$ está formada por las funciones f tales que existe un abierto G, $E \subset G$ tal que $f \in C^k(G)$. La clase de funciones continuas en un subconjunto $E \subset \mathbb{R}^m$ se denota por $C(E)$. La clase de Hölder de exponente α, $0 < \alpha \leq 1$, sobre un conjunto acotado E, la cual se denota por $C^{0,\alpha}(E)$, es la clase de funciones f tales que

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha,$$

Donde c denota una constante genérica positiva, no necesariamente la misma en diferentes momentos. Por último, $L^p(E)$ denota la clase de funciones f tales que $|f|^p$ es integrable sobre E.

Salvo que se especifique lo contrario, se denota por Ω un dominio de Jordan en $\mathbb{R}^m$, es decir, un conjunto abierto, acotado, orientado y conexo cuya frontera es topológicamente compacta.

Una función $F : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_{0,m}^{(k)}$ se denomina campo k-vectorial o k-campo.

El Análisis de Clifford tiene como objeto de estudio las funciones que toman valores en álgebras de Clifford, especialmente las llamadas funciones monogénicas: aquellas que pertenecen al núcleo del operador de Dirac en $\mathbb{R}^m$, el cual se define como

$$\partial_{\underline{x}} := \sum_{j=1}^{m} e_j \partial_{x_j}.$$

Este es un operador diferencial vectorial, elíptico, de primer orden e invariante por rotaciones en el espacio euclideano $\mathbb{R}^m$ y constituye una extensión natural al espacio $\mathbb{R}^m$ del operador complejo de Cauchy-Riemann. Un hecho notable que se deriva de la definición del operador de Dirac, es que este factoriza al laplaciano en el sentido de que $\partial_{\underline{x}}^2 = -\triangle_m$. Esto significa que las funciones monogénicas son también armónicas, es decir, soluciones de la ecuación de Laplace.

Debido a la no conmutatividad de las álgebras de Clifford $\mathbb{R}_{0,m}$ $(m > 1)$, para definir el núcleo del operador de Dirac, es necesario indicar por cuál lado de la función este actúa, así se definen los núcleos laterales por la izquierda ($\mathcal{M}^l$) y por la derecha ($\mathcal{M}^r$), dados por

$$\mathcal{M}^l = \{f | \partial_{\underline{x}} f = 0\} \quad \mathcal{M}^r = \{f | f \partial_{\underline{x}} = 0\} \tag{1.3}$$

Los elementos de estos núcleos se denominan funciones monogénicas por la izquierda y por la derecha respectivamente. Estas constituyen el principal objeto de estudio del Análisis de Clifford.

En esta tesis también se hace uso del conjunto $\mathcal{M}^b = \mathcal{M}^l \cap \mathcal{M}^r$, cuyos elementos se denominan funciones monogénicas bilaterales o monogénicas a ambos lados.

Un ejemplo de función monogénica a ambos lados es la solución fundamental del operador de Dirac, la cual se denomina núcleo de Cauchy, definida como:

$$E_0(\underline{x}) = -\frac{1}{\sigma_m} \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|^m}, \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\},$$

donde σ_m es el área de la esfera unitaria en $\mathbb{R}^m$. La función $E_0(x)$ en el Análisis de Clifford tiene el mismo papel que el núcleo de Cauchy en el Análisis Complejo, lo cual se manifiesta en las fórmulas de representación integral para funciones monogénicas.

Ejemplos de funciones monogénicas pueden ser obtenidos por medio de la llamada transformada de Cauchy cliffordiana:

Sea Ω un dominio de Jordan en $\mathbb{R}^m$ con frontera suave $\Gamma := \partial\Omega$. Entonces, para toda función f continua en Γ, su transformada de Cauchy cliffordiana por la izquierda $\mathcal{C}^l_\Gamma f$ se define como

$$(\mathcal{C}^l_\Gamma f)(\underline{x}) := \int_\Gamma E_0(\underline{y} - \underline{x}) \underline{n}(\underline{y}) f(\underline{y}) dS(\underline{y}) \, , \; \underline{x} \notin \Gamma,$$

donde $dS(\underline{y})$ denota el diferencial de área y $\underline{n}(\underline{y})$ el vector normal unitario exterior a Ω en $\underline{y} \in \Gamma$. De igual forma, la transformada de Cauchy por la derecha de f se define como

$$(\mathcal{C}_\Gamma^r f)(\underline{x}) := \int_\Gamma f(\underline{y})\underline{n}(\underline{y})E_0(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y})\ ,\ \underline{x} \notin \Gamma.$$

Se puede comprobar que $\mathcal{C}_\Gamma^l f$ es monogénica a la izquierda en $\mathbb{R}^m \setminus \Gamma$ y $\mathcal{C}_\Gamma^r f$ es monogénica a la derecha en $\mathbb{R}^m \setminus \Gamma$. En relación con la transformada de Cauchy, se define también la transformada de Hilbert de una función $f \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$:

$$(\mathcal{S}_\Gamma^l f)(\underline{x}) := 2\int_\Gamma E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})f(\underline{y})dS(\underline{y})\ ,\ \underline{x} \in \Gamma,$$

y de forma análoga su versión a la derecha

$$(\mathcal{S}_\Gamma^r f)(\underline{x}) := 2\int_\Gamma f(\underline{y})\underline{n}(\underline{y})E_0(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y})\ ,\ \underline{x} \in \Gamma.$$

Estas integrales singulares se entienden en el sentido del valor principal de Cauchy.

Un operador integral que está estrechamente vinculado a la transformada de Cauchy, está dado por la transformada de Teodorescu, que se define respectivamente a la izquierda $\mathcal{T}_\Omega^l \varphi(\underline{x})$ y por la derecha $\mathcal{T}_\Omega^r \varphi(\underline{x})$ como

$$\mathcal{T}_\Omega^l \varphi(\underline{x}) = -\int_\Omega E_0(\underline{y}-\underline{x})\varphi(\underline{y})dV(\underline{y}), \tag{1.4}$$

$$\mathcal{T}_\Omega^r \varphi(\underline{x}) = -\int_\Omega \varphi(\underline{y})E_0(\underline{y}-\underline{x})dV(\underline{y}), \tag{1.5}$$

donde φ es una función integrable en Ω.

1.3. Fórmulas de representación integral para funciones monogénicas y polimonogénicas

Una fórmula básica de amplio uso en el Análisis de Clifford y en particular en la demostración de los resultados fundamentales de esta tesis es la fórmula de Stokes en su versión cliffordiana.

Teorema 1.3.1 *(fórmula de Stokes) Sea Ω un dominio de Jordan en $\mathbb{R}^m$ con frontera suave $\Gamma := \partial\Omega$ y $f, g \in C^1(\Omega \cup \Gamma)$. Entonces*

$$\int_\Gamma f(\underline{y})n(\underline{y})g(\underline{y})dS(\underline{y}) = \int_\Omega [f(\underline{y})\partial_{\underline{y}}]g(\underline{y})dV(\underline{y}) + \int_\Omega f(\underline{y})[\partial_{\underline{y}}g(\underline{y})]dV(\underline{y}) \quad (1.6)$$

De esta se deducen las siguientes fórmulas de Borel-Pompeiu a la izquierda y a la derecha, respectivamente.

Teorema 1.3.2 *(fórmula de Borel-Pompeiu a la izquierda) Sea Ω un dominio de Jordan en $\mathbb{R}^m$ con frontera suave $\Gamma := \partial\Omega$ y $f \in C^1(\Omega \cup \Gamma)$. Entonces*

$$f(\underline{x}) = \mathcal{C}^l_\Gamma f(\underline{x}) + \mathcal{T}^l_\Omega \partial_{\underline{x}} f(\underline{x}) \ , \ \underline{x} \in \Omega. \quad (1.7)$$

Teorema 1.3.3 *(fórmula de Borel-Pompeiu a la derecha) Sea Ω un dominio de Jordan en $\mathbb{R}^m$ con frontera suave $\Gamma := \partial\Omega$ y $f \in C^1(\Omega \cup \Gamma)$. Entonces,*

$$f(\underline{x}) = \mathcal{C}^r_\Gamma f(\underline{x}) + \mathcal{T}^r_\Omega f(\underline{x})\partial_{\underline{x}} \ , \ \underline{x} \in \Omega. \quad (1.8)$$

Para funciones monogénicas a la izquierda y a la derecha de las respectivas fórmulas anteriores de tipo Borel-Pompeiu se obtienen las siguientes fórmulas de representación integral de tipo Cauchy.

Teorema 1.3.4 *(fórmula de Cauchy a la izquierda) Sea Ω un dominio de Jordan en $\mathbb{R}^m$ con frontera suave $\Gamma := \partial\Omega$ y $f \in C^1(\Omega\cup\Gamma)\cap\mathcal{M}^l(\Omega)$. Entonces,*

$$f(\underline{x}) = \mathcal{C}^l_\Gamma f(\underline{x}), \ \ x \in \Omega. \quad (1.9)$$

Teorema 1.3.5 *(fórmula de Cauchy a la derecha) Sea Ω un dominio de Jordan en $\mathbb{R}^m$ con frontera suave $\Gamma := \partial\Omega$ y $f \in C^1(\Omega \cup \Gamma) \cap \mathcal{M}^r(\Omega)$.*

Entonces,

$$f(\underline{x}) = \mathcal{C}_\Gamma^r f(\underline{x}), \;\; x \in \Omega. \tag{1.10}$$

Es natural la búsqueda de generalizaciones de las fórmulas de Cauchy y de Borel-Pompeiu a otros ambientes matemáticos más generales, tales como las soluciones de la ecuación $\partial_{\underline{x}}^k f(x) = 0$, donde aparece en lugar del operador de Dirac, el mismo pero iterado k veces, $k \in \mathbb{N}$. Estas funciones se denominan polimonogénicas de orden k o k-monogénicas. Note que para $k = 2$, la clase de las funciones 2-monogénicas coincide con la de las armónicas, como se definen en esta tesis. Las funciones 2-monogénicas también se denominan bimonogénicas, por eso, a partir de aquí, los términos función armónica y función bimonogénica serán intercambiables salvo que se especifique lo contrario.

Una fórmula de Borel-Pompeiu en términos del operador $\partial_{\underline{x}}^k$ se obtiene en [3, 26] por medio de la iteración de la fórmula de Borel-Pompeiu clásica.

Los núcleos de Cauchy de orden superior E_k se definen de forma tal que se cumple la recurrencia $\partial_{\underline{x}} E_{k+1} = E_k$, donde $E_k(\underline{x})$ es una función $(k+1)$-monogénica a ambos lados en $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Las fórmulas explícitas de los E_k aparecen en [26]. En esta tesis que nos ocupa no se hace uso de las expresiones explícitas de estos núcleos, solo la ley de recurrencia mencionada y algunas propiedades suaves de estos.

Las transformadas de Cauchy de orden k a la izquierda $(\mathcal{C}_\Gamma^{l,k})$ y a la derecha $(\mathcal{C}_\Gamma^{r,k})$ de una función $f \in C^k(\Gamma)$ se definen respectivamente como

$$\mathcal{C}_\Gamma^{l,k} f(\underline{x}) := \sum_{i=0}^{k-1} \int_\Gamma (-1)^i E_i(\underline{y} - \underline{x}) \underline{n}(\underline{y}) \partial_{\underline{x}}^i f(\underline{y}) dS(\underline{y}) \, , \; \underline{x} \notin \Gamma,$$

$$\mathcal{C}_\Gamma^{r,k} f(\underline{x}) = \sum_{i=0}^{k-1} \int_\Gamma (-1)^i \partial_{\underline{x}}^i f(\underline{y}) \underline{n}(\underline{y}) E_i(\underline{y} - \underline{x}) dS(\underline{y}) \, , \; \underline{x} \notin \Gamma.$$

De igual forma, las transformadas de Teodorescu de orden k a la izquierda $(\mathcal{T}_\Omega^{l,k})$ y a la derecha $(\mathcal{T}_\Omega^{r,k})$ de una función φ integrable en Ω se definen como

$$\mathcal{T}_\Omega^{l,k} \varphi(\underline{x}) = (-1)^k \int_\Omega E_{k-1}(\underline{y} - \underline{x}) \varphi(\underline{y}) dV(\underline{y})$$

$$\mathcal{T}_{\Omega}^{r,k}\varphi(\underline{x}) = (-1)^k \int_{\Omega} \varphi(\underline{y}) E_{k-1}(\underline{y}-\underline{x}) dV(\underline{y}).$$

Las fórmulas de Borel Pompeiu a la izquierda y a la derecha quedan como generalizaciones naturales de las clásicas correspondientes al caso de orden k.

Teorema 1.3.6 *(fórmula de Borel-Pompeiu de orden k a la izquierda) Sea Ω un dominio de Jordan en $\mathbb{R}^m$ con frontera suave $\Gamma := \partial\Omega$ y $f \in C^k(\Omega \cup \Gamma)$. Entonces,*

$$f(\underline{x}) = \mathcal{C}_{\Gamma}^{l,k} f(\underline{x}) + \mathcal{T}_{\Omega}^{l,k} \partial_{\underline{x}}{}^k f(\underline{x}) \quad \underline{x} \in \Omega. \tag{1.11}$$

Teorema 1.3.7 *(fórmula de Borel-Pompeiu de orden k a la derecha) Sea Ω un dominio de Jordan en $\mathbb{R}^m$ con frontera suave $\Gamma := \partial\Omega$ y $f \in C^k(\Omega \cup \Gamma)$. Entonces,*

$$f(\underline{x}) = \mathcal{C}_{\Gamma}^{r,k} f(\underline{x}) + \mathcal{T}_{\Omega}^{r,k} f(\underline{x}) \partial_{\underline{x}}{}^k \quad \underline{x} \in \Omega. \tag{1.12}$$

Si se toma el caso particular en que f es k-monogénica en Ω, la fórmula de Borel-Pompeiu se reduce a la fórmula integral de Cauchy para las funciones k-monogénicas.

Teorema 1.3.8 *Sea Ω un dominio de Jordan en $\mathbb{R}^m$ con frontera suave $\Gamma := \partial\Omega$ y $f \in C^k(\Omega \cup \Gamma)$, f k-monogénica a la izquierda en Ω. Entonces*

$$f(\underline{x}) = \mathcal{C}_{\Gamma}^{l,k} f(\underline{x}) \quad \underline{x} \in \Omega. \tag{1.13}$$

Teorema 1.3.9 *Sea Ω un dominio de Jordan en $\mathbb{R}^m$ con frontera suave $\Gamma := \partial\Omega$ y $f \in C^k(\Omega \cup \Gamma)$, f k-monogénica a la derecha en Ω. Entonces*

$$f(\underline{x}) = \mathcal{C}_{\Gamma}^{r,k} f(\underline{x}) \quad \underline{x} \in \Omega. \tag{1.14}$$

Estas versiones polimonogénicas necesitan no solo de los valores de las funciones en la frontera sino también de sus derivadas parciales hasta el orden $k-1$, en contraste con la fórmula de Cauchy para funciones monogénicas.

Capítulo 2

Funciones inframonogénicas e infrapolimonogénicas

En este capítulo se resuelve el problema de obtener una fórmula de representación integral de tipo Cauchy para las funciones inframonogénicas. Además, se define una transformada de Cauchy que genera funciones inframonogénicas a partir de funciones continuas definidas en una superficie suave en $\mathbb{R}^m$.

En segundo lugar, se enuncia y demuestra una fórmula de representación integral de Cauchy para las funciones infrapolimonogénicas. Esta fórmula constituye una generalización no trivial de la hallada para las inframonogénicas. Es importante aclarar que en la demostración de esta fórmula generalizada, no funciona el razonamiento análogo al descrito para la demostración de la fórmula de representación integral de las polimonogénicas, como resultado, se propone un nuevo método para probarla, (ver segunda sección de este capítulo).

2.1. Funciones inframonogénicas. Definición y propiedades

En artículos recientes [19, 18] se han considerado funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}_{0,m}$ donde Ω es un abierto de $\mathbb{R}^m$ y $f \in C^2(\Omega)$ que satisfacen en Ω la ecuación i

$$\partial_{\underline{x}} f \partial_{\underline{x}} = 0. \tag{2.1}$$

Estas funciones se denominan inframonogénicas y constituyen un refinamiento de las biarmónicas y una generalización de las monogénicas.

Para lograr que la exposición de los resultados de la presente investigación sea autocontenida, a continuación se da una lista de propiedades mencionadas en [18], como una motivación para el estudio de las funciones inframonogénicas.

1. Si una función f es inframonogénica en $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ con valores en $\mathbb{R}$, entonces f es armónica en Ω.

2. Las funciones monogénicas son inframonogénicas.

3. Si una función f es inframonogénica en $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, entonces satisface en Ω el sistema sobredeterminado $\partial_{\underline{x}}^3 f = f \partial_{\underline{x}}^3 = 0$. En otras palabras, f es una función 3-monogénica a ambos lados.

4. Cada función inframonogénica $f \in C^4(\Omega)$ es biarmónica, es decir satisface en Ω la ecuación $\triangle_m^2 f = 0$.

La siguiente proposición y el corolario que le sigue, son aportes de este trabajo y muestran propiedades finas relacionadas con las funciones inframonogénicas que se pueden agregar a la lista anterior. El siguiente resultado muestra que el operador $\partial_{\underline{x}}(.)\partial_{\underline{x}}$ es escalar, en el sentido que preserva la clase de los k-campos.

Teorema 2.1.1 *Sea F_k un k-campo, entonces $\partial_{\underline{x}} F_k \partial_{\underline{x}}$ es un k-campo.*

Demostración. Se tiene que $F_k = \sum\limits_{|A|=k} F_A e_A$ con $|A| = k$. Entonces

$$\partial_{\underline{x}} F_A e_A \partial_{\underline{x}} = \sum_{i,j} e_i (\partial_i \partial_j f_A) e_A e_j = \sum_{i,j} (\partial_i \partial_j f_A) e_i e_A e_j.$$

Luego

$$\partial_{\underline{x}} f_A e_A \partial_{\underline{x}} = \sum_{i=1}^{m} (\partial_i^2 f_A) e_i e_A e_i + \sum_{i \neq j} (\partial_i \partial_j f_A) e_i e_A e_j =: \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Obsérvese que la primera suma Σ_1 es un k-campo ya que

$$e_i e_A e_i = \begin{cases} (-1)^{|A|} e_A, & \text{for } i \in A \\ (-1)^{|A|+1} e_A, & \text{for } i \notin A. \end{cases}$$

Para la segunda suma se usa la descomposición natural

$$\begin{aligned} \Sigma_2 = & \sum_{i \in A, j \in A} (\partial_i \partial_j f_A) e_i e_A e_j + \sum_{i \notin A, j \notin A} (\partial_i \partial_j f_A) e_i e_A e_j \\ & + \sum_{i \in A, j \notin A} (\partial_i \partial_j f_A) e_i e_A e_j + \sum_{i \notin A, j \in A} (\partial_i \partial_j f_A) e_i e_A e_j. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Bajo cualquiera de las condiciones ($i \in A, j \in A$) o ($i \notin A, j \notin A$) mediante un cálculo directo se obtiene $e_i e_A e_j = -e_j e_A e_i$. Además, se puede demostrar que $\partial_i \partial_j f_A = \partial_j \partial_i f_A$, lo cual implica que las dos primeras sumas en (2.2) son iguales 0. Luego, las dos sumas restantes en (2.2) son k-campos y con esto concluye la demostración. ■

El siguiente corolario que da un criterio de inframonogenicidad en términos de las partes k-vectoriales se deduce directamente del lema anterior.

Corolario 2.1.1 *Una función f es inframonogénica en $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ si y solo si cada una de sus k-partes $[f]_k$, $0 \leq k \leq m$, es inframonogénica en Ω.*

2.1.1. Relación con las funciones armónicas

La clase de funciones inframonogénicas no coincide con la clase de las funciones armónicas. Este hecho se manifiesta en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.1.1 *Sean $f, g : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}_{0,2m}$ definidas por $f := x^2 e_A$ y $g := x e_A x$, donde $|A| = m$.*
Un cálculo directo muestra que $\partial_{\underline{x}} f \partial_{\underline{x}} = 0$ y $\partial_{\underline{x}}^2 f = 4m\, e_A$, por tanto f es

inframonogénica y no armónica. Por otro lado, $\partial_{\underline{x}}^2 g = 0$ y $\partial_{\underline{x}} g \partial_{\underline{x}} = 4m\ e_A$, o cual muestra que g es armónica y no inframonogénica.

Ejemplo 2.1.2 *Sea $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_{0,m}$ monogénica a ambos lados, entonces las funciones $g(\underline{x}) = \underline{x}_i f(\underline{x})$, $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ son inframonogénicas y no armónicas. En efecto,*

$$\begin{aligned} \partial_{\underline{x}}(\underline{x}_i f(\underline{x})) &= \underline{x}_i \partial_{\underline{x}} f(\underline{x}) + e_i f(\underline{x}) = e_i f(\underline{x}) \\ \partial_{\underline{x}}(\underline{x}_i f(\underline{x}))\partial_{\underline{x}} &= e_i (f(\underline{x})\partial_{\underline{x}}) = 0, \end{aligned}$$

y por otro lado,

$$\partial_{\underline{x}}^2(\underline{x}_i f(\underline{x})) = \partial_{\underline{x}}(e_i f(\underline{x})).$$

Nótese que la expresión $\partial_{\underline{x}}(e_i f(\underline{x}))$ es en general distinta de cero.

Las funciones armónicas, incluso en el contexto del Análisis de Clifford verifican el siguiente principio del módulo máximo.

Proposición 2.1.1 *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_{0,m}$ una función armónica en un dominio de Jordan Ω y continua en $\overline{\Omega}$. Si f se anula en la frontera de Ω, entonces $f \equiv 0$ en Ω.*

Demostración. El hecho de que la función f se anula en la frontera de Ω, implica que cada una de sus componentes reales f_A también se anula. Por otro lado, se puede comprobar que las componentes reales de una función armónica son armónicas reales. Entonces, del principio del módulo máximo clásico se deduce que cada f_A se anula en Ω, por tanto f se anula en Ω. $\blacksquare$

Este hecho no es cierto en general para las funciones inframonogénicas: en efecto, si en el ejemplo 2.1.1 se toma la función $f + e_A$, esta obviamente se anula en la frontera de la bola unitaria y es inframonogénica en su interior, pero no es idénticamente igual a cero.

Otro ejemplo de función inframonogénica para la cual no se cumple el principio del módulo máximo es $f : E \to \mathbb{R}_{0,3}$, definida por

$$\underline{f}(\underline{x}) = (2\underline{x}_1^2 + \underline{x}_2^2 + \underline{x}_3^2 - 1)e_1,$$

donde E es el conjunto $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 : 2\underline{x}_1^2 + \underline{x}_2^2 + \underline{x}_3^2 \leq 1\}$. En efecto,

$$\partial_{\underline{x}} f(\underline{x}) = -4\underline{x}_1 + 2\underline{x}_2 e_2 e_1 + 2\underline{x}_3 e_3 e_1,$$

$$\begin{aligned} \partial_{\underline{x}} f(\underline{x}) \partial_{\underline{x}} &= -4e_1 + 2e_2 e_1 e_2 + 2e_3 e_1 e_3 \\ &= -4e_1 + 2e_1 + 2e_1 = 0. \end{aligned}$$

Es evidente que $\underline{f}$ se anula en el elipsoide $2\underline{x}_1^2 + \underline{x}_2^2 + \underline{x}_3^2 = 1$, por lo cual no alcanza el módulo máximo en la frontera del dominio.

2.2. Fórmula de Cauchy para funciones inframonogénicas

En esta sección se expone uno de los resultados fundamentales de esta tesis: la fórmula integral de Cauchy para funciones inframonogénicas. El hallazgo de esta fórmula está lejos de ser una simple generalización más de la fórmula de Cauchy clásica. El caso inframonogénico tiene características especiales que hacen necesaria la creación de un nuevo método para el planteamiento y demostración de una fórmula integral de Cauchy para las soluciones de la ecuación $\partial_{\underline{x}} f \partial_{\underline{x}} = 0$. Los resultados de esta sección se encuentran publicados en [20]. Un hecho importante sobre la forma que adoptó esta fórmula, es que a partir de ella fue posible definir una transformada de Cauchy que genera funciones inframonogénicas en el dominio interior a partir de funciones definidas en la frontera del dominio.

La idea general consistió en probar previamente una fórmula de tipo Borel-Pompeiu en términos del operador $\partial_{\underline{x}}(.)\partial_{\underline{x}}$, sin precedente en la literatura. En esta parte de la investigación tuvo lugar un proceso de introducción de notaciones para varios operadores de integrales sobre la superficie y sobre el dominio interior, que participan en la conformación de una transformada de Cauchy inframonogénica y una de Teodorescu asociada a esta.

A continuación se introducen los operadores integrales sobre la superficie, los cuales participan en la conformación de la transformada de Cauchy inframongénica obtenida

$$[\mathcal{C}^0_\Gamma \phi](\underline{x}) = \int_\Gamma E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})\phi(\underline{y})(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y})$$

$$[\mathcal{C}^1_\Gamma \phi](\underline{x}) = \sum_{i=1}^m e_i \int_\Gamma E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})\phi(\underline{y})dS(\underline{y})e_i$$

Por otro lado, los operadores integrales sobre el dominio que participan en la conformación de la transformada de Teodorescu asociada, son los siguientes

$$[\mathcal{T}^0_\Omega \varphi](\underline{x}) = -\int_\Omega E_0(\underline{y}-\underline{x})\varphi(\underline{y})(\underline{y}-\underline{x})dV(\underline{y})$$

$$[\mathcal{T}^1_\Omega \varphi](\underline{x}) = -\sum_{i=1}^m e_i \int_\Omega E_1(\underline{y}-\underline{x})\varphi(\underline{y})dV(\underline{y})e_i.$$

Finalmente, los dos operadores fundamentales, cuya naturaleza inframonogénica queda clara en las dos secciones siguientes, adoptan la siguiente forma

$$\mathcal{C}^{\textbf{infra}}_\Gamma \phi = \frac{1}{2}[\mathcal{C}^0_\Gamma \phi + \mathcal{C}^1_\Gamma \phi]$$

$$\mathcal{T}^{\textbf{infra}}_\Omega \varphi = \frac{1}{2}[\mathcal{T}^0_\Omega \varphi + \mathcal{T}^1_\Omega \varphi].$$

2.2.1. Fórmula de tipo Borel-Pompeiu

En esta sección se logra el primer paso hacia la obtención de una fórmula integral de Cauchy para las funciones inframonogénicas: probar una fórmula de tipo Borel-Pompeiu en términos del operador $\partial_{\underline{x}}(.)\partial_{\underline{x}}$.

Teorema 2.2.1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un dominio de Jordan con frontera suave Γ y sea $f \in C^2(\Omega \cup \Gamma)$. Entonces, se cumple que*

$$f(\underline{x}) = [\mathcal{C}^r_\Gamma f](\underline{x}) + [\mathcal{C}^{\textbf{infra}}_\Gamma f\partial_{\underline{x}}](\underline{x}) + [\mathcal{T}^{\textbf{infra}}_\Omega \partial_{\underline{x}} f \partial_{\underline{x}}](\underline{x}). \qquad (2.3)$$

Para la demostración de este resultado resulta ventajoso introducir un operador que se define en este trabajo de la siguiente forma:

$$\Psi(f) = \sum_{k=1}^{m} e_k\, f\, e_k,$$

donde f es una función con valores en $\mathbb{R}_{0,m}$.

Este operador permite expresar las siguientes propiedades fundamentales, las cuales resultan vitales para la demostración de los resultados de toda la tesis.

Lema 2.2.1 *Sean $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}_{0,m}$ y $F_k : \Omega \mapsto \mathbb{R}_{0,m}^{(k)}$, donde Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^m$. Entonces,*

(1) $\partial_{\underline{x}}(f\, \underline{x}) = (\partial_{\underline{x}} f)\underline{x} + \Psi(f),\ (\underline{x}\, f)\partial_{\underline{x}} = \underline{x}(f\partial_{\underline{x}}) + \Psi(f)$

(2) $\partial_{\underline{x}}(\Psi(f)) = -2f\partial_{\underline{x}} - \Psi(\partial_{\underline{x}} f),\ (\Psi(f))\partial_{\underline{x}} = -2\partial_{\underline{x}} f - \Psi(f\partial_{\underline{x}})$

(3) $\partial_{\underline{x}}^2(f(\underline{x})\underline{x}) = (\partial_{\underline{x}}^2 f(\underline{x}))\underline{x} - 2f(\underline{x})\partial_{\underline{x}}$.

(4) $\partial_{\underline{x}}(\Psi(f))\partial_{\underline{x}} = \Psi(\partial_{\underline{x}}\, f\, \partial_{\underline{x}}),\ \partial_{\underline{x}}^2(\Psi(f)) = \Psi(\partial_{\underline{x}}^2\, f)$.

(5) $\Psi(F_k) = (-1)^{k+1}(m-2k)F_k$.

(6) Si $\underline{g}$ es una función vectorial, entonces

$$\underline{g}(\underline{x})\Psi(f(\underline{x})) = -\Psi(\underline{g}(\underline{x})f(\underline{x}))) - 2f(\underline{x})\underline{g}(\underline{x})$$

Demostración.
Demostración de (1).

$$\begin{aligned}\partial_{\underline{x}}(f\, \underline{x}) &= \sum_{k=1}^{m} e_k \partial_{x_k}(f\, \underline{x}) = \sum_{k=1}^{m} e_k[(\partial_{x_k} f)\, \underline{x} + f e_k] = \\ &= (\sum_{k=1}^{m} e_k \partial_{x_k} f)\underline{x} + \sum_{k=1}^{m} e_k f e_k = (\partial_{\underline{x}} f)\underline{x} + \Psi(f).\end{aligned}$$

Demostración de (2).

$$\partial_{\underline{x}}(\Psi(f)) = \partial_{\underline{x}}(\sum_{j=1}^{m} e_j f e_j) = \sum_{1\leq j,k\leq m} e_k e_j(\partial_{x_k} f)e_j =$$

$$= \sum_{\substack{k=j\\1\leq j,k\leq m}} e_k e_j(\partial_{x_k} f)e_j + \sum_{\substack{k\neq j\\1\leq j,k\leq m}} e_k e_j(\partial_{x_k} f)e_j =$$

$$= -\sum_{j=1}^{m}(\partial_{x_j} f)e_j - \sum_{\substack{k\neq j\\1\leq j,k\leq m}} e_j e_k(\partial_{x_k} f)e_j =$$

$$= -\sum_{j=1}^{m}(\partial_{x_j} f)e_j - \big(\sum_{1\leq j,k\leq m} e_j e_k(\partial_{x_k} f)e_j - \sum_{\substack{k=j\\1\leq j,k\leq m}} e_j e_k(\partial_{x_k} f)e_j\big) =$$

$$= -2\sum_{j=1}^{m}(\partial_{x_j} f)e_j - \sum_{1\leq j,k\leq m} e_j e_k(\partial_{x_k} f)e_j = -2f\partial_{\underline{x}} - \Psi(\partial_{\underline{x}} f).$$

Demostración de (3). Se tiene que

$$\partial_{\underline{x}}^2(f(\underline{x})\underline{x}) = \partial_{\underline{x}}\partial_{\underline{x}}(f(\underline{x})\underline{x}) = (\partial_{\underline{x}}^2 f(\underline{x}))\underline{x} + \Psi(\partial_{\underline{x}} f(\underline{x})) -$$
$$-\Psi(\partial_{\underline{x}} f(\underline{x})) - 2f(\underline{x})\partial_{\underline{x}} = (\partial_{\underline{x}}^2 f(\underline{x}))\underline{x} - 2f(\underline{x})\partial_{\underline{x}}.$$

Demostración de (4). Por (1) y (2) se tiene que

$$\partial_{\underline{x}}(\Psi(f))\partial_{\underline{x}} = -2\partial_{\underline{x}}^2 f - \partial_{\underline{x}}[\Psi(f\partial_{\underline{x}})] =$$
$$= -2\partial_{\underline{x}}^2 f + 2\partial_{\underline{x}}^2 f + \Psi(\partial_{\underline{x}}\, f\, \partial_{\underline{x}}) = \Psi(\partial_{\underline{x}}\, f\, \partial_{\underline{x}}).$$

Se puede demostrar que $\partial_{\underline{x}}^2(\Psi(f)) = \Psi(\partial_{\underline{x}}^2 f)$, ya que $\partial_{\underline{x}}^2$ es un operador real.
Demostración de (5). La demostración aparece explícitamente en [19, Proposición 3].
Demostración de (6). Para probar (6) se hace uso de la identidad $\underline{g}e_k =$

$-e_k\underline{g} - 2\underline{g}_k$ de donde se obtiene

$$\begin{aligned} \underline{g}\Psi(f) &= \sum_{k=1}^{m}(-e_k\underline{g} - 2\underline{g}_k)fe_k = \\ &= -\sum_{k=1}^{m} e_k\underline{g}fe_k - 2\sum_{k=1}^{m}\underline{g}_k fe_k = \\ &= -\Psi(\underline{g}f) - 2f\underline{g}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

El siguiente resultado revela una propiedad que se usa en varios pasos de la demostración del resultado principal de esta sección.

Corolario 2.2.1 *Sea $f \in C^2(\Omega)$, entonces*

$$\partial_{\underline{y}}[(f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})(\underline{y} - \underline{x})] = (\partial_{\underline{y}} f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})(\underline{y} - \underline{x}) + \Psi[(f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})].$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \partial_{\underline{y}}[(f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})(\underline{y} - \underline{x})] &= \sum_{i=1}^{m} e_i\partial_i[(f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})(\underline{y} - \underline{x})] \\ = \sum_{i=1}^{m} e_i[(\partial_i f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})(\underline{y} - \underline{x}) &+ f(\underline{y})\partial_{\underline{y}}(\partial_i(\underline{y} - \underline{x}))] \\ = (\partial_{\underline{y}} f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})(\underline{y} - \underline{x}) &+ \sum_{i=1}^{n} e_i[f(\underline{y})\partial_{\underline{y}}]e_i. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

De igual forma, una identidad de la cual se hace uso en las demostraciones de esta tesis es la siguiente.

Lema 2.2.2 *Para $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$, $\underline{y} \in \mathbb{R}^m$ con $\underline{x} \neq \underline{y}$ se cumple la identidad*

$$[E_0(\underline{y} - \underline{x})]e_i = -e_i[E_0(\underline{y} - \underline{x})] + 2Sc[E_0(\underline{y} - \underline{x})e_i].$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \partial_{\underline{y}}[(f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})(\underline{y} - \underline{x})] &= \sum_{i=1}^{m} e_i\partial_i[(f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})(\underline{y} - \underline{x})] \\ = \sum_{i=1}^{m} e_i[(\partial_i f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})(\underline{y} - \underline{x}) &+ f(\underline{y})\partial_{\underline{y}}(\partial_i(\underline{y} - \underline{x}))] \end{aligned}$$

$$= (\partial_{\underline{y}} f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})(\underline{y} - \underline{x}) + \sum_{i=1}^{n} e_i[f(\underline{y})\partial_{\underline{y}}]e_i. \quad \blacksquare$$

Hasta aquí ya se cuenta con todos los elementos necesarios para demostrar la fórmula de Borel-Pompeiu (2.3) del Teorema 2.2.1.

Demostración del Teorema 2.2.1.

Sea $\underline{x} \in \Omega$, elíjase $\epsilon > 0$ tal que $\overline{B}(\underline{x}, \epsilon) := \{\underline{y} \in \mathbb{R}^m : |\underline{y} - \underline{x}| \leq \epsilon\} \subset \Omega$ y denótese $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \overline{B}(\underline{x}, \epsilon)$. Sean además

$$I^\epsilon = \int_{\Omega_\epsilon} E_0(\underline{y} - \underline{x})\partial_{\underline{y}}[(f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})(\underline{y} - \underline{x})]dV(\underline{y})$$

$$J^\epsilon = \int_{\Omega_\epsilon} [E_0(\underline{y} - \underline{x})]\Psi[[(f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})]dV(\underline{y}).$$

De acuerdo con la fórmula (1.6) y la monogenicidad de $E_0(\underline{y} - \underline{x})$ se obtiene

$$I^\epsilon = \int_{\partial\Omega_\epsilon} E_0(\underline{y} - \underline{x})\underline{n}(\underline{y})(f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})(\underline{y} - \underline{x})dS(\underline{y}). \tag{2.4}$$

Si se hace uso del Lema 2.2.1 y del Lema 2.2.2 se tiene

$$\begin{aligned} J^\epsilon = \int_{\Omega_\epsilon} \sum_{i=1}^{m} \{&-e_i[E_0(\underline{y} - \underline{x})](f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})e_i + \\ &+2Sc[E_0(\underline{y} - \underline{x})e_i](f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})e_i\}dV(\underline{y}) = \\ = -\Psi\{&\int_{\Omega_\epsilon} [E_0(\underline{y} - \underline{x})](f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})dV(\underline{y})]\} - \\ &-2\int_{\Omega_\epsilon} (f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})E_0(\underline{y} - \underline{x})dV(\underline{y}). \end{aligned}$$

Si se aplica nuevamente la fórmula de Stokes (1.6), resulta

$$\int_{\Omega_\epsilon} E_1(\underline{y}-\underline{x})(\partial_{\underline{y}} f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})dV(\underline{y}) + \int_{\Omega_\epsilon} E_0(\underline{y}-\underline{x})(f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})dV(\underline{y}) =$$

$$= \int_{\partial\Omega_\epsilon} E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(y)(f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})dS(\underline{y}).$$

Así,

$$J^\epsilon = \Psi[\int_{\Omega_\epsilon} E_1(\underline{y}-\underline{x})(\partial_{\underline{y}} f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})dV(\underline{y})] -$$

$$-\Psi[\int_{\partial\Omega_\epsilon} E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})(f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})dS(\underline{y})] - 2\int_{\Omega_\epsilon}(f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})E_0(\underline{y}-\underline{x})dV(\underline{y}). \quad (2.5)$$

Además, por el Corolario 2.2.1

$$I^\epsilon - J^\epsilon = \int_{\Omega_\epsilon} E_0(\underline{y}-\underline{x})(\partial_{\underline{y}} f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})(\underline{y}-\underline{x})dV(\underline{y}),$$

Entonces

$$\int_{\Omega_\epsilon} E_0(\underline{y}-\underline{x})(\partial_{\underline{y}} f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})(\underline{y}-\underline{x})dV(\underline{y}) =$$

$$= \int_{\Omega_\epsilon} E_0(\underline{y}-\underline{x})\partial_{\underline{y}}[(f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})(\underline{y}-\underline{x})]dV(\underline{y})$$

$$+\Psi[\int_{\partial\Omega_\epsilon} E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})(f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})dS(\underline{y})]$$

$$-\Psi[\int_{\Omega_\epsilon} E_1(\underline{y}-\underline{x})(\partial_{\underline{y}} f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})dV(\underline{y})]$$

$$+2\int_{\Omega_\epsilon}(f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})E_0(\underline{y}-\underline{x})dV(\underline{y}),$$

y por (2.4) se obtiene

$$\int_{\Omega_\epsilon} E_0(\underline{y}-\underline{x})(\partial_{\underline{y}} f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})(\underline{y}-\underline{x})dV(\underline{y}) = \int_{\partial\Omega_\epsilon} E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})(f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y})$$

$$+\Psi[\int_{\partial\Omega_\epsilon} E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})(f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})dS(\underline{y})] - \Psi[\int_{\Omega_\epsilon} E_1(\underline{y}-\underline{x})(\partial_{\underline{y}} f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})dV(\underline{y})]$$

$$+2\int_{\Omega_\epsilon} (f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})E_0(\underline{y}-\underline{x})dV(\underline{y}). \tag{2.6}$$

Las integrales de superficie en (2.6) se descomponen de la siguiente forma

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon} = \int_{\Gamma} - \int_{\partial\overline{B}(\underline{x},\epsilon)} .$$

Estimaciones estándares conllevan a

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\partial\overline{B}(\underline{x},\epsilon)} E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})(f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y}) = 0,$$

y

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\partial\overline{B}(\underline{x},\epsilon)} E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})(f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})dS(\underline{y}) = 0.$$

Como consecuencia,

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\partial\Omega_\epsilon} E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})(f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y}) =$$

$$= \int_{\Gamma} E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})(f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y}),$$

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\partial\Omega_\epsilon} E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})(f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})dS(\underline{y}) =$$

$$= \int_{\Gamma} E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})(f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})dS(\underline{y}).$$

Por otro lado, la integrabilidad de las funciones que aparecen en (2.6) hacen legítimo el paso al límite $\epsilon \to 0$, lo cual muestra que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{\Omega_\epsilon} = \int\limits_{\Omega} .$$

Después de tomar $\epsilon \to 0$ en (2.6), se tiene

$$\int\limits_{\Omega} E_0(\underline{y}-\underline{x})(\partial_{\underline{y}} f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})(\underline{y}-\underline{x})dV(\underline{y}) = \int\limits_{\Gamma} E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})(f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y})$$

$$+\Psi[\int\limits_{\Gamma} E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})(f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})dS(\underline{y})]$$

$$-\Psi[\int\limits_{\Omega} E_1(\underline{y}-\underline{x})(\partial_{\underline{y}} f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})dV(\underline{y})] - 2\mathcal{T}_\Omega^r(f\partial_{\underline{x}})(\underline{x}).] \tag{2.7}$$

Si se hace uso de la versión lateral derecha de la fórmula de Borel-Pompeiu (1.3.3), se tiene

$$-2\mathcal{T}_\Omega^r(f\partial_{\underline{x}})(\underline{x}) = -2f(\underline{x}) + 2\mathcal{C}_\Gamma^r f(\underline{x}).$$

Ahora, el Teorema (2.2.1) se obtiene directamente de (2.7). ■

2.2.2. Fórmula de Cauchy para funciones inframonogénicas

De la fórmula demostrada en la sección anterior, se deduce en esta sección otro de los aportes fundamentales de este capítulo, que es la fórmula integral de Cauchy para las funciones inframonogénicas.

Teorema 2.2.2 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un dominio de Jordan con frontera suave Γ y sea $f \in C^2(\Omega \cup \Gamma)$. Si f es además inframonogénica en Ω, entonces:*

$$f(\underline{x}) = [\mathcal{C}_\Gamma^r f](\underline{x}) + [\mathcal{C}_\Gamma^{\mathbf{infra}} f\partial_{\underline{x}}](\underline{x}). \tag{2.8}$$

Más explícitamente,

$$f(\underline{x}) = \int\limits_{\Gamma} f(\underline{y})\underline{n}(\underline{y})E_0(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y}) +$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma} E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})(f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y}) +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} e_i \int\limits_{\Gamma} E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})(f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})dS(\underline{y})e_i. \qquad (2.9)$$

Observación 2.2.1

1. *Nótese que* $[\mathcal{C}_{\Gamma}^{\mathbf{infra}} f\partial_{\underline{x}}](\underline{x})$ *en el Teorema 2.2.2 expresa la diferencia entre las funciones monogénicas a la derecha y las inframonogénicas.*

2. *De forma análoga, se obtienen versiones del Teorema 2.2.1 y del Teorema 2.2.2 en términos de la transformada de Cauchy lateral izquierda* $\mathcal{C}_{\Gamma}^{l}$. *Para ver esto, es suficiente permutar* ϕ *y* $\underline{n}$ *tanto en* $\mathcal{C}_{\Gamma}^{0}$ *como en* $\mathcal{C}_{\Gamma}^{1}$, *y los operadores asociados*

$$[\mathcal{K}_{\Gamma}^{0}\phi](\underline{x}) = \int\limits_{\Gamma} E_0(\underline{y}-\underline{x})\phi(\underline{y})\underline{n}(\underline{y})(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y}),$$

$$[\mathcal{K}_{\Gamma}^{1}\phi](\underline{x}) = \sum_{i=1}^{m} e_i \int\limits_{\Gamma} E_1(\underline{y}-\underline{x})\phi(\underline{y})\underline{n}(\underline{y})dS(\underline{y})e_i,$$

y

$$\mathcal{K}_{\Gamma}^{\mathbf{infra}}\phi = \frac{1}{2}[\mathcal{K}_{\Gamma}^{0}\phi + \mathcal{K}_{\Gamma}^{1}\phi].$$

Las fórmulas correspondientes son

$$f(\underline{x}) = [\mathcal{C}_{\Gamma}^{l} f](\underline{x}) + [\mathcal{K}_{\Gamma}^{\mathbf{infra}}\partial_{\underline{x}} f](\underline{x}) + [\mathcal{T}_{\Omega}^{\mathbf{infra}}\partial_{\underline{x}} f\partial_{\underline{x}}](\underline{x}),$$

y

$$f(\underline{x}) = [\mathcal{C}_{\Gamma}^{l} f](\underline{x}) + [\mathcal{K}_{\Gamma}^{\mathbf{infra}}\partial_{\underline{x}} f](\underline{x})$$

cuando f *es inframonogénica en* Ω.

2.3. La transformada de Cauchy inframonogénica y la de Teodorescu asociada. Propiedades

La teoría de las funciones inframonogénicas no estaría completa si no incluyera la definición de una transformada de Cauchy inframonogénica y una transformada de Teodorescu asociada a esta, así como el estudio de las propiedades básicas fundamentales de ambas. Ese objetivo se logra en esta sección.

Una vez demostrada una fórmula de tipo Cauchy para funciones inframonogénicas, otro de los aportes de este capítulo que da más valor y aplicabilidad a la representación integral hallada, es la definición de una transformada de Cauchy inframonogénica.

Definición 2.3.1 *Sea $f \in C^1(\Gamma)$, Γ superficie suave en $\mathbb{R}^m$ la cual es frontera de un dominio de Jordan. Se define:* $\mathcal{C}_\Gamma^{\mathbf{infra}} f(\underline{x}) = \frac{1}{2}[\mathcal{C}_\Gamma^0 f + \mathcal{C}_\Gamma^1 f]$, $f \in C(\Gamma)$.

La estructura formal de $\mathcal{C}_\Gamma^{\mathbf{infra}}$ motiva la interesante cuestión de cuándo una función F definida en $\mathbb{R}^m \setminus \Gamma$ por

$$F(\underline{x}) = \mathcal{C}_\Gamma^{\mathbf{infra}} f(\underline{x}), \ f \in C^1(\Gamma),$$

es inframonogénica. Una respuesta positiva la da el siguiente teorema

Teorema 2.3.1 *Sea Γ una superficie suave en $\mathbb{R}^m$ la cual es frontera de un dominio de Jordan y supóngase que $f \in C^1(\Gamma)$. Entonces*

$$[\mathcal{C}_\Gamma^{\mathbf{infra}} f(\underline{x})]\partial_{\underline{x}} = \mathcal{C}_\Gamma^l f(\underline{x}), \ \underline{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \Gamma. \tag{2.10}$$

En particular, $\mathcal{C}_\Gamma^{\mathbf{infra}} f$ es inframonogénica en $\mathbb{R}^m \setminus \Gamma$.

Antes de pasar a la demostración de este teorema, es necesario enunciar el siguiente lema auxiliar, el cual es consecuencia del Lema 2.2.1 y de la monogenicidad de $E_0(\underline{y} - \underline{x})$ para $\underline{y} \neq \underline{x}$.

Lema 2.3.1 *Para* $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$*,* $\underline{y} \in \mathbb{R}^m$ *con* $\underline{x} \neq \underline{y}$ *se cumplen las siguientes identidades:*

(1) $[\underline{x}\, B\, E_0(\underline{y}-\underline{x})]\partial_{\underline{x}} = \sum_{i=1}^{m} e_i B\, E_0(\underline{y}-\underline{x})e_i$

(2) $[\sum_{i=1}^{m} e_i E_1(\underline{y}-\underline{x})\, B\, e_i]\partial_{\underline{x}} = 2E_0(\underline{y}-\underline{x})B + \sum_{i=1}^{m} e_i\, B\, E_0(\underline{y}-\underline{x})e_i,$

donde B *es una constante con respecto a* $\underline{x}$*.*

Ahora se procede a la demostración del Teorema 2.3.1.

Demostración del Teorema 2.3.1.

Obsérvese que

$$\int_{\Gamma} E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})f(\underline{y})(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y}) = \int_{\Gamma} (\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})f(\underline{y})E_0(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y}).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
[\mathcal{C}_\Gamma^0 f(\underline{x})]\partial_{\underline{x}} &= [\int_{\Gamma} (\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})f(\underline{y})E_0(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y})]\partial_{\underline{x}} = \\
&= \int_{\Gamma} \underline{y}\,\underline{n}(\underline{y})f(\underline{y})[E_0(\underline{y}-\underline{x})]\partial_{\underline{x}} dS(\underline{y}) - \\
&-[\int_{\Gamma} \underline{x}\,\underline{n}(\underline{y})f(\underline{y})E_0(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y})]\partial_{\underline{x}} = \\
&= -\int_{\Gamma} [\underline{x}\,\underline{n}(\underline{y})f(\underline{y})E_0(\underline{y}-\underline{x})]\partial_{\underline{x}} dS(\underline{y}).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Si se aplica la parte (1) del Lema 2.3.1 al último término en (2.11) se obtiene:

$$[\mathcal{C}_\Gamma^0 f(\underline{x})]\partial_{\underline{x}} = -\sum_{i=1}^{m} e_i \int_{\Gamma} \underline{n}(\underline{y})f(\underline{y})E_0(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y})e_i. \tag{2.12}$$

Ahora se calcula $[\mathcal{C}_\Gamma^1 f(\underline{x})]\partial_{\underline{x}}$. Se tiene que

$$[\mathcal{C}_\Gamma^1 f(\underline{x})]\partial_{\underline{x}} = [\sum_{i=1}^m e_i \int_\Gamma E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})f(\underline{y})dS(\underline{y})e_i]\partial_{\underline{x}} =$$
$$\sum_{i=1}^m \int_\Gamma [e_i\, E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})f(\underline{y})e_i]\partial_{\underline{x}} dS(\underline{y}).$$

Si se hace uso de la parte (2) del Lema 2.3.1 en la expresión bajo el signo de integral se tiene

$$[\mathcal{C}_\Gamma^1 f(\underline{x})]\partial_{\underline{x}} = 2\int_\Gamma E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})f(\underline{y})dS(\underline{y}) + \tag{2.13}$$
$$+\sum_{i=1}^m e_i \int_\Gamma \underline{n}(\underline{y})f(\underline{y})\, E_0(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y})e_i. \tag{2.14}$$

De (2.12) y (2.13) se obtiene finalmente

$$[\mathcal{C}_\Gamma^{\mathbf{infra}} f(\underline{x})]\partial_{\underline{x}} = \frac{1}{2}\{[\mathcal{C}_\Gamma^0 f(\underline{x})]\partial_{\underline{x}} + [\mathcal{C}_\Gamma^1 f(\underline{x})]\partial_{\underline{x}}\} = \mathcal{C}_\Gamma^l f(\underline{x}).$$

La inframonogenicidad de $\mathcal{C}_\Gamma^{\mathbf{infra}} f$ es una consecuencia del hecho que $\mathcal{C}_\Gamma^l f$ es monogénica a la izquierda. ■

Si se tiene presente la estructura similar de $\mathcal{C}_\Gamma^{\mathbf{infra}} f$ y $\mathcal{T}_\Omega^{\mathbf{infra}} f$, un cálculo análogo permite obtener

$$[\mathcal{T}_\Omega^{\mathbf{infra}} f(\underline{x})]\partial_{\underline{x}} = \mathcal{T}_\Omega^l f(\underline{x}), \text{ en } \mathbb{R}^m \setminus \{\Omega \cup \Gamma\}, \tag{2.15}$$

el cual, junto a la monogenicidad de $\mathcal{T}_\Omega^l f$, en $\mathbb{R}^m \setminus \{\Omega\cup\Gamma\}$ implica que $\mathcal{T}_\Omega^{\mathbf{infra}} f$ es inframonogénica en $\mathbb{R}^m \setminus \{\Omega \cup \Gamma\}$.

Las propiedades de la transformada de Cauchy inframonogénica están estrechamente relacionadas con las de la siguiente transformada de tipo Teodorescu que se define en este trabajo

$$\mathcal{T}_\Omega^{\mathbf{infra}} \varphi = \frac{1}{2}[\mathcal{T}_\Omega^0 \varphi + \mathcal{T}_\Omega^1 \varphi]$$

Como se muestra en el siguiente resultado de la tesis, esta transformada constituye un operador inverso del operador $\partial_{\underline{x}}(.)\partial_{\underline{x}}$.

Teorema 2.3.2 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un dominio de Jordan con frontera suave y $f \in C^1(\Omega)$. Se cumple la siguiente identidad:*

$$\partial_{\underline{x}}[\mathcal{T}_{\Omega}^{\mathbf{infra}} f(\underline{x})]\partial_{\underline{x}} = f(\underline{x}), \ \textit{en } \Omega.$$

Demostración. A partir de la identidad $E_2(\underline{x}) = -\frac{1}{2}E_1(\underline{x})\underline{x}$ se deduce que

$$\int_{\Omega} E_2(\underline{y}-\underline{x})f(\underline{y})dV(\underline{y}) = \int_{\Omega} -\frac{1}{2}E_1(\underline{y}-\underline{x})(\underline{y}-\underline{x})f(\underline{y})dV(\underline{y}) =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{\Omega}(\underline{y}-\underline{x})f(\underline{y})E_1(\underline{y}-\underline{x})dV(\underline{y}).$$

Así,

$$[\int_{\Omega} E_2(\underline{y}-\underline{x})f(\underline{y})dV(y)]\partial_{\underline{x}} = -\frac{1}{2}[\int_{\Omega}(\underline{y}-\underline{x})f(\underline{y})E_1(\underline{y}-\underline{x})dV(\underline{y})]\partial_{\underline{x}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Omega}(\underline{y}-\underline{x})f(\underline{y})E_0(\underline{y}-\underline{x}) + \Psi(f(\underline{y})E_1(\underline{y}-\underline{x}))dV(\underline{y}) =$$

$$= -\mathcal{T}_{\Omega}^{\mathbf{infra}} f(\underline{x}).$$

Se puede verificar que

$$\partial_{\underline{x}}^3(-\int_{\Omega} E_2(\underline{y}-\underline{x})f(\underline{y})dV(y)) = -\partial_{\underline{x}}(\delta(\underline{y}-\underline{x})f(\underline{y})dV(\underline{y})) = f(\underline{x}).$$

Pero

$$\partial_{\underline{x}}^3[-\int_{\Omega} E_2(\underline{y}-\underline{x})f(\underline{y})dV(y)] =$$

$$= -\partial_{\underline{x}}[\int_{\Omega} E_2(\underline{y}-\underline{x})f(\underline{y})dV(y)]\partial_{\underline{x}}^2 = \partial_{\underline{x}}\mathcal{T}_{\Omega}^{\mathbf{infra}} f(\underline{x})\partial_{\underline{x}}.$$

Por tanto,

$$\partial_{\underline{x}} \mathcal{T}_{\Omega}^{\mathbf{infra}} f(\underline{x}) \partial_{\underline{x}} = f(\underline{x}). \quad \blacksquare$$

Para el caso de campos vectoriales, se obtiene el siguiente lema el cual tiene una aplicación importante a la teoría de la elasticidad (ver Capítulo 3).

Lema 2.3.2 *Sea $\underline{f} \in C(\Omega)$ un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$, entonces la transformada de Teodorescu $\mathcal{T}_{\Omega}^{\mathbf{infra}} \underline{f}$ se puede reescribir de la forma*

$$\mathcal{T}_{\Omega}^{\mathbf{infra}} \underline{f}(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega} \frac{(\underline{y}-\underline{x})[(\underline{y}-\underline{x}) \bullet \underline{f}]}{|\underline{y}-\underline{x}|^3} dV(\underline{y}).$$

Demostración. Nótese que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega} \frac{(\underline{y}-\underline{x})(\underline{y}-\underline{x}) \bullet \underline{f}(\underline{y})}{|\underline{y}-\underline{x}|^3} dV(\underline{y}) &= \\
= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega} \frac{1}{2} \cdot \frac{(\underline{y}-\underline{x})[(\underline{y}-\underline{x})\underline{f}(\underline{y}) + \underline{f}(\underline{y})(\underline{y}-\underline{x})]}{|\underline{y}-\underline{x}|^3} dV(\underline{y}) &= \\
= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega} (-\frac{1}{2|\underline{y}-\underline{x}|} \underline{f}(\underline{y}) + \frac{(\underline{y}-\underline{x})\underline{f}(\underline{y})(\underline{y}-\underline{x})}{2|\underline{y}-\underline{x}|^3}) dV(\underline{y}) &= \\
= -\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{f}(\underline{y})(\underline{y}-\underline{x}) dV(\underline{y}) - \frac{1}{2} \Psi(\int\limits_{\Omega} E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{f}(\underline{y}) dV(\underline{y})) &= \\
= \mathcal{T}_{\Omega}^{\mathbf{infra}} \underline{f}(\underline{x}). \quad \blacksquare &
\end{aligned}$$

2.4. Funciones infrapolimonogénicas

En esta sección se demuestra una fórmula de Cauchy para las funciones infrapolimonogénicas, que constituye una generalización no trivial de la demostrada para las funciones inframonogénicas. Los resultados fundamentales de esta sección se encuentran en un artículo enviado a publicar [21].

2.4.1. Definición y propiedades

Considérese el sistema

$$\partial_{\underline{x}}^p f \partial_{\underline{x}}^q = 0,$$

donde p y q son enteros positivos.

Nótese que si p o q es par, el espacio de las soluciones de este sistema es exactamente el de las funciones $(p+q)$-monogénicas por la derecha y por la izquierda respectivamente, los cuales han sido abordados en la literatura [26]. Para p y q impares, mayores que 1, el sistema se convierte en $\partial_{\underline{x}}^{2k-1} f \partial_{\underline{x}} = 0$ o $\partial_{\underline{x}} f \partial_{\underline{x}}^{2k-1} = 0$.

No es difícil ver que estos dos últimos sistemas son equivalentes, así salvo que se diga lo contrario se considerará el primero.

Las soluciones de este sistema de ecuaciones en el presente trabajo se denominan funciones *infrapolimonogénicas*.

Los lemas que se prueban a continuación son muy útiles en lo que sigue.

Lema 2.4.1 *Para $k \geq 1$ se cumplen las identidades siguientes.*

$$\partial_{\underline{x}}^{2k-1}(f(\underline{x})\underline{x}) = (\partial_{\underline{x}}^{2k-1} f(\underline{x}))\underline{x} + \Psi(\partial_{\underline{x}}^{2k-2} f(\underline{x})) - (2k-2)\partial_{\underline{x}} f(\underline{x})\partial_{\underline{x}}^{2k-3}. \quad (2.16)$$

$$(\underline{x} f(\underline{x}))\partial_{\underline{x}}^{2k-1} = \underline{x}(f(\underline{x})\partial_{\underline{x}}^{2k-1}) + \Psi(\partial_{\underline{x}}^{2k-2} f(\underline{x})) - (2k-2)\partial_{\underline{x}} f(\underline{x})\partial_{\underline{x}}^{2k-3}. \quad (2.17)$$

Demostración. La demostración se realiza por inducción sobre k. El caso $k=1$ se deduce directamente del Lema 2.2.1(3). Además

$$\begin{aligned} \partial_{\underline{x}}^{2k+1}(f(\underline{x})\underline{x}) = \partial_{\underline{x}}^{2}\partial_{\underline{x}}^{2k-1}(f(\underline{x})\underline{x}) = \\ = \partial_{\underline{x}}^{2}[(\partial_{\underline{x}}^{2k-1} f(\underline{x}))\underline{x} + \Psi(\partial_{\underline{x}}^{2k-2} f(\underline{x})) - (2k-2)\partial_{\underline{x}} f(\underline{x})\partial_{\underline{x}}^{2k-3}] = \\ +\Psi(\partial_{\underline{x}}^{2k} f(\underline{x})) - (2k-2)\partial_{\underline{x}} f(\underline{x})\partial_{\underline{x}}^{2k-1} = \\ = (\partial_{\underline{x}}^{2k+1} f(\underline{x}))\underline{x} + \Psi(\partial_{\underline{x}}^{2k} f(\underline{x})) + 2k\partial_{\underline{x}} f \partial_{\underline{x}}^{2k-1}. \end{aligned}$$

La demostración de 2.17 es completamente análoga. ■

Lema 2.4.2 *Se cumplen las siguientes identidades:*

$$\partial_{\underline{x}}^{2k}(f(\underline{x})\underline{x}) = (\partial_{\underline{x}}^{2k} f(\underline{x}))\underline{x} - 2k f(\underline{x})\partial_{\underline{x}}^{2k-1} \quad (2.18)$$

$$(\underline{x} f(\underline{x}))\partial_{\underline{x}}^{2k} = \underline{x}(f(\underline{x})\partial_{\underline{x}}^{2k}) - 2k\partial_{\underline{x}}^{2k-1} f(\underline{x}) \quad (2.19)$$

Demostración. El caso $k=1$ fue probado en el Lema 2.2.1. Si se usa un razonamiento inductivo, nótese que

$$\begin{aligned}
\partial_{\underline{x}}^{2(k+1)}(f(\underline{x})\underline{x}) = \partial_{\underline{x}}^{2}(\partial_{\underline{x}}^{2k})(f(\underline{x})\underline{x}) =\\
= \partial_{\underline{x}}^{2}[\partial_{\underline{x}}^{2k} f(\underline{x})\underline{x} - 2kf(\underline{x})\partial_{\underline{x}}^{2k-1}] =\\
= (\partial_{\underline{x}}^{2(k+1)} f(\underline{x})\underline{x}) - 2f(\underline{x})\partial_{\underline{x}}^{2k+1} - 2kf(\underline{x})\partial_{\underline{x}}^{2k+1} =\\
= (\partial_{\underline{x}}^{2(k+1)} f(\underline{x})\underline{x}) - 2(k+1)f(\underline{x})\partial_{\underline{x}}^{2(k+1)-1}.
\end{aligned}$$

Con esto queda probada la primera identidad. La segunda se prueba de forma completamente análoga. ■

Lema 2.4.3 *Se cumplen las siguientes identidades:*

$$\partial_{\underline{x}}^{2k-1}(\Psi(f)) = -2f\partial_{\underline{x}}^{2k-1} - \Psi(\partial_{\underline{x}}^{2k-1} f) \tag{2.20}$$

$$(\Psi(f))\partial_{\underline{x}}^{2k-1} = -2\partial_{\underline{x}}^{2k-1} f - \Psi(f\partial_{\underline{x}}^{2k-1}) \tag{2.21}$$

Demostración. La demostración de la identidad 2.20 es directa.

$$\begin{aligned}
\partial_{\underline{x}}^{2k-1}(\Psi(f)) = -2f\partial_{\underline{x}}^{2k-1} - \Psi(\partial_{\underline{x}}^{2k-1} f) =\\
= \partial_{\underline{x}}[\partial_{\underline{x}}^{2k-2}\Psi(f)]
\end{aligned}$$

Como $\partial_{\underline{x}}^{2k-2}$ es un operador real y si se usa el Corolario 2.1.1 (1), se tiene que

$$\begin{aligned}
\partial_{\underline{x}}^{2k-1}(\Psi(f)) = -\Psi(\partial_{\underline{x}}^{2k-1} f) - 2\partial_{\underline{x}}^{2k-2} f\partial_{\underline{x}} =\\
= -\Psi(\partial_{\underline{x}}^{2k-1} f) - 2f\partial_{\underline{x}}^{2k-1}.
\end{aligned}$$

La identidad 2.21 se demuestra de forma análoga. ■

Corolario 2.4.1 *Sea f una función (2k-1)-monogénica bilateral, entonces la función $g(\underline{x}) = f(\underline{x})\underline{x}$ es infra-(2k-1)-monogénica.*

Demostración. Es una consecuencia directa del Lema 2.4.1 (ver identidades (2.16) y (2.17)). En efecto,

$$\partial_{\underline{x}}^{2k-1}(g) = \partial_{\underline{x}}^{2k-1}(f(\underline{x})\underline{x}) = \Psi(\partial_{\underline{x}}^{2k-2} f(\underline{x})) - (2k-2)\partial_{\underline{x}} f(\underline{x})\partial_{\underline{x}}^{2k-3}$$

$$\partial_{\underline{x}}^{2k-1}(g)\partial_{\underline{x}} = (\Psi(\partial_{\underline{x}}^{2k-2}f(\underline{x})))\partial_{\underline{x}} = 0$$

donde se ha usado en el último paso la identidad 2.21 del Lema 2.4.3. ■

2.4.2. Fórmula de tipo Borel-Pompeiu

Mediante el uso de los lemas previamente demostrados se procede a probar el siguiente resultado fundamental de esta sección.

Teorema 2.4.1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un dominio de Jordan con frontera suave Γ y sea $f \in C^{2k}(\Omega \cup \Gamma)$. Entonces se cumple que*

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{1}{2k}[\int\limits_{\Gamma} E_0(\underline{y}-\underline{x})\partial_{\underline{y}}((f(y)\partial_{\underline{y}})(\underline{y}-\underline{x}))dS(\underline{y}) + \\
+\sum_{i=1}^{2k-2}(-1)^i \int\limits_{\Gamma} E_i(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})\partial_{\underline{y}}^i((f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})(\underline{y}-\underline{x}))dS(\underline{y}) + \\
+\Psi(\int\limits_{\Gamma} E_{2k-1}(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})\partial_{\underline{y}}^{2k-2}f(\underline{y})\partial_{\underline{y}}dS(\underline{y})) + \\
+2\mathcal{C}_{\Gamma}^{r,2k-1}f + (2k-2)\mathcal{C}_{\Gamma}^{l,2k-1}f - \\
-\int\limits_{\Omega} E_{2k-2}(\underline{y}-\underline{x})(\partial_{\underline{y}}^{2k-1}f(y)\partial_{\underline{y}})(\underline{y}-\underline{x})dV(\underline{y}) - \\
-\Psi(\int\limits_{\Omega} E_{2k-1}(\underline{y}-\underline{x})\partial_{\underline{y}}^{2k-1}f(\underline{y})\partial_{\underline{y}}dV(\underline{y}))].
\end{aligned}$$

Demostración. Si se hace uso del Lema 2.4.1, se tiene

$$\begin{aligned}
\partial_{\underline{y}}^{2k-1}(f(\underline{y})(\underline{y}-\underline{x})) = (\partial_{\underline{y}}^{2k-1}f(\underline{y}))(\underline{y}-\underline{x}) + \Psi(\partial_{\underline{y}}^{2k-2}f(\underline{y})\partial_{\underline{y}}) - \\
-(2k-2)\partial_{\underline{y}}f(\partial_{\underline{y}})\partial_{\underline{y}}^{2k-2}.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Se multiplica la identidad (2.22) por $E_{2k-2}(\underline{y}-\underline{x})$ y se obtiene que

$$E_{2k-2}(\underline{y}-\underline{x})\partial_{\underline{y}}^{2k-1}(f(\underline{y})(\underline{y}-\underline{x})) = E_{2k-2}(\underline{y}-\underline{x})(\partial_{\underline{y}}^{2k-1}f(\underline{y}))(\underline{y}-\underline{x}) +$$

$$+E_{2k-2}(\underline{y}-\underline{x})\Psi(\partial_{\underline{y}}^{2k-2}f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})-(2k-2)E_{2k-2}(\underline{y}-\underline{x})\partial_{\underline{y}}f(\partial_{\underline{y}})\partial_{\underline{y}}^{2k-2}. \quad (2.23)$$

Si se usa la propiedad (6) de Ψ del Lema 2.2.1 para $\underline{g}=E_{2k-2}$ se tiene que

$$E_{2k-2}(\underline{y}-\underline{x})\Psi(\partial_{\underline{y}}^{2k-2}f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})=-\Psi(E_{2k-2}(\underline{y}-\underline{x})\partial_{\underline{y}}^{2k-2}f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})-$$

$$-2(\partial_{\underline{y}}^{2k-2}f(y)\partial_{\underline{y}})E_{2k-2}(\underline{y}-\underline{x}). \quad (2.24)$$

De (2.23) y (2.24) se obtiene

$$\begin{aligned}
&E_{2k-2}(\underline{y}-\underline{x})\partial_{\underline{y}}^{2k-1}((f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})(\underline{y}-\underline{x}))=\\
&=E_{2k-2}(\underline{y}-\underline{x})(\partial_{\underline{y}}^{2k-1}f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})(\underline{y}-\underline{x})-\\
&-\Psi(E_{2k-2}(\underline{y}-\underline{x})\partial_{\underline{y}}^{2k-2}f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})-\\
&-2(\partial_{\underline{y}}^{2k-2}f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})E_{2k-2}(\underline{y}-\underline{x})-\\
&-(2k-2)E_{2k-2}(\underline{y}-\underline{x})\partial_{\underline{y}}f(\underline{y})\partial_{\underline{y}}^{2k-2}.
\end{aligned}$$

Sea $\Omega_\epsilon=\omega\setminus B(x,\epsilon)$ y $\Gamma_\epsilon=\partial\Omega_\epsilon$.
Sea

$$I_{1,\epsilon}=\int_{\Omega_\epsilon}E_{2k-2}(\underline{y}-\underline{x})\partial_{\underline{y}}^{2k-1}(f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})(\underline{y}-\underline{x}))dV(\underline{y})$$

$$\mathcal{T}_{1,\epsilon}=\int_{\Omega_\epsilon}E_{2k-2}(\underline{y}-\underline{x})(\partial_{\underline{y}}^{2k-1}f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})(\underline{y}-\underline{x})dV(\underline{y})$$

$$I_{2,\epsilon}=\int_{\Omega_\epsilon}\Psi(E_{2k-2}(\underline{y}-\underline{x})\partial_{\underline{y}}^{2k-2}f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})dV(\underline{y})$$

$$I_{3,\epsilon}=2\int_{\Omega_\epsilon}(\partial_{\underline{y}}^{2k-2}f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})E_{2k-2}(\underline{y}-\underline{x})dV(\underline{y})$$

$$I_{4,\epsilon}=(2k-2)\int_{\Omega_\epsilon}E_{2k-2}(\underline{y}-\underline{x})\partial_{\underline{y}}^{2k-1}f(\underline{y})dV(\underline{y}).$$

Estimaciones estándares permiten obtener

$$I_1 = \lim_{\epsilon \to 0} I_{1,\epsilon} = \int_{\Omega} E_{2k-2}(\underline{y} - \underline{x}) \partial_{\underline{y}}^{2k-1} (f(\underline{y}) \partial_{\underline{y}})(\underline{y} - \underline{x})) dV(\underline{y})$$

$$\mathcal{T}_1 = \lim_{\epsilon \to 0} \mathcal{T}_{1,\epsilon} = \int_{\Omega} E_{2k-2}(\underline{y} - \underline{x}) (\partial_{\underline{y}}^{2k-1} f(\underline{y}) \partial_{\underline{y}})(\underline{y} - \underline{x}) dV(\underline{y}),$$

$$I_2 = \lim_{\epsilon \to 0} I_{2,\epsilon} = \int_{\Omega} \Psi(E_{2k-2}(\underline{y} - \underline{x}) \partial_{\underline{y}}^{2k-2} f(\underline{y}) \partial_{\underline{y}}) dV(\underline{y}),$$

$$I_3 = \lim_{\epsilon \to 0} I_{3,\epsilon} = 2 \int_{\Omega} (\partial_{\underline{y}}^{2k-2} f(\underline{y}) \partial_{\underline{y}}) E_{2k-2}(\underline{y} - \underline{x}) dV(\underline{y}),$$

$$I_4 = \lim_{\epsilon \to 0} I_{4,\epsilon} = (2k-2) \int_{\Omega} E_{2k-2}(\underline{y} - \underline{x}) \partial_{\underline{y}}^{2k-1} f(\underline{y}) dV(\underline{y}).$$

Después de integrar la expresión (2.25) sobre Ω resulta

$$I_1 = \mathcal{T}_1 - I_2 - I_3 - I_4. \tag{2.25}$$

Entonces,

$$I_3 = -2f + 2\mathcal{C}_{\Gamma}^{r,\, 2k-1} f, \tag{2.26}$$

$$I_4 = -(2k-2)f + (2k-2)\mathcal{C}_{\Gamma}^{l,\, 2k-1} f. \tag{2.27}$$

Si se hace uso de la fórmula de Stokes da

$$\int_{\Omega_\epsilon} E_{2k-1}(\underline{y} - \underline{x}) \partial_{\underline{y}}^{2k-1} f(\underline{y}) dV(\underline{y}) + \int_{\Omega_\epsilon} E_{2k-2}(\underline{y} - \underline{x}) \partial_{\underline{y}}^{2k-2} f(\underline{y}) \partial_{\underline{y}}) dV(\underline{y}) =$$

$$= \int_{\Gamma_\epsilon} E_{2k-1}(\underline{y} - \underline{x}) \underline{n}(\underline{y}) \partial_{\underline{y}}^{2k-2} f(\underline{y}) \partial_{\underline{y}}) dS(\underline{y}).$$

Entonces,

$$\int\limits_{\Omega_\epsilon} E_{2k-2}(\underline{y}-\underline{x})\partial_{\underline{y}}^{2k-2} f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})dV(\underline{y}) =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_\epsilon} E_{2k-1}(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})\partial_{\underline{y}}^{2k-2} f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})dS(\underline{y}) -$$

$$- \int\limits_{\Omega_\epsilon} E_{2k-1}(\underline{y}-\underline{x})\partial_{\underline{y}}^{2k-1} f(\underline{y})\partial_{\underline{y}} dV(\underline{y}).$$

Si se aplica Ψ en ambos términos y se tiene en cuenta que Ψ es lineal, se obtiene

$$I_{2,\epsilon} = \mathcal{S} - \mathcal{T}_2,$$

donde

$$\mathcal{S}_{1,\epsilon} = \Psi(\int\limits_{\Gamma_\epsilon} E_{2k-1}(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})\partial_{\underline{y}}^{2k-2} f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})dS(\underline{y}))$$

y

$$\mathcal{T}_{2,\epsilon} = \Psi(\int\limits_{\Omega_\epsilon} E_{2k-1}(\underline{y}-\underline{x})\partial_{\underline{y}}^{2k-1} f(\underline{y})\partial_{\underline{y}} dV(\underline{y})).$$

Después de sustituir en (2.28) se tiene

$$I_{1,\epsilon} = \mathcal{T}_{1,\epsilon} - (\mathcal{S}_{1,\epsilon} - \mathcal{T}_{2,\epsilon}) - (-2f + 2\mathcal{C}_{\Gamma_\epsilon}^{r,\,2k-1} f) -$$
$$-(-(2k-2)f + (2k-2)\mathcal{C}_{\Gamma}^{l,\,2k-1} f).$$

Luego

$$I_{1,\epsilon} = \mathcal{T}_{1,\epsilon} + \mathcal{T}_{2,\epsilon} - \mathcal{S}_{1,\epsilon} + 2f - 2\mathcal{C}_{\Gamma_\epsilon}^{r,\,2k-1} f + (2k-2)f, \tag{2.28}$$

$$I_{1,\epsilon} = 2kf - \mathcal{S}_{1,\epsilon} 2\mathcal{C}_{\Gamma_\epsilon}^{r,\,2k-1} f - (2k-2)\mathcal{C}_{\Gamma}^{l,\,2k-1} f + \mathcal{T}_{1,\epsilon} + \mathcal{T}_{2,\epsilon}, \tag{2.29}$$

$$f = \frac{1}{2k}(I_{1,\epsilon} + \mathcal{S}_{1,\epsilon} + 2\mathcal{C}_{\Gamma_\epsilon}^{r,\,2k-1} f + (2k-2)\mathcal{C}_{\Gamma}^{l,\,2k-1} f - \mathcal{T}_{1,\epsilon} - \mathcal{T}_{2,\epsilon}, \tag{2.30}$$

$$I_{1,\epsilon} = \int\limits_{\Omega_\epsilon} E_{2k-2}(\underline{y}-\underline{x})\partial_{\underline{y}}^{2k-1}((f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})(\underline{y}-\underline{x}))dV(\underline{y}) =$$

$$= \int\limits_{\Omega_\epsilon} E_0(\underline{y}-\underline{x})[\partial_{\underline{y}}((f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})(\underline{y}-\underline{x}))]dV(\underline{y}) +$$

$$+\sum_{i=0}^{k-2}(-1)^i \int\limits_{\Gamma_\epsilon} E_i(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\partial_{\underline{y}})\partial_{\underline{y}}^i((f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})(\underline{y}-\underline{x}))dS(\underline{y}).$$

Sea

$$A_{k-2} = \int\limits_{\Omega} E_{2k-2}(\underline{y}-\underline{x})[\partial_{\underline{y}}^{2k-1}(f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})(\underline{y}-\underline{x}))]dV(\underline{y}),$$

$$B_{k-2} = \int\limits_{\Gamma} E_{2k-2}(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})[\partial_{\underline{y}}^{2k-2}(f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})(\underline{y}-\underline{x}))]dS(\underline{y}).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} I_1 = A_{k-2} = -A_{2k-3} + B_{2k-2} &= \\ = -(-A_{2k-4} + B_{2k-3}) + B_{2k-2} & \\ = A_{2k-4} - B_{2k-3} + B_{2k-2} & \\ = -A_{2k-5} + B_{2k-4} - B_{2k-3} + B_{2k-2} & \\ = A_{2k-6} - B_{2k-5} + B_{2k-4} - B_{2k-3} + B_{2k-2} & \\ = A_{2k-2k} - B_1 + B_2 - B_3 + B_4 - \cdots + B_{2k-2} & \\ = A_0 + \sum_{i=1}^{2k-2}(-1)^i B_i. & \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$I_1 = \int\limits_{\Omega} E_i(\underline{y}-\underline{x})[\partial_{\underline{y}}(f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})(\underline{y}-\underline{x}))]dV(\underline{y}) + \tag{2.31}$$

$$+\sum_{i=1}^{2k-2}(-1)^i \int\limits_{\Gamma} E_i(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(y)\partial_{\underline{y}}^i[\partial_{\underline{y}}(f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})(\underline{y}-\underline{x}))]dS(\underline{y}) \tag{2.32}$$

Finalmente, se obtiene

$$f(x) = \frac{1}{2k}[\int\limits_{\Gamma} E_0(\underline{y}-\underline{x})\partial_{\underline{y}}((f(y)\partial_{\underline{y}})(\underline{y}-\underline{x}))dS(\underline{y}) +$$

$$+\sum_{i=1}^{2k-2}(-1)^i \int\limits_{\Gamma} E_i(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})\partial_{\underline{y}}^i((f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})(\underline{y}-\underline{x}))dS(\underline{y}) +$$

$$+\Psi(\int\limits_{\Gamma} E_{2k-1}(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})\partial_{\underline{y}}^{2k-2} f(\underline{y})\partial_{\underline{y}} dS(\underline{y})) +$$

$$+2\mathcal{C}_{\Gamma}^{r,2k-1} f(x) + (2k-2)\mathcal{C}_{\Gamma}^{l,2k-1} f(x) -$$

$$-\int\limits_{\Omega} E_{2k-2}(\underline{y}-\underline{x})(\partial_{\underline{y}}^{2k-1} f(y)\partial_{\underline{y}})(\underline{y}-\underline{x})dV(\underline{y}) -$$

$$-\Psi(\int\limits_{\Omega} E_{2k-1}(\underline{y}-\underline{x})\partial_{\underline{y}}^{2k-1} f(\underline{y})\partial_{\underline{y}} dV(\underline{y}))]. \quad \blacksquare$$

De esta fórmula de tipo Borel-Pompeiu, se obtiene la siguiente fórmula de representación integral de tipo Cauchy para las funciones infrapolimonogénicas.

Teorema 2.4.2 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un dominio de Jordan con frontera suave Γ y sea $f \in C^{2k}(\Omega \cup \Gamma)$ tal que $\partial_{\underline{x}}^{2k-1} f \partial_{\underline{x}} = 0$ in Ω. Entonces, se cumple que*

$$f(x) = \frac{1}{2k}[2\mathcal{C}_{\Gamma}^{r,2k-1} f(x) + (2k-2)\mathcal{C}_{\Gamma}^{l,2k-1} f(x) +$$

$$+\sum_{i=1}^{2k-2}(-1)^i \int\limits_{\Gamma} E_i(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})\partial_{\underline{y}}^i((f(\underline{y})\partial_{\underline{y}})(\underline{y}-\underline{x}))dS(\underline{y}) +$$

$$+\Psi(\int\limits_{\Gamma} E_{2k-1}(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})\partial_{\underline{y}}^{2k-2} f(\underline{y})\partial_{\underline{y}} dS(\underline{y}))].$$

2.4.3. La transformada de Cauchy infrapolimonogénica y la de Teodorescu asociada

En esta sección se define una transformada de Cauchy y se prueba que genera funciones infrapolimonogénicas. Sea $F := \{f, f_1, \ldots f_{2k-1}\}$ una colección de $2k$ funciones integrables sobre Γ. Es natural tratar de relacionar la fórmula de Cauchy (2.8) con la transformada integral

$$F \mapsto \frac{1}{2k}[2\mathcal{C}_\Gamma^{r,2k-1} f(\underline{x}) + (2k-2)\mathcal{C}_\Gamma^{l,2k-1} f(\underline{x}) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{2k-1} (-1)^{i+1} \int_\Gamma E_{i-1}(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y}) f_i(\underline{y})(\underline{y}-\underline{x}) dS(\underline{y}) +$$
$$+\Psi(\int_\Gamma E_{2k-1}(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y}) f_{2k-1}(\underline{y}) dS(\underline{y}))].$$

Nótese que $\mathcal{C}_\Gamma^{r,2k-1} f(\underline{x})$ y $\mathcal{C}_\Gamma^{l,2k-1} f(\underline{x})$ están trivialmente en el núcleo de $\partial_{\underline{x}}^{2k-1}(.)\partial_{\underline{x}}$. En efecto, si se tiene en cuenta que $\partial_{\underline{x}}^{2k-1}(.)\partial_{\underline{x}} = \partial_{\underline{x}}(.)\partial_{\underline{x}}^{2k-1}$ se deduce que $[\mathcal{C}_\Gamma^{r,2k-1} f(\underline{x})]\partial_{\underline{x}}^{2k-1} = 0$ y $\partial_{\underline{x}}^{2k-1}[\mathcal{C}_\Gamma^{l,2k-1} f(\underline{x})] = 0$. Además se cumple la siguiente proposición.

Proposición 2.4.1 *La suma*

$$\sum_{i=1}^{2k-1} (-1)^{i+1} \int_\Gamma E_{i-1}(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y}) f_i(\underline{y})(\underline{y}-\underline{x}) dS(\underline{y})$$

pertenece al núcleo de $\partial_{\underline{x}}^{2k-1}(.)\partial_{\underline{x}}$.

Con el fin de probar la proposición anterior, se prueban primeramente los siguientes lemas auxiliares.

Lema 2.4.4 *Se cumple la siguiente fórmula*

$$\partial_{\underline{x}}^{2k-1}(E_{2i}(\underline{y}-\underline{x})c(\underline{y}-\underline{x}))\partial_{\underline{x}} = \begin{cases} 0, & 1 \le i < k-1, \\ \Psi((E_0(\underline{y}-\underline{x})c)\partial_{\underline{x}}), & i = k-1. \end{cases}$$

donde c es un número de Clifford.

Demostración. El resultado se obtiene al tomar $f = E_{2k-2}(\underline{y}-\underline{x})c$ en el Lema 2.4.1. Nótese que $\partial_{\underline{x}}^{2k-2} E_{2i}(\underline{y}-\underline{x}) = \begin{cases} 0, & i < k-1, \\ -E_0(\underline{y}-\underline{x}), & i = k-1. \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\partial_{\underline{x}}^{2k-1}[E_{2i}(\underline{y}-\underline{x})c(\underline{y}-\underline{x})] &= [\partial_{\underline{x}}^{2k-1}E_{2i}(\underline{y}-\underline{x})c](\underline{y}-\underline{x}) - \\
-\Psi[\partial_{\underline{x}}^{2k-2}E_{2i}(\underline{y}-\underline{x})c] &+ (2k-2)[\partial_{\underline{x}}E_{2i}(\underline{y}-\underline{x})c]\partial_{\underline{x}}^{2k-3} = \\
= -\Psi(\partial_{\underline{x}}^{2k-2}E_{2i}(\underline{y}-\underline{x})c) &+ (2k-2)[\partial_{\underline{x}}\partial_{\underline{x}}^{2k-4}E_{2i}(\underline{y}-\underline{x})c]\partial_{\underline{x}} = \\
= -\Psi(\partial_{\underline{x}}^{2k-2}E_{2i}(\underline{y}-\underline{x})c) &+ (2k-2)[\partial_{\underline{x}}^{2k-3}E_{2i}(\underline{y}-\underline{x})c]\partial_{\underline{x}} = \\
= \begin{cases} 0, & i < k-1, \\ -\Psi((E_0(\underline{y}-\underline{x})c)) + (2k-2)cE_0(\underline{y}-\underline{x}), & i = k-1. \end{cases}
\end{aligned}$$

En efecto,

$$[\partial_{\underline{x}}^{2k-3}E_{2k-2}(\underline{y}-\underline{x})c]\partial_{\underline{x}} = -[E_1(\underline{y}-\underline{x})c]\partial_{\underline{x}} = \tag{2.33}$$

$$= -cE_1(\underline{y}-\underline{x})\partial_{\underline{x}} = cE_0(\underline{y}-\underline{x}). \tag{2.34}$$

Entonces,

$$\partial_{\underline{x}}^{2k-1}(E_{2k-2}(\underline{y}-\underline{x})c(\underline{y}-\underline{x}))\partial_{\underline{x}} = \begin{cases} 0, & i < k-1, \\ \Psi((E_0(\underline{y}-\underline{x})c)\partial_{\underline{x}}), & i = k-1. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Lema 2.4.5 *Para $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$, $\underline{y} \in \mathbb{R}^m$ con $\underline{x} \neq \underline{y}$ se cumple la siguiente identidad:*

$$\partial_{\underline{x}}^{2k-1}(E_{2i+1}(\underline{y}-\underline{x})c(\underline{y}-\underline{x}))\partial_{\underline{x}} = 0, \ i \leq k-2.$$

Demostración. Si se hace uso del Lema 2.4.1, resulta

$$\partial_{\underline{x}}^{2k-1}[E_{2i+1}(\underline{y}-\underline{x})c(\underline{y}-\underline{x})] = \begin{cases} 0, & i < k-2, \\ (2k-2)(E_0(\underline{y}-\underline{x})c)\partial_{\underline{x}}, & i = k-2. \end{cases}$$

Caso 1: $i < k-2$**.** Se probará que

$$\partial_{\underline{x}}^{2k-1}[E_{2i+1}(\underline{y}-\underline{x})c(\underline{y}-\underline{x})] = [\partial_{\underline{x}}^{2k-1}E_{2i+1}(\underline{y}-\underline{x})c](\underline{y}-\underline{x}) -$$

$$-\Psi[\partial_{\underline{x}}^{2k-2}E_{2i+1}(\underline{y}-\underline{x})c] + (2k-2)[\partial_{\underline{x}}E_{2i+1}(\underline{y}-\underline{x})c]\partial_{\underline{x}}^{2k-3} = 0.$$

Primero, se puede apreciar que

$$\partial_{\underline{x}}^{2k-1} E_{2i+1}(\underline{y}-\underline{x})c = 0,$$

y

$$\partial_{\underline{x}}^{2k-2} E_{2i+1}(\underline{y}-\underline{x})c = 0.$$

Por otro lado,

$$\partial_{\underline{x}}[E_{2i+1}(\underline{y}-\underline{x})c]\partial_{\underline{x}}^{2k-3} = \partial_{\underline{x}}\partial_{\underline{x}}^{2k-4}[E_{2i+1}(\underline{y}-\underline{x})c]\partial_{\underline{x}} = \tag{2.35}$$

$$= \partial_{\underline{x}}^{2k-3}[E_{2i+1}(\underline{y}-\underline{x})c]\partial_{\underline{x}} = 0. \tag{2.36}$$

Caso 2: $i = k-2$**.** Se tiene que

$$\partial_{\underline{x}}^{2k-3} E_{2k-3}(\underline{y}-\underline{x})c]\partial_{\underline{x}} = E_0(\underline{y}-\underline{x})c]\partial_{\underline{x}}. \quad \blacksquare \tag{2.37}$$

Demostración de la Proposición 2.4.1.

Sean las notaciones:

$$[I^2F](x) = \frac{1}{2k}\sum_{i=0}^{k-2}\int_{\Gamma} E_{2i}(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(y)f_{2i}(\underline{y})(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y}) \tag{2.38}$$

$$[I^4F](x) = \frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{k-2}(-1)^{2i+1}[\int_{\Gamma} E_{2i+1}(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})f_{2i+1}(\underline{y})(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y}) \tag{2.39}$$

Se puede comprobar que

$$\sum_{i=1}^{2k-2}(-1)^{i+1}\int_{\Gamma} E_{i-1}(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})f_i(\underline{y})(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y}) = I^2 + I^4$$

pero

$$\partial_{\underline{x}}^{2k-1}[I^2 + I^4]\partial_{\underline{x}} = 0$$

por los lemas anteriores, lo cual completa la demostración. $\blacksquare$

Todo lo anterior motiva a definir la siguiente transformada de Cauchy asociada al operador $\partial_{\underline{x}}^{2k-1}(.)\partial_{\underline{x}}$

$$[\mathcal{C}_\Gamma^{\mathbf{infra},k}\phi](x) = $$
$$= \frac{1}{2k}[\int\limits_\Gamma E_{2k-2}(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})\phi(\underline{y}))(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y}) +$$
$$+\Psi(\int\limits_\Gamma E_{2k-1}(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})\phi(\underline{y})dS(\underline{y}))]$$

La denominación de transformada de Cauchy infrapolimonogénica para $\mathcal{C}_\Gamma^{\mathbf{infra},k}$ la justifica el siguiente teorema.

Teorema 2.4.3 *Sea ϕ una función integrable sobre Γ. Entonces $[\mathcal{C}_\Gamma^{\mathbf{infra,k}}\phi](x)$ pertenece al núcleo del operador $\partial_{\underline{x}}^{2k-1}(.)\partial_{\underline{x}}$.*

Antes de pasar a la demostración se prueba el siguiente lema.

Lema 2.4.6 *Para $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$, $\underline{y} \in \mathbb{R}^m$ con $\underline{x} \neq \underline{y}$ se cumple la siguiente identidad:*

$$\partial_{\underline{x}}^{2k-1}(\Psi(E_{2k-1}(\underline{y}-\underline{x})c))\partial_{\underline{x}} = -\Psi((E_0(\underline{y}-\underline{x})c)\partial_{\underline{x}}).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\partial_{\underline{x}}^{2k-1}(\Psi(E_{2k-1}(\underline{y}-\underline{x})c)) &= \partial_{\underline{x}}\partial_{\underline{x}}^{2k-2}(\Psi(E_{2k-1}(\underline{y}-\underline{x})c)) = \\
&= \partial_{\underline{x}}\Psi(\partial_{\underline{x}}^{2k-2}(E_{2k-1}(\underline{y}-\underline{x})c)) = \\
= -2\partial_{\underline{x}}^{2k-2}(E_{2k-1}(\underline{y}-\underline{x})c)\partial_{\underline{x}} &- \Psi(\partial_{\underline{x}}\partial_{\underline{x}}^{2k-2}(E_{2k-1}(\underline{y}-\underline{x})c)) = \\
= -2(E_{2k-1}(\underline{y}-\underline{x})c)\partial_{\underline{x}}^{2k-1} &- \Psi(\partial_{\underline{x}}^{2k-1}(E_{2k-1}(\underline{y}-\underline{x})c)) = \\
= -2(E_{2k-1}(\underline{y}-\underline{x})c)\partial_{\underline{x}}^{2k-2}\partial_{\underline{x}} &+ \Psi((E_0(\underline{y}-\underline{x})c)) = \\
= -2(\partial_{\underline{x}}^{2k-2}E_{2k-1}(\underline{y}-\underline{x})c)\partial_{\underline{x}} &+ \Psi((E_0(\underline{y}-\underline{x})c)) = \\
= -2(E_1(\underline{y}-\underline{x})c)\partial_{\underline{x}} &+ \Psi((E_0(\underline{y}-\underline{x})c)) = \\
= -2(cE_1(\underline{y}-\underline{x}))\partial_{\underline{x}} &+ \Psi((E_0(\underline{y}-\underline{x})c)) = \\
= 2cE_0(\underline{y}-\underline{x}) &+ \Psi((E_0(\underline{y}-\underline{x})c)).
\end{aligned}$$

Ahora, si se usan las propiedades de Ψ, se tiene que

$$\begin{aligned}&(2cE_0(\underline{y}-\underline{x})+\Psi((E_0(\underline{y}-\underline{x})c)))\partial_{\underline{x}}=\\&=2cE_0(\underline{y}-\underline{x})\partial_{\underline{x}}-\Psi((E_0(\underline{y}-\underline{x})c))\partial_{\underline{x}})=\\&=-\Psi((E_0(\underline{y}-\underline{x})c))\partial_{\underline{x}}).\quad\blacksquare\end{aligned}$$

Demostración del Teorema 2.4.3. A partir de los lemas 2.4.4 y 2.4.6 se deduce que

$$\begin{aligned}&\partial_{\underline{x}}^{2k-1}[\mathcal{C}_\Gamma^{\mathbf{infra},k}\phi](x)\partial_{\underline{x}}=\\&=\frac{1}{2k}\partial_{\underline{x}}^{2k-1}\int_\Gamma E_{2k-2}(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})\phi(\underline{y}))(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y})\partial_{\underline{x}}+\\&+\frac{1}{2k}\partial_{\underline{x}}^{2k-1}\Psi(\int_\Gamma E_{2k-1}(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})\phi(\underline{y})dS(\underline{y}))\partial_{\underline{x}}=0.\quad\blacksquare\end{aligned}$$

En esta tesis se define la siguiente transformada de Teodorescu

$$\mathcal{T}_\Omega^{\mathbf{infra},k}=-\frac{1}{2k}(\mathcal{T}_1+\mathcal{T}_2),$$

donde

$$[\mathcal{T}_1f](x)=\int_\Omega E_{2k-2}(\underline{y}-\underline{x})f(\underline{y})(\underline{y}-\underline{x})dV(\underline{y}),\tag{2.40}$$

$$[\mathcal{T}_2f](x)=\Psi(\int_\Omega E_{2k-1}(\underline{y}-\underline{x})f(\underline{y})dV(\underline{y})).\tag{2.41}$$

Teorema 2.4.4 *Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ un dominio de Jordan con frontera suave y $f\in C^1(\Omega)$. Se cumple la siguiente identidad*

$$\partial_{\underline{x}}^{2k-1}(\mathcal{T}_\Omega^{\mathbf{infra},k}f)\partial_{\underline{x}}=f.\tag{2.42}$$

Demostración. Se tiene que

$$\partial_{\underline{x}}^{2k-1}(\mathcal{T}_{\Omega}^{\mathbf{infra},k}f) = -\frac{1}{2k}(\partial_{\underline{x}}^{2k-1}[\mathcal{T}_1 f](x) + \partial_{\underline{x}}^{2k-1}[\mathcal{T}_2 f](x)). \tag{2.43}$$

$$\partial_{\underline{x}}^{2k-1}[\mathcal{T}_1 f](x) = \partial_{\underline{x}}^{2k-1}\int_{\Omega} E_{2k-2}(\underline{y}-\underline{x})f(\underline{y})(\underline{y}-\underline{x})dV(\underline{y}).$$

Si se realizan las siguientes transformaciones

$$\partial_{\underline{x}}^{2k-1}\int_{\Omega} E_{2k-2}(\underline{y}-\underline{x})f(\underline{y})(\underline{y}-\underline{x})dV(\underline{y}) =$$

$$= \int_{\Omega}[\partial_{\underline{x}}^{2k-1}(E_{2k-2}(\underline{y}-\underline{x})f(\underline{y}))](\underline{y}-\underline{x})dV(\underline{y}) -$$

$$-\int_{\Omega}\Psi(\partial_{\underline{x}}^{2k-2}E_{2k-2}(\underline{y}-\underline{x})f(\underline{y}))dV(\underline{y}) +$$

$$+(2k-2)\int_{\Omega}\partial_{\underline{x}}(E_{2k-2}(\underline{y}-\underline{x})f(\underline{y}))\partial_{\underline{x}}^{2k-3}dV(\underline{y}) =$$

$$= -\int_{\Omega}\delta(\underline{y}-\underline{x})f(\underline{y})(\underline{y}-\underline{x})dV(\underline{y}) -$$

$$-\Psi\int_{\Omega}E_0(\underline{y}-\underline{x})f(\underline{y})dV(\underline{y}) +$$

$$+(2k-2)\int_{\Omega}\partial_{\underline{x}}\partial_{\underline{x}}^{2k-4}f(\underline{y})E_{2k-2}(\underline{y}-\underline{x})f(\underline{y})\partial_{\underline{x}}dV(\underline{y}) =$$

$$= -\int_{\Omega}\Psi(E_0(\underline{y}-\underline{x})f(\underline{y}))dV(\underline{y}) +$$

$$+(2k-2)\int_{\Omega}\partial_{\underline{x}}^{2k-3}E_{2k-2}(\underline{y}-\underline{x})f(\underline{y})\partial_{\underline{x}}dV(\underline{y}) =$$

$$= -\int_{\Omega}\Psi(E_0(\underline{y}-\underline{x})f(\underline{y}))dV(\underline{y})-$$

$$-(2k-2)\int_{\Omega}[E_1(\underline{y}-\underline{x})f(\underline{y})]\partial_{\underline{x}}dV(\underline{y}) =$$

$$= -\int_{\Omega}\Psi(E_0(\underline{y}-\underline{x})f(\underline{y}))dV(\underline{y})-$$

$$-(2k-2)\int_{\Omega}[f(\underline{y})E_1(\underline{y}-\underline{x})]\partial_{\underline{x}}dV(\underline{y}),$$

resulta

$$\partial_{\underline{x}}^{2k-1}[\mathcal{T}_1 f](x) = -\int_{\Omega}\Psi(E_0(\underline{y}-\underline{x})f(\underline{y}))dV(\underline{y}) +$$
$$+(2k-2)\int_{\Omega}f(\underline{y})E_0(\underline{y}-\underline{x})dV(\underline{y}).$$

Por otro lado, si se hace uso del procedimiento análogo al de la demostración del Lema 2.4.4 se tiene que

$$\partial_{\underline{x}}^{2k-1}\Psi(\int_{\Omega}E_{2k-1}(\underline{y}-\underline{x})f(\underline{y})dV(\underline{y})) = \tag{2.44}$$

$$= \Psi(\int_{\Omega}E_0(\underline{y}-\underline{x})f(\underline{y})dV(\underline{y})) + 2\int_{\Omega}f(\underline{y})E_0(\underline{y}-\underline{x})dV(\underline{y})). \tag{2.45}$$

Entonces

$$\partial_{\underline{x}}^{2k-1}[\mathcal{T}_{\Omega}^{\mathbf{infra},k}f](x) = \int_{\Omega}f(\underline{y})E_0(\underline{y}-\underline{x})dV(\underline{y}) = [\mathcal{T}_{\Omega}^{r}f](x).$$

lo cual implica que

$$\partial_{\underline{x}}^{2k-1}[\mathcal{T}_\Omega^{\mathbf{infra},k} f](x)\partial_{\underline{x}} = [\mathcal{T}_\Omega^r f](x)\partial_{\underline{x}} = f(\underline{x}). \quad \blacksquare$$

2.5. Una descomposición de tipo Almansi para las funciones inframonogénicas

El resultado original de Almansi de 1898 [1] afirma que toda función real $f(\underline{x})$ poliarmónica de grado k, es decir $\triangle_m^k(f) = 0$, en un dominio estrellado $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ (centrado en 0) se puede descomponer como

$$f(\underline{x}) = f_0(\underline{x}) + |\underline{x}|^2 f_1(\underline{x}) + \cdots + |\underline{x}|^{2(k-1)} f_{k-1}(\underline{x}),$$

donde $f_0, \ldots, f_{k-1}$ son armónicas en Ω.

Recientemente, se han considerado descomposiciones de tipo Almansi en el contexto del Análisis de Clifford. Por ejemplo, en [17] se establece una descomposición de tipo Almansi en un dominio estrellado para las funciones polimonogénicas.

De acuerdo al Teorema 2.1 en [17], cada función k-monogénica f en el dominio estrellado Ω se descompone de forma única como

$$f(\underline{x}) = f_1(\underline{x}) + \underline{x}\, f_2(\underline{x}) + \cdots + \underline{x}^{k-1} f_{k-1},$$

donde $f_1, \ldots, f_{k-1}$ son funciones monogénicas a la izquierda en Ω, es decir $\partial_{\underline{x}} f_j = 0$, $j = 1, \ldots, k-1$.

En esta sección se consideran las clases de funciones que son simultáneamente inframonogénicas y bimonogénicas. Este espacio será denotado por $\mathcal{H} \cap \mathcal{I}$. También se considera el espacio de las funciones monogénicas bilaterales $\mathcal{M}^l \cap \mathcal{M}^r$. Es natural la pregunta de si es posible encontrar una descomposición de tipo Almansi para las funciones de la clase $\mathcal{H} \cap \mathcal{I}$.

Como consecuencia del Teorema 2.1 en [17], cada función bimonogénica f en un dominio estrellado admite la descomposición de tipo Almansi $f = f_1 + \underline{x} f_2$, donde f_1 y f_2 son monogénicas a la izquierda. Además no es difícil comprobar, como se hizo al inicio de este capítulo, que una expresión $f_1 + \underline{x} f_2$

para funciones monogénicas a la izquierda f_1 y f_2 no es en general inframonogénica. No obstante, como se ha observado, expresiones del tipo $f_1\underline{x}$, $\underline{x}f_1$, donde f_1 es monogénica bilateral, pertenecen a $\mathcal{H}\cap\mathcal{I}$.

Así, se verifica que una función de la forma $f_1 + f_2 + \underline{x}f_3 + f_4\underline{x}$ pertenece a $\mathcal{H}\cap\mathcal{I}$, donde f_1 y f_2 son monogénica a la izquierda y monogénica a la derecha respectivamente, mientras que f_3 y f_4 pertenecen a $\mathcal{M}^l \cap \mathcal{M}^r$.

Entonces, surge la cuestión de si cada función f en $\mathcal{H}\cap\mathcal{I}$ admite una representación de este tipo a saber, de si existen $f_1 \in \mathcal{M}^l$,$f_2 \in \mathcal{M}^r$ y $f_3, f_4 \in \mathcal{M}^l \cap \mathcal{M}^r$ tales que sea admisible la descomposición de tipo Almansi $f = f_1 + f_2 + \underline{x}f_3 + f_4\underline{x}$.

En esta sección se da respuesta afirmativa a esta pregunta, para el caso en que la función considerada esté definida sobre un dominio de Jordan $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, donde una consideración sobre la paridad de la dimensión de $\mathbb{R}^m$ es necesaria. Los resultados de esta sección se encuentran en un artículo enviado a publicar [22].

Es de resaltar que los dominios Ω considerados en esta tesis no necesitan ser estrellados, así las técnicas usadas difieren sustancialmente de aquellas usadas en [17]. En efecto, nuestro método está basado, en la fórmula de representación integral para funciones inframonogénicas [20] establecida al inicio de este capítulo.

El principal resultado de esta sección está recogido en el siguiente teorema

Teorema 2.5.1 *Supongamos que m es impar y sea $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un dominio de Jordan con frontera Γ suficientemente suave. Una función $f \in C^2(\Omega\cup\Gamma)$ pertenece a $\mathcal{H}\cap\mathcal{I}$ en Ω si y solo si admite en Ω la descomposición*

$$f = f_1 + f_2 + f_3\,\underline{x} + \underline{x}f_4,$$

donde f_1, f_2 son funciones monogénicas, respectivamente por la izquierda y por la derecha en Ω, mientras que f_3, $f_4 \in \mathcal{M}^l_\Omega \cap \mathcal{M}^r_\Omega$

Con la meta de demostrar el Teorema 2.5.1, el siguiente resultado provee una descomposición de tipo Almansi para el caso de funciones k-vectoriales.

Teorema 2.5.2 *Sean Ω y Γ como en el Teorema 2.5.1. Supóngase que $k \neq \frac{m}{2} \pm 1$. Entonces una función k-vectorial $F_k \in C^2(\Omega\cup\Gamma)$ pertenece a $\mathcal{H}\cap\mathcal{I}$*

en Ω si y solo si admite en Ω la descomposición:

$$F_k = f_1 + f_2 + f_3\,\underline{x} + \underline{x}f_4, \tag{2.46}$$

donde f_1 y f_2 son funciones monogénicas por la izquierda y por la derecha respectivamente, mientras que f_3, $f_4 \in \mathcal{M}^l_\Omega \cap \mathcal{M}^r_\Omega$

Demostración.

La fórmula de Cauchy para funciones inframonogénicas (2.9) aplicada a F_k implica que

$$F_k(\underline{x}) = [\mathcal{C}^r_\Gamma F_k](\underline{x}) + \frac{1}{2}\{[\mathcal{C}^0_\Gamma F_k \partial_{\underline{y}}](\underline{x}) + [\mathcal{C}^1_\Gamma F_k \partial_{\underline{y}}](\underline{x})\},\ \underline{x} \in \Omega, \tag{2.47}$$

Considérese cada sumando por separado en (2.47).

Obsérvese que la función en Ω dada por $\mathcal{C}^r_\Gamma F_k$ es monogénica a la derecha.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}[\mathcal{C}^0_\Gamma F_k \partial_{\underline{y}}](\underline{x}) = \int_\Gamma E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})(F_k\partial_{\underline{y}})\underline{y}d\underline{y} - \\ -[\int_\Gamma E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})(F_k\partial_{\underline{y}})d\underline{y}]\underline{x} = \\ = \int_\Gamma E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})(F_k\partial_{\underline{y}})\underline{y}d\underline{y} - (F_k\partial_{\underline{x}})\underline{x},\end{aligned}$$

donde se ha aplicado la fórmula de Cauchy estándar para la función monogénica a la derecha $\mathcal{H}_2 := F_k\,\partial_{\underline{x}}$.

Obsérvese que la armonicidad de F_k implica que $\mathcal{H}_2$ es en efecto monogénica a ambos lados en Ω.

Por otro lado, la función $\mathcal{H}_1$ definida por

$$\mathcal{H}_1(\underline{x}) := \int_\Gamma E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})(F_k\partial_{\underline{y}})\underline{y}d\underline{y},$$

es monogénica por la izquierda en Ω.

De los cálculos anteriores se obtiene

$$[\mathcal{C}_\Gamma^0 F_k \partial_{\underline{y}}](\underline{x}) = \mathcal{H}_1(\underline{x}) - \mathcal{H}_2(\underline{x})\,\underline{x}, \tag{2.48}$$

donde $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son monogénicas por la izquierda y bilateral, respectivamente.

Para obtener una descomposición adecuada para $\mathcal{C}_\Gamma^1 F_k \partial_{\underline{y}}$ se necesita desarrollar otros cálculos que se exponen a continuación.

El uso de la fórmula de Stokes en Análisis de Clifford (1.6), y la relación $E_0(\underline{y}-\underline{x}) = \partial_{\underline{y}} E_1(\underline{y}-\underline{x})$ y la inframonogenicidad de F_k en Ω, es posible reescribir $\mathcal{C}_\Gamma^1 F_k \partial_{\underline{y}}$ en la forma

$$[\mathcal{C}_\Gamma^1 F_k \partial_{\underline{y}}](\underline{x}) = \sum_{i=1}^{m} e_i \int_\Omega E_0(\underline{y}-\underline{x}) F_k \partial_{\underline{y}} d\underline{y}\, e_i.$$

El empleo del Lema 2.2.1 (1-4) permite escribir $\mathcal{C}_\Gamma^1 F_k \partial_{\underline{y}}](\underline{x})$ como

$$[\mathcal{C}_\Gamma^1 F_k \partial_{\underline{y}}](\underline{x}) = \sum_{i=1}^{m} e_i \int_\Omega E_0(\underline{y}-\underline{x}) \partial_{\underline{y}}\, g(\underline{y}) d\underline{y}\, e_i,$$

donde

$$g(\underline{y}) = -\frac{1}{2}[\sum_{j=1}^{m} e_j\, F_k(\underline{y})\, e_j + (\partial_{\underline{y}}\, F_k)\underline{y}].$$

Ahora, se usa la fórmula de Borel-Pompeiu 1.3.2 para obtener

$$[\mathcal{C}_\Gamma^1 F_k \partial_{\underline{y}}](\underline{x}) = \sum_{i=1}^{m} e_i [\mathcal{C}_\Gamma^l g](\underline{x}) e_i - \sum_{i=1}^{m} e_i g(\underline{x}) e_i, \tag{2.49}$$

donde

$$[\mathcal{C}_\Gamma^l g](\underline{x}) = \int_\Gamma E_0(\underline{y}-\underline{x}) \underline{n}(\underline{y}) g(\underline{y}) d\underline{y}$$

Considérense por separado los sumandos de la parte derecha de (2.49).

Si se usa la relación $e_i E_0 = -E_0\, e_i + 2Sc[E_0]$, se obtiene

$$\sum_{i=1}^{m} e_i [\mathcal{C}_\Gamma^l g](\underline{x}) e_i =$$

$$= -\int_\Gamma E_0(\underline{y}-\underline{x}) \sum_{i=1}^{m} e_i \underline{n}(\underline{y})\, g(\underline{y}) e_i d\underline{y} - 2\int_\Gamma \underline{n}(\underline{y}) g(\underline{y}) E_0(\underline{y}-\underline{x}) d\underline{y}.$$

Obsérvese que el primer sumando define una función monogénica a la izquierda en Ω, mientras el segundo define una función monogénica a la derecha. Para abreviar se denotan por $\mathcal{A}_1(\underline{x})$ y $\mathcal{A}_2(\underline{x})$ respectivamente.

Por otro lado,

$$\sum_{i=1}^{m} e_i g(\underline{x}) e_i =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{i,j} e_i e_j F_k(\underline{x}) e_j e_i - \frac{1}{2}\sum_{i} e_i (\partial_{\underline{x}} F_k)\underline{x} e_i,$$

y el uso del Lema 2.2.1 (5) permite obtener

$$\sum_{i=1}^{m} e_i g(\underline{x}) e_i = \frac{(-1)^{2k+1}}{2}(2k-m)^2 F_k - \frac{1}{2}\sum_{i} e_i (\partial_{\underline{x}} F_k)\underline{x} e_i.$$

por otro lado, de $\underline{x} e_i = -e_i \underline{x} - 2x_i$ se obtiene

$$-\frac{1}{2}\sum_{i} e_i (\partial_{\underline{x}} F_k)\underline{x} e_i =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} e_i \partial_{\underline{x}} F_k(\underline{x}) e_i\right)\underline{x} + \underline{x}(\partial_{\underline{x}} F_k(\underline{x})) =: \mathcal{B}_1(\underline{x})\underline{x} + \underline{x}\mathcal{B}_2(\underline{x}).$$

Obsérvese que de la monogenicidad bilateral de $\mathcal{B}_1$ se infiere de 2.2.1 (2), mientras que la de $\mathcal{B}_2$ es directa.

En resumen, con las notaciones adoptadas se obtiene

$$\frac{(4-(2k-m)^2)}{4} F_k(\underline{x}) = \mathcal{C}_\Gamma^r F_k(\underline{x}) + \frac{1}{2}\big[\mathcal{H}_1(\underline{x}) - \mathcal{H}_2(\underline{x})\,\underline{x} +$$
$$+\mathcal{A}_1(\underline{x}) + \mathcal{A}_2(\underline{x}) - \mathcal{B}_1(\underline{x})\underline{x} - \underline{x}\mathcal{B}_2(\underline{x})\big].$$

Si se tiene en cuenta, que por hipótesis $k \neq \frac{m}{2} \pm 1$, el teorema queda demostrado. $\blacksquare$

Ya se está en condiciones de pasar a la demostración del resultado principal de esta sección.

Demostración del teorema 2.5.1. Sea $f \in C^2(\Omega \cup \Gamma) \cap \mathcal{H}_\Omega \cap \mathcal{I}_\Omega$.

Por el Corolario 2.1.1 cada componente k-vectorial $[f]_k$ en la descomposición canónica

$$f = [f]_0 + [f]_1 + \cdots [f]_m, \tag{2.50}$$

es inframonogénica y armónica en Ω para $0 \leq k \leq m$.

Como m es impar, entonces $k \neq \frac{m}{2} \pm 1$. Consecuentemente, el Teorema 2.5.1 es una consecuencia inmediata del Teorema 2.5.2 y la descomposición canónica (2.50). $\blacksquare$

Como consecuencia de lo anterior se obtiene el siguiente corolario

Corolario 2.5.1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un dominio de Jordan con frontera suave Γ y sea $f \in C^2(\Omega \cup \Gamma) \cap \mathcal{H}_\Omega \cap \mathcal{I}_\Omega$, tal que*

$$[f]_{\frac{m}{2}-1} = [f]_{\frac{m}{2}+1} = 0.$$

Entonces, $f \in \mathcal{H}_\Omega \cap \mathcal{I}_\Omega$ si y solo si este admite en Ω la descomposición

$$f = f_1 + f_2 + f_3\,\underline{x} + \underline{x} f_4,$$

donde f_1 y f_2 son monogénica a la izquierda y a la derecha respectivamente en Ω, mientras que f_3 y f_4 son funciones monogénicas bilaterales en el dominio.

Cuando m es par, surge la pregunta abierta de si es posible evadir la dificultad que existe en nuestro método para el caso de funciones k-vectoriales con $k = \frac{m}{2} \pm 1$ en el cual este degenera. Aún no se ha aclarado completamente esta cuestión. Sin embargo, aquí se presentan ejemplos no triviales de funciones $(\frac{m}{2}+1)$-vectoriales en $\mathcal{H}_\Omega \cap \mathcal{I}_\Omega$, que admiten la descomposición (2.46).

Ejemplo 2.5.1 *Supóngase que m es par y tómese $k = \frac{m}{2}+2$. Sea f_k una función k-vectorial monogénica. Entonces, $\underline{x} f_k(\underline{x})$ es inframonogénica y armónica.*

Además,

$$\underline{x} f_k(\underline{x}) = \underline{x} \bullet f_k(\underline{x}) + \underline{x} \wedge f_k(\underline{x}) =: \mathcal{P}(\underline{x}) + \mathcal{Q}(\underline{x}), \qquad (2.51)$$

donde $\mathcal{P}$ *y* $\mathcal{Q}$ *también son campos multivectoriales inframonogénicos y armónicos de grado* $\frac{m}{2}+1$ *y* $\frac{m}{2}+3$*, respectivamente. Esto último se deduce del Corolario 2.1.1.*

Como $\mathcal{Q}(\underline{x})$ *se puede descomponer por medio de* (2.5.1)*, este hecho junto con* (2.51) *permite obtener la descomposición deseada para* $\mathcal{P}$ *el cual es un campo* $(\frac{m}{2}+1)$*-vectorial inframonogénico y armónico que pertenece a la clase de funciones que no admite el uso directo del Corolario (2.5.1).*

De forma similar, puede construirse un ejemplo para campos $(\frac{m}{2}-1)$-vectoriales, inframonogénicos y armónicos simultáneamente que admiten una descomposición de tipo Almansi. No obstante, en general, el problema considerado en el caso par queda como problema abierto de esta investigación y debe ser objeto de futuros estudios.

Todos los resultados hasta aquí expuestos constituyen herramientas matemt́icas eficaces en la teoría de la elasticidad lineal, en particular en el estudio de la estructura de las soluciones del sistema homogéneo de Lamé-Navier, lo cual constituye la esencia del siguiente capítulo.

Capítulo 3

Aplicaciones a la teoría de la elasticidad lineal

En este capítulo se revela la interconexión entre las funciones inframonogénicas, las funciones armónicas y el campo de desplazamientos, solución de la ecuación homogénea de Lamé-Navier. El principal resultado es que se obtiene una descomposición aditiva de los desplazamientos en términos de una función armónica y de una inframonogénica. Los resultados fundamentales de este capítulo se recogen en el artículo ya publicado [23].

La teoría de la elasticidad lineal estudia los sólidos elásticos considerados como medios continuos y sometidos a pequeñas deformaciones (véase [16], [25], [27], [30]). Cuando un sólido se deforma bajo la acción de fuerzas aplicadas este cambia de forma y volumen. La posición de un punto del cuerpo antes de la deformación queda definida por el vector $\underline{x}$ y la posición luego de la deformación por el vector $\underline{R}(\underline{x})$, en cierto sistema de coordenadas. La función vectorial $\underline{u} = \underline{R}(\underline{x}) - \underline{x}$ se denomina *campo de desplazamientos.*

Cuando el cuerpo se deforma, cambian las distancias entre sus puntos: las variaciones relativas de longitud en el cuerpo están caracterizadas por un tensor de segundo orden, el *tensor deformación infinitesimal de Cauchy*, el cual está relacionado con el campo de desplazamientos por medio de la expresión

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i).$$

Obsérvese que la traza de la matriz que define el tensor, es la divergencia del campo de desplazamientos, que representa el cambio relativo de volumen.

La tensión se define como la fuerza por unidad de superficie [16]. Si una pequeña porción Δ_S sobre la superficie de un cuerpo sólido es sometida a una fuerza resultante $\Delta\mathfrak{F}$, entonces el vector tensión se define como el límite

$$\lim_{\Delta_S \to 0} \frac{\Delta\mathfrak{F}}{\Delta S},$$

donde se asume que este existe. Para cuantificar la distribución de tensiones y esfuerzos internos se requiere una magnitud tensorial, pues la tensión en cada punto depende de la orientación del vector normal al plano imaginario que intercepta al cuerpo en este. Este campo tensorial denominado tensor tensión de Cauchy se define dado un sistema de referencia ortogonal por una matriz simétrica cuyas componentes son

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

En el caso de un sólido lineal, homogéneo e isótropo, el tensor tensiones de Cauchy y el tensor deformación elástica están relacionados linealmente por medio de la ley de Hooke generalizada por

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\,\mathrm{div}u + 2\mu e_{ij}$$

donde δ_{ij} es la δ de Kronecker y λ, μ son los coeficientes de Lamé. Otras constantes elásticas que se usan frecuentemente son el módulo de Young (E), el coeficiente de Poisson (ν) y el módulo de compresibilidad (K). Sin embargo, bastan dos constantes para caracterizar a un sólido elástico lineal, homogéneo e isótropo.

En lo adelante, se hace uso de la siguiente relación entre las constantes de Lamé λ, μ y el coeficiente de Poisson

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)}.$$

Por razones termodinámicas, el coeficiente de Poisson solo admite valores en el intervalo $(-1, \frac{1}{2})$ [16]. Aunque en la práctica para la mayoría de los materiales $\nu > 0$, existen los así llamados materiales augéticos que poseen un coeficiente de Poisson negativo. El problema elástico consiste en encontrar los desplazamientos y las tensiones a partir de la forma original del sólido antes de la deformación, de las fuerzas actuantes sobre el mismo y de los desplazamientos impuestos en algunos puntos de su superficie. El problema elástico lineal está formado por un sistema de 15 ecuaciones diferenciales lineales con condiciones de contorno del cual resultan 15 incógnitas. En resumen:

1. Ecuaciones del equilibrio interno (3 ecuaciones)

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0,$$

   donde F_i son las componentes de las fuerzas de volumen.

2. Relación entre desplazamientos y deformaciones (6 ecuaciones)

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i).$$

3. Ecuación constitutiva o ley de Hooke generalizada (6 ecuaciones)

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \operatorname{div} u + 2\mu e_{ij},$$

y las incógnitas

1. Componentes del tensor deformaciones (6 por ser simétrico).

2. Componentes del tensor tensiones (6 por ser simétrico).

3. Componentes del campo de desplazamientos (3).

En notación operacional, este sistema general es
$\mathfrak{J} = \{u_i, e_{ij}, \sigma_{ij}; \lambda, \mu, F_i.\}$

La formulación del problema elástico en términos del campo de desplazamientos se obtiene si se hace uso de la ley de Hooke generalizada, la relación deformación-desplazamiento y se sustituye en las ecuaciones del equilibrio interno; esta es la ecuación de Lamé-Navier que en notación vectorial es

$$\mu \triangle u + (\mu + \lambda)\nabla(div(u)) = -F,$$

donde $\mu > 0$, $\frac{\lambda}{\mu} > -\frac{2}{3}$.

La teoría de funciones de una variable compleja, ha demostrado ser una técnica factible para el tratamiento de los problemas elásticos bidimensionales. El teorema de representación de Goursat establece que una función biarmónica se puede representar por medio de dos funciones holomorfas y vincula la teoría lineal de la elasticidad en $\mathbb{R}^2$ y al Análisis Complejo. Para el caso de los problemas tridimensionales la situación es mucho más compleja pues muchos resultados en el caso plano no tienen un equivalente obvio en $\mathbb{R}^3$. Como una generalización natural del Análisis Complejo, el Análisis de Clifford ha resultado ser un marco teórico prometedor para tratar los problemas tridimensionales.

3.1. Ecuación de Lamé-Navier

El campo de desplazamientos de un material elástico, isótropo y homogéneo sin fuerzas de volumen está descrito por el sistema homogéneo de Lamé-Navier

$$\mathcal{L}_{\lambda,\mu}\underline{u} := \mu\triangle\underline{u} + (\mu + \lambda)\nabla(\mathrm{div}\underline{u}) = 0. \tag{3.1}$$

Una solución general de este sistema para todos los valores admisibles de λ y μ se denomina *desplazamiento universal* o solución de equilibrio [30] en el sentido de que no es necesario conocer λ y μ para determinar estos desplazamientos. Esta es la más valiosa de todas las soluciones, pues esta en sí misma determina los parámetros.

Casos especiales de desplazamientos universales son los asociados a las deformaciones homogéneas, es decir, aquellas en las cuales el tensor de deformación infinitesimal de Cauchy es constante. Por ejemplo, la expansión y la contracción isotrópicas uniformes, cuyos campos de desplazamiento son respectivamente

$$u(\underline{x}) = \frac{\epsilon}{3}\underline{x},\ \epsilon > 0,\ \epsilon << 1,$$

$$u(\underline{x}) = \frac{\epsilon}{3}\underline{x},\ \epsilon < 0,\ |\epsilon| << 1.$$

La condición $|\epsilon| << 1$ es necesaria para poder trabajar en el marco de la teoría de la elasticidad lineal.

En esta tesis se presenta una reformulación cliffordiana de la ecuación de Lamé-Navier que muestra el estrecho nexo entre esta ecuación y las funciones inframonogénicas. En resumen, se obtienen los resultados siguientes:

1. La intersección
$$\bigcap_{\lambda,\mu} Ker[\mathcal{L}_{\lambda,\mu}],$$
tomada sobre todos los coeficientes admisibles de Lamé coincide con la clase de los campos simultáneamente inframonogénicos y armónicos que es precisamente la de los desplazamientos universales.

2. Toda solución $\underline{u}$ de (3.1) se descompone de la siguiente forma
$$\underline{u} = \underline{h} + \underline{i},$$
donde $\underline{h}$ e $\underline{i}$ son armónica e inframonogénica, respectivamente. Además, esta descomposición es única salvo un desplazamiento universal.

3. Para cualquier campo armónico $\underline{h}$, existe un campo inframonogénico $\underline{i}$ tal que $\underline{h} + \underline{i}$ resuelve (3.1). Además, esta función inframonogénica *conjugada* es única salvo una solución de equilibrio.

4. Para cualquier campo vectorial inframonogénico $\underline{i}$, existe un campo armónico $\underline{h}$ tal que $\underline{h} + \underline{i}$ resuelve (3.1). Además, esta función armónica *conjugada* es única salvo el desplazamiento universal.

3.1.1. Reformulación en términos del operador que define las funciones inframonogénicas

Se consideran funciones del tipo

$$u : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_{0,3}$$

Para este caso, los operadores $\partial_{\underline{x}}^2(.)$ y $\partial_{\underline{x}}(.)\partial_{\underline{x}}$ que actúan sobre campos vectoriales admiten la representación

$$\partial_{\underline{x}}^2 \underline{u} = -\nabla(\mathrm{div}\underline{u}) + \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\underline{u}),$$

$$\partial_{\underline{x}} \underline{u} \partial_{\underline{x}} = -\nabla(\mathrm{div}\underline{u}) - \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\underline{u}),$$

y por tanto

$$\nabla(\mathrm{div}\underline{u}) = -\frac{1}{2}(\partial_{\underline{x}}^2 \underline{u} + \partial_{\underline{x}} \underline{u} \partial_{\underline{x}}).$$

Como consecuencia de este simple hecho, la ecuación de Lamé (3.1) se puede reescribir de la forma

$$\frac{(\mu+\lambda)}{2} \partial_{\underline{x}} \underline{u} \partial_{\underline{x}} + (\mu + \frac{\mu+\lambda}{2}) \partial_{\underline{x}}^2 \underline{u} = 0.$$

Ahora, se denota $\alpha = \frac{\mu+\lambda}{2}$, $\beta = \frac{3\mu+\lambda}{2}$ y se introduce el operador

$$\mathcal{L}_{\lambda,\mu}^* \underline{u} := \alpha \partial_{\underline{x}} \underline{u} \partial_{\underline{x}} + \beta \partial_{\underline{x}}^2 \underline{u}.$$

Además, las restricciones físicas sobre las constantes λ y μ en la ecuación de Lamé-Navier implican que $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$.

De aquí se infiere que la ecuación de Lamé-Navier no se reduce a la ecuación $\partial_{\underline{x}} \underline{u} \partial_{\underline{x}} = 0$ ni a la ecuación $\partial_{\underline{x}} \partial_{\underline{x}} \underline{u} = 0$.

Note que

$$\mathcal{L}_{\lambda,\mu}^* \underline{u} = \mathcal{L}_{\lambda,\mu} \underline{u},$$

y como el operador $\mathcal{L}_{\lambda,\mu}^*$ puede actuar en general sobre funciones que toman valores en el álgebra de Clifford $\mathbb{R}_{0,3}$.

A partir de este punto, la ecuación $\mathcal{L}_{\lambda,\mu}^* u = 0$ se denomina *ecuación de Lamé-Navier generalizada* y el operador $\mathcal{L}_{\lambda,\mu}^*$ *operador de Lamé-Navier* *generalizado.*

Es de notar que las soluciones de la ecuación de Lamé-Navier generalizada son trimonogénicas bilaterales y por tanto, también lo son las soluciones de la ecuación de Lamé-Navier clásica.

En efecto, si

$$\alpha\partial_{\underline{x}}u\partial_{\underline{x}} + \beta\partial_{\underline{x}}^2 u = 0$$

y se aplica el operador $\partial_{\underline{x}}$ por la izquierda y por la derecha (lo cual es posible porque $u \in C^\infty(\Omega)$, como se verá más adelante), se obtiene

$$\alpha\partial_{\underline{x}}^2 u\partial_{\underline{x}} + \beta\partial_{\underline{x}}^3 u = 0,$$
$$\alpha\partial_{\underline{x}}u\partial_{\underline{x}}^2 + \beta\partial_{\underline{x}}^2 u\partial_{\underline{x}} = 0,$$

$$\alpha u\partial_{\underline{x}}^3 + \beta\partial_{\underline{x}}^3 u = 0, \tag{3.2}$$

$$\alpha\partial_{\underline{x}}^3 u + \beta u\partial_{\underline{x}}^3 = 0. \tag{3.3}$$

Multiplicando (3.2) por β y (3.3) por $-\alpha$ y sumando, se obtiene

$$(\beta^2 - \alpha^2)\partial_{\underline{x}}^3 u = 0$$

lo cual implica que $\partial_{\underline{x}}^3 u = 0$. De forma análoga, multiplicando (3.2) por α y (3.3) por $-\beta$ y sumando, da

$$(\alpha^2 - \beta^2)u\partial_{\underline{x}}^3 = 0,$$

y por tanto $\partial_{\underline{x}}^3 u = 0$.

Así u es trimonogénica a ambos lados, una clase de funciones que refina a la de las biarmónicas.

En lo adelante, se hace uso de las relaciones entre α, β y el coeficiente de Poisson. Obsérvese que

$$\mu + \lambda = \frac{\mu}{1-2\nu},$$

donde

$$\alpha = \frac{\mu}{2(1-2\nu)}.$$

Por otro lado,

$$\beta = \mu + \alpha = \mu(1 + \frac{1}{2(1-2\nu)}).$$

Es útil en lo que sigue escribir la ecuación de Lamé con el coeficiente de Poisson. Para esto, considérese la ecuación no homogénea

$$\alpha\partial_{\underline{x}}\underline{u}(\underline{x})\partial_{\underline{x}} + \beta\partial_{\underline{x}}^2\underline{u}(\underline{x}) = -\underline{f}(\underline{x}),$$

donde $\underline{f}$ representa las fuerzas de volumen. Sustituyendo los valores correspondientes de α y β resulta

$$\frac{\mu}{2(1-2\nu)}\partial_{\underline{x}}\underline{u}(\underline{x})\partial_{\underline{x}} + \mu(1 + \frac{1}{2(1-2\nu)})\partial_{\underline{x}}^2\underline{u}(\underline{x}) = -\underline{f}(\underline{x}).$$

$$\frac{1}{2(1-2\nu)}\partial_{\underline{x}}\underline{u}(\underline{x})\partial_{\underline{x}} + (1 + \frac{1}{2(1-2\nu)})\partial_{\underline{x}}^2\underline{u}(\underline{x}) = -\frac{1}{\mu}\underline{f}(\underline{x}).$$

$$\partial_{\underline{x}}\underline{u}(\underline{x})\partial_{\underline{x}} + (3-4\nu)\partial_{\underline{x}}^2\underline{u}(\underline{x}) = \frac{2(2\nu-1)}{\mu}f(\underline{x}).$$

Para el caso en que no haya fuerzas de volumen, la ecuación de Lamé-Navier queda simplemente

$$\partial_{\underline{x}}\underline{u}(\underline{x})\partial_{\underline{x}} + (3-4\nu)\partial_{\underline{x}}^2\underline{u}(\underline{x}) = 0.$$

Observación 3.1.1 *Si se hace uso de la reformulación cliffordiana de la ecuación de Lamé-Navier se puede considerar el operador de Lamé-Navier iterado.*

$$\mathcal{L}^*_{\lambda,\mu}(\mathcal{L}^*_{\lambda,\mu}u) = \alpha\partial_{\underline{x}}(\alpha\partial_{\underline{x}}u\partial_{\underline{x}} + \beta\partial_{\underline{x}}^2u)\partial_{\underline{x}} + \beta\partial_{\underline{x}}^2(\alpha\partial_{\underline{x}}u\partial_{\underline{x}} + \beta\partial_{\underline{x}}^2u) =$$

$$= (\alpha^2+\beta^2)\partial_{\underline{x}}^4u + 2\alpha\beta\partial_{\underline{x}}^3u\partial_{\underline{x}}.$$

Esto muestra cómo surge naturalmente la consideración de las funciones infrapolimonogénicas para abordar el operador de Lamé-Navier iterado, aunque esta idea no se desarrolla en la presente investigación.

3.1.2. Teorema de unicidad

En la literatura se han probado varios teoremas de unicidad en la teoría de la elasticidad lineal [13]. Uno de los resultados de la presente investigación es el uso de la reformulación del sistema de Lamé-Navier por medio del operador $\partial_{\underline{x}}(.)\partial_{\underline{x}}$ para probar la unicidad de la solución de un problema elástico formulado en términos del campo de desplazamiento en la clase $C^2(\Omega)$.

Considérese el siguiente problema de contorno de tipo Dirichlet para la ecuación de Lamé-Navier

$$\begin{cases} \mu\Delta\underline{u} + (\mu+\lambda)\nabla(\mathrm{div}\underline{u}) = 0 \ \text{ en } \Omega \\ \underline{u}|_{\partial\Omega} = \underline{g}. \end{cases} \tag{3.4}$$

Teorema 3.1.1 *El problema de contorno (3.4) posee solución única en la clase* $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$.

Demostración.
Si el problema (3.4) admite dos soluciones distintas, $\underline{u_1}$ y $\underline{u_2}$, entonces en virtud de la linealidad de la ecuación de Lamé-Navier el campo vectorial $\underline{u} = \underline{u_1} - \underline{u_2}$ es solución del problema

$$\begin{cases} \mu\Delta\underline{u} + (\mu+\lambda)\nabla(\mathrm{div}\underline{u}) = 0 \ \text{ en } \Omega. \\ \underline{u}|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

De esta forma basta probar que $\underline{u} \equiv 0$ en Ω.

Si se usa la fórmula de Stokes (1.6) y la reformulación cliffordiana de la ecuación de Lamé-Navier presentada anteriormente, se consideran las siguientes integrales

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\underline{u}(\underline{y})\partial_{\underline{y}})(\underline{u}(\underline{y})\partial_{\underline{y}})dV(\underline{y}) + \int_{\Omega} \underline{u}(\underline{y})(\partial_{\underline{y}}\underline{u}(\underline{y})\partial_{\underline{y}})dV(\underline{y}) = \\ = \int_{\Gamma} \underline{u}(\underline{y})\underline{n}(y)\underline{u}(\underline{y})\partial_{\underline{y}}dS(\underline{y}). \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} (\underline{u}(\underline{y})\partial_{\underline{y}})(\underline{u}(\underline{y})\partial_{\underline{y}})dV(\underline{y}) + \int_{\Omega} \underline{u}(\underline{y})\partial_{\underline{y}}^2\underline{u}(\underline{y})dV(\underline{y}) =$$

$$= \int_{\Gamma} \underline{u}(\underline{y})\underline{n}(y)\partial_{\underline{y}}\underline{u}(\underline{y})dS(\underline{y}).$$

Luego de multiplicar la primera identidad por α, la segunda por β y sumando, se obtiene

$$\int_{\Omega} \alpha(\underline{u}(\underline{y})\partial_{\underline{y}})^2 + \beta(\underline{u}(\underline{y})\partial_{\underline{y}})(\partial_{\underline{y}}\underline{u}(\underline{y}))dV(\underline{y}) + \int_{\Omega} \alpha\partial_{\underline{y}}\underline{u}(\underline{y})\partial_{\underline{y}} +$$

$$+\beta\partial_{\underline{y}}^2\underline{u}(\underline{y})dV(\underline{y}) = \int_{\Gamma} \alpha\underline{u}(\underline{y})\underline{n}(\underline{y})(\underline{u}(\underline{y})\partial_{\underline{y}})dS(\underline{y}) +$$

$$+ \int_{\Gamma} \beta\underline{u}(\underline{y})\underline{n}(\underline{y})\partial_{\underline{y}}(\underline{u}(\underline{y}))dS(\underline{y}).$$

A partir de las hipótesis esta última integral se simplifica y resulta

$$\int_{\Omega} \alpha(\underline{u}(\underline{y})\partial_{\underline{y}})^2 + \beta(\underline{u}(\underline{y})\partial_{\underline{y}})(\partial_{\underline{y}}\underline{u}(\underline{y}))dV(\underline{y}) = 0. \tag{3.6}$$

Como $\underline{u}(\underline{y})\partial_{\underline{y}} = -\mathrm{div}\underline{u}(\underline{y}) - \mathrm{rot}\underline{u}(\underline{y})$, resulta

$$(\underline{u}(\underline{y})\partial_{\underline{y}})^2 = (\mathrm{div}\underline{u}(\underline{y}))^2 - |\mathrm{rot}\underline{u}(\underline{y})|^2 + 2\mathrm{div}\underline{u}(\underline{y})\mathrm{rot}\underline{u}(\underline{y}),$$

y además

$$\begin{aligned}(\underline{u}(\underline{y})\partial_{\underline{y}})(\partial_{\underline{y}}\underline{u}(\underline{y})) &= (-\mathrm{div}\underline{u}(\underline{y}) - \mathrm{rot}\underline{u}(\underline{y}))(-\mathrm{div}\underline{u}(\underline{y}) + \mathrm{rot}\underline{u}(\underline{y})) = \\ &= (\mathrm{div}\underline{u}(\underline{y}))^2 + |\mathrm{rot}\underline{u}(\underline{y})|^2 - \mathrm{div}(\mathrm{rot}\underline{u}(\underline{y})) + \mathrm{div}(\mathrm{rot}\underline{u}(\underline{y})) = \\ &= (\mathrm{div}\underline{u}(\underline{y}))^2 + |\mathrm{rot}\underline{u}(\underline{y})|^2.\end{aligned}$$

Si se toma la parte escalar en la identidad (3.6) se obtiene

$$\mathrm{Sc}(\int_{\Omega} \alpha(\underline{u}(\underline{y})\partial_{\underline{y}})^2 + \beta(\underline{u}(\underline{y})\partial_{\underline{y}})(\partial_{\underline{y}}\underline{u}(\underline{y}))dV(\underline{y})) = 0. \tag{3.7}$$

Luego,

$$\int\limits_{\Omega} (\alpha+\beta)(\mathrm{div}\underline{u}(\underline{y}))^2 + (\beta-\alpha)|\mathrm{rot}\underline{u}(\underline{y})|^2 dV(\underline{y})) = 0. \tag{3.8}$$

Si $\beta \leq \alpha$ entonces $3\mu+\lambda \leq \mu+\lambda$, y por tanto $2\mu \leq 0$, lo cual es falso porque $\mu > 0$.

Si $\beta \leq -\alpha$, entonces $3\mu+\lambda \leq -\mu-\lambda$, y por tanto $4\mu \leq -2\lambda$, $2\mu \leq -\lambda$, $\frac{\lambda}{\mu} \leq -2$, lo cual es falso porque $\frac{\lambda}{\mu} > -\frac{2}{3}$.

De esta forma, $\beta \geq \alpha$ y $\beta \geq -\alpha$, de donde se deduce que el integrando en (3.8) es no negativo.

Entonces,

$$(\alpha+\beta)(\mathrm{div}\,\underline{u})^2 + (\beta-\alpha)|\mathrm{rot}\,\underline{u}|^2 = 0,$$

de esta forma

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\,\underline{u} &= 0 \\ \mathrm{rot}\,\underline{u} &= 0. \end{aligned}$$

Esto es equivalente a decir que

$$\partial_{\underline{x}}\underline{u} = 0 \text{ en } \Omega,\ \ \underline{u}|_{\partial\Omega} = 0.$$

De aquí, se deduce el resultado esperado, es decir, $\underline{u} = 0$ en Ω. ■

3.1.3. Las funciones inframonogénicas y los desplazamientos universales

Como se ha notado, no existen valores particulares de las constantes de Lamé λ y μ que reduzcan el sistema (3.1) a la ecuación $\partial_{\underline{x}}\partial_{\underline{x}}\underline{u} = 0$ ni a la ecuación $\partial_{\underline{x}}\underline{u}\partial_{\underline{x}} = 0$. Aunque en virtud de la reformulación presentada, toda $\underline{u} \in \underline{\mathcal{H}} \cap \underline{\mathcal{I}}$ es una solución de la ecuación de Lamé-Navier, con independencia de las constantes λ y μ, lo que significa que es un desplazamiento universal (ver detalles en [30]). Un resultado de esta tesis es el de identificar la clase $\underline{\mathcal{H}} \cap \underline{\mathcal{I}}$ con la clase de los desplazamientos universales, lo cual se expresa en la siguiente proposición.

Proposición 3.1.1 *Se cumple la siguiente identidad*

$$\bigcap_{\lambda,\mu} Ker[\mathcal{L}_{\lambda,\mu}] = \underline{\mathcal{H}} \cap \underline{\mathcal{I}},$$

Demostración.
En efecto, sean $\nu_1 \neq \nu_2$ coeficientes de Poisson y $\underline{u}^*$ un campo de desplazamiento que satisface simultáneamente las ecuaciones

$$\partial_{\underline{x}}\underline{u}^*(\underline{x})\partial_{\underline{x}} + (3 - 4\nu_1)\partial_{\underline{x}}^2\underline{u}^*(\underline{x}) = 0. \tag{3.9}$$

$$\partial_{\underline{x}}\underline{u}^*(\underline{x})\partial_{\underline{x}} + (3 - 4\nu_2)\partial_{\underline{x}}^2\underline{u}^*(\underline{x}) = 0. \tag{3.10}$$

Restando (3.10) de (3.9) queda

$$4(\nu_2 - \nu_1)\partial_{\underline{x}}^2\underline{u}^*(\underline{x}) = 0,$$

lo cual implica que

$$\partial_{\underline{x}}^2\underline{u}^*(\underline{x}) = 0,$$

y por tanto

$$\partial_{\underline{x}}\underline{u}^*(\underline{x})\partial_{\underline{x}} = 0. \quad \blacksquare$$

3.1.4. Una descomposición aditiva para las soluciones del sistema homogéneo de Lamé-Navier

Las funciones inframonogénicas, en cierta forma, expresan la diferencia entre las funciones armónicas y las soluciones del sistema homogéneo de Lamé-Navier.

En lo adelante se denota por $\mathcal{H}(\Omega)$ y $\mathcal{I}(\Omega)$ el espacio de las funciones armónicas y el de las inframonogénicas en Ω respectivamente. Además, $\underline{\mathcal{H}}(\Omega)$ e $\underline{\mathcal{I}}(\Omega)$ indican el espacio de los campos vectoriales armónicos y el de los campos vectoriales inframonogénicos en Ω, respectivamente.

Teorema 3.1.2 *Si el campo vectorial $\underline{u}$ satisface en $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, el sistema de Lamé-Navier* (3.1)*, entonces este admite en Ω la representación*

$$\underline{u} = \underline{h} + \underline{i},$$

donde $\underline{h} \in \underline{\mathcal{H}}(\Omega)$ y $\underline{i} \in \underline{\mathcal{I}}(\Omega)$. Además, esta representación es única, salvo un campo vectorial en $\underline{\mathcal{H}}(\Omega) \cap \underline{\mathcal{I}}(\Omega)$.

Demostración. Si se supone que $\underline{u}$ satisface (3.1), entonces

$$\mathcal{L}^*_{\lambda,\mu}\underline{u} := \alpha\partial_{\underline{x}}\underline{u}\partial_{\underline{x}} + \beta\partial^2_{\underline{x}}\underline{u} = 0.$$

Sea $g = \alpha\partial_{\underline{x}}\,\underline{u} + \beta\underline{u}\partial_{\underline{x}}$, la cual es una función monogénica a la derecha, definida sobre Ω y con valores en $\mathbb{R}_{0,3}$. Además, en virtud del Lema 2.2.1-(1), se tiene $(\underline{x}\,g)\partial_{\underline{x}} = \Psi(g)$; entonces,

$$\partial_{\underline{x}}(\underline{x}\,g)\partial_{\underline{x}} = -\Psi(\partial_{\underline{x}}g) = -\partial_{\underline{x}}g,$$

y

$$\partial^2_{\underline{x}}(\underline{x}\,g) = -2\partial_{\underline{x}}g,$$

donde se usa el Lema 2.2.1-(2,4).

Como consecuencia,

$$\partial_{\underline{x}}(\underline{x}\,g)\partial_{\underline{x}} = -\alpha\partial^2_{\underline{x}}\,\underline{u} - \beta\partial_{\underline{x}}\,\underline{u}\partial_{\underline{x}} = (\frac{\alpha^2}{\beta} - \beta)\partial_{\underline{x}}\,\underline{u}\partial_{\underline{x}},$$

y por tanto,

$$\partial_{\underline{x}}(\underline{x}\,g - (\frac{\alpha^2}{\beta} - \beta)\underline{u})\partial_{\underline{x}} = 0. \tag{3.11}$$

De manera análoga, se obtiene

$$\partial^2_{\underline{x}}(\underline{x}\,g - (\frac{2\beta^2}{\alpha} - 2\alpha)\underline{u}) = 0. \tag{3.12}$$

Sea $I := \underline{x}\,g - (\frac{\alpha^2}{\beta} - \beta)\underline{u}$ y $H := \underline{x}\,g - (\frac{2\beta^2}{\alpha} - 2\alpha)\underline{u}$. Claro, desde (3.11)-(3.12) $I \in \mathcal{I}$, $H \in \mathcal{H}$ y

$$(\frac{\alpha^2}{\beta} - \beta - \frac{2\beta^2}{\alpha} + 2\alpha)\underline{u} = H - I.$$

Ahora se prueba que $\frac{\alpha^2}{\beta} - \beta - \frac{2\beta^2}{\alpha} + 2\alpha \neq 0$, o equivalentemente, que

$$(\alpha + 2\beta)(\alpha^2 - \beta^2) \neq 0.$$

En efecto, si $\alpha + 2\beta = 0$ se tiene $3\frac{\lambda}{\mu} = -7$ y entonces $\frac{\lambda}{\mu} < -\frac{2}{3}$, lo cual contradice las restricciones físicas sobre los parámetros de Lamé λ y μ. De manera semejante, la suposición $\alpha^2 - \beta^2 = 0$ trae una contradicción.

Por tanto, se tiene

$$\underline{u} = \underline{h} + \underline{i}, \tag{3.13}$$

donde

$$h = (\frac{\alpha^2}{\beta} - \beta - \frac{2\beta^2}{\alpha} + 2\alpha)^{-1}H,\ i = -(\frac{\alpha^2}{\beta} - \beta - \frac{2\beta^2}{\alpha} + 2\alpha)^{-1}I.$$

Como $h \in \mathcal{H}$ y $i \in \mathcal{I}$, la representación deseada sigue de la Proposición 2.1.1 y de tomar la parte 1-vectorial a ambos lados de (3.13).

La demostración de la segunda parte es obvia. ■

Este último resultado es cierto aún para un campo bivectorial $[u]_2$, pues en este caso se tiene $\Psi([u]_2) = [u]_2$ (ver Proposición 2.1.1-(4)). Lo mismo ocurre para funciones escalares y pseudoescalares en $Ker[\mathcal{L}^*_{\lambda,\mu}]$, las que son automáticamente armónicas. Como consecuencia, el siguiente:

Teorema 3.1.3 *Una función u con valores en $\mathbb{R}_{0,3}$ que satisface en Ω la ecuación $\mathcal{L}^*_{\lambda,\mu}u = 0$ admite en Ω la descomposición*

$$u = h + i,$$

donde $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $i \in \mathcal{I}(\Omega)$. Además, esta representación es única salvo una función en $\mathcal{H}(\Omega) \cap \mathcal{I}(\Omega)$.

Dada una función armónica h, es posible encontrar una función inframonogénica i tal que $u = h + i$ es solución de $\mathcal{L}^*_{\lambda,\mu}u = 0$.

Teorema 3.1.4 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ y $h \in \mathcal{H}(\Omega)$. Entonces, existe una función inframonogénica $i \in \mathcal{I}(\Omega)$ tal que $h + i \in Ker[\mathcal{L}^*_{\lambda,\mu}]$. Además, i se puede representar como $i = \frac{\alpha}{2\beta}(h + (\partial_{\underline{x}} h)\underline{x})$.*

Demostración. Un cálculo directo muestra que

$$\partial_{\underline{x}}\, i\partial_{\underline{x}} = \frac{\alpha}{2\beta}\partial_{\underline{x}}\, h\partial_{\underline{x}} + \frac{\alpha}{2\beta}\partial_{\underline{x}}((\partial_{\underline{x}}\, h)\underline{x})\partial_{\underline{x}} = \frac{\alpha}{2\beta}\partial_{\underline{x}}\, h\partial_{\underline{x}} + \frac{\alpha}{2\beta}\Psi(\partial_{\underline{x}}\, h)\partial_{\underline{x}} =$$
$$= \frac{\alpha}{2\beta}\partial_{\underline{x}}\, h\partial_{\underline{x}} + \frac{\alpha}{2\beta}\Psi(\partial_{\underline{x}}\, h\partial_{\underline{x}}) = \frac{\alpha}{2\beta}\partial_{\underline{x}}\, h\partial_{\underline{x}} - \frac{\alpha}{2\beta}\partial_{\underline{x}}\, h\partial_{\underline{x}} = 0.$$

Por otro lado,

$$\mathcal{L}^*_{\lambda,\mu}(h+i) = \alpha\partial_{\underline{x}}\, h\partial_{\underline{x}} + \beta\, \partial^2_{\underline{x}}\, i = \alpha\partial_{\underline{x}}\, h\partial_{\underline{x}} + \frac{\alpha\beta}{2\beta}\, \partial^2_{\underline{x}}((\partial_{\underline{x}}\, h)\underline{x}) =$$
$$= \alpha\partial_{\underline{x}}\, h\partial_{\underline{x}} + \frac{\alpha}{2}\, \partial_{\underline{x}}(\Psi(\partial_{\underline{x}}\, h)) = \alpha\partial_{\underline{x}}\, h\partial_{\underline{x}} + \frac{\alpha}{2}(-2\partial_{\underline{x}}\, h\partial_{\underline{x}}) =$$
$$= \alpha\partial_{\underline{x}}\, h\partial_{\underline{x}} - \alpha\partial_{\underline{x}}\, h\partial_{\underline{x}} = 0.$$

Como consecuencia, i es inframonogénica y $h+i$ pertenece a $Ker[\mathcal{L}^*_{\lambda,\mu}]$. ■

El Teorema 3.1.4 permite construir soluciones de la ecuación de Lamé-Navier generalizada a partir de una función armónica. Un resultado análogo para construir soluciones a partir de una función inframonogénica lo establece el siguiente teorema.

Teorema 3.1.5 *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *y* $i \in \mathcal{I}(\Omega)$. *Entonces, existe una función armónica* $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ *tal que* $h + i \in Ker[\mathcal{L}^*_{\lambda,\mu}]$. *Además,* h *se puede representar como* $h = \frac{\beta}{\alpha}(2i + (i\partial_{\underline{x}})\underline{x})$.

Demostración. Sea $h = \frac{\beta}{\alpha}(2i + (i\partial_{\underline{x}})\underline{x})$. Entonces, $\frac{\alpha}{\beta}\partial_{\underline{x}}\, h = 2\partial_{\underline{x}}\, i + \Psi(i\partial_{\underline{x}})$ y $\frac{\alpha}{\beta}\partial^2_{\underline{x}}\, h = 2\partial^2_{\underline{x}}\, i - 2\partial^2_{\underline{x}}\, i = 0$. Por tanto, h es armónica.

Por otro lado, $\Psi(i) + h$ pertenece a $Ker[\mathcal{L}^*_{\lambda,\mu}]$. En efecto,

$$\mathcal{L}^*_{\lambda,\mu}(\Psi(i)+h) = \beta\partial^2_{\underline{x}}(\Psi(i)) + \beta\partial_{\underline{x}}\,(2i + (i\partial_{\underline{x}})\underline{x})\partial_{\underline{x}} =$$
$$= \beta\partial^2_{\underline{x}}(\Psi(i)) + \beta\partial_{\underline{x}}[(i\partial_{\underline{x}})\underline{x}]\partial_{\underline{x}} = \beta\partial^2_{\underline{x}}(\Psi(i)) + \beta(\Psi(i\partial_{\underline{x}}))\partial_{\underline{x}} =$$
$$= \beta\partial^2_{\underline{x}}(\Psi(i)) - \beta\partial^2_{\underline{x}}(\Psi(i)) = 0,$$

donde se usa el Lema 2.2.1-(1-3).

Por el Lema 2.2.1-(4) se tiene:

$$\Psi(i) = -3[i]_0 + [i]_1 + [i]_2 - 3[i]_3 = i - 4[i]_0 - 4[i]_3.$$

Como i es inframonogénica, $[i]_0$ y $[i]_3$ son simultáneamente armónicas e inframonogénicas. Entonces, se obtiene $h + i \in Ker[\mathcal{L}^*_{\lambda,\mu}]$. ■

El siguiente corolario del Teorema 3.1.4 permite construir soluciones del sistema homogéneo de Lamé-Navier clásico a partir de un campo vectorial armónico.

Corolario 3.1.1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ y $\underline{h} \in \underline{\mathcal{H}}(\Omega)$. Entonces, existe un campo vectorial inframonogénico $\underline{i} \in \underline{\mathcal{I}}(\Omega)$ tal que $\underline{h} + \underline{i} \in Ker[\mathcal{L}_{\lambda,\mu}]$.*

Demostración. Sea $\underline{h} \in \underline{\mathcal{H}}(\Omega)$. Por el Teorema 3.1.4 tenemos que $\underline{h} + i \in Ker[\mathcal{L}^*_{\lambda,\mu}]$, donde

$$i = \frac{\alpha}{2\beta}(\underline{h} + (\partial_{\underline{x}}\, \underline{h})\underline{x}). \tag{3.14}$$

Si se considera (3.14), $[i]_0 = [i]_2 = 0$ y entonces $i = [i]_1 + [i]_3$. Como i es inframonogénica también lo son $\underline{i} = [i]_1$ y $[i]_3$. Además, la estructura pseudo-escalar de $[i]_3$ fuerza a esta a ser armónica. Por tanto, tenemos $\underline{h} + \underline{i} \in Ker[\mathcal{L}^*_{\lambda,\mu}]$ y así $\underline{h} + \underline{i} \in Ker[\mathcal{L}_{\lambda,\mu}]$. ■

De forma análoga, el siguiente corolario del Teorema 3.1.5, permite construir soluciones de la ecuación homogénea de Lamé-Navier a partir de un campo vectorial inframonogénico.

Corolario 3.1.2 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ y $\underline{i} \in \underline{\mathcal{I}}(\Omega)$. Entonces, existe un campo vectorial armónico $\underline{h} \in \underline{\mathcal{H}}(\Omega)$ tal que $\underline{h} + \underline{i} \in Ker[\mathcal{L}_{\lambda,\mu}]$.*

Las notaciones $C_h(i)$ y $C_i(h)$ se introducen para denotar la conjugada armónica y la conjugada inframonogénica de la funciones i y h respectivamente. Es decir

$$C_h(i) = \frac{\beta}{\alpha}(2i + (i\partial_{\underline{x}})\underline{x})$$

,

$$C_i(h) = \frac{\alpha}{2\beta}(h + (\partial_{\underline{x}} h)\underline{x})$$

.

Una propiedad interesante de las conjugadas C_i y C_h se expresa en el siguiente lema

Lema 3.1.1 *Para todo campo vectorial $\underline{i}$ inframonogénico en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ se cumple la identidad $C_{\underline{i}}(C_h(\underline{i})) = \underline{i}$.*

Demostración.

$$C_iC_h(\underline{i}(\underline{x})) = \frac{\alpha}{2\beta}(\frac{\beta}{\alpha}(2\underline{i}(\underline{x}) + (\underline{i}(\underline{x})\partial_{\underline{x}})\underline{x}) + \partial_{\underline{x}}[\frac{\beta}{\alpha}(2\underline{i}(\underline{x}) + (\underline{i}(\underline{x})\partial_{\underline{x}})\underline{x})]) =$$

$$= \underline{i}(\underline{x}) + \frac{1}{2}(\underline{i}(\underline{x})\partial_{\underline{x}})\underline{x} + \frac{1}{2}[2\partial_{\underline{x}}\underline{i}(\underline{x}) + \Psi(\underline{i}(\underline{x})\partial_{\underline{x}})]\underline{x} =$$

$$= \underline{i}(\underline{x}) + \frac{1}{2}(\underline{i}(\underline{x})\partial_{\underline{x}})\underline{x} + (\partial_{\underline{x}}\underline{i}(\underline{x}))\underline{x} + \frac{1}{2}\Psi(\underline{i}(\underline{x})\partial_{\underline{x}})\underline{x}.$$

Si se tiene en cuenta las siguientes propiedades de Ψ

$$\Psi(\underline{i}(\underline{x})\partial_{\underline{x}}) = -2\partial_{\underline{x}}\underline{i}(\underline{x}) - (\Psi(\underline{i}(\underline{x}))\partial_{\underline{x}} \text{ y } \Psi(\underline{i}(\underline{x})) = \underline{i}(\underline{x}),$$

resulta

$$C_iC_h(\underline{i}(\underline{x})) = \underline{i}(\underline{x}) + \frac{1}{2}(\underline{i}(\underline{x})\partial_{\underline{x}})\underline{x} + (\partial_{\underline{x}}\underline{i}(\underline{x}))\underline{x} - (\partial_{\underline{x}}\underline{i}(\underline{x}))\underline{x} - \frac{1}{2}\Psi(\underline{i}(\underline{x})\partial_{\underline{x}})\underline{x} = \underline{i}(\underline{x}). \quad \blacksquare$$

En general, $C_h(C_i(\underline{h})) \neq \underline{h}$, lo cual se muestra mediante el siguiente contraejemplo

$$\underline{h}(\underline{x}) = x_2e_1,$$

$$\begin{aligned}
\partial_{\underline{x}}\underline{h}(\underline{x}) &= e_2e_1 \\
C_i(\underline{h}(\underline{x})) &= \frac{\alpha}{2\beta}(x_2e_1 + e_2e_1\underline{x}) = \\
&= \frac{\alpha}{2\beta}(x_2e_1 + e_2e_1e_1x_1 + e_2e_1e_2x_2 + e_2e_1e_3x_3) = \\
&= \frac{\alpha}{\beta}x_2e_1 - \frac{\alpha}{2\beta}x_1e_2 - \frac{\alpha}{2\beta}x_3e_1e_2e_3.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
(C_i(\underline{h}(\underline{x})))\partial_{\underline{x}} &= -\frac{\alpha}{2\beta}e_2e_1 + \frac{\alpha}{\beta}e_1e_2 - \frac{\alpha}{2\beta}e_1e_2e_3e_3 = \\
&= \frac{\alpha}{2\beta}e_1e_2 + \frac{\alpha}{\beta}e_1e_2 + \frac{\alpha}{2\beta}e_1e_2 = \\
&= \frac{2\alpha}{\beta}e_1e_2.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$C_h(C_i(\underline{h}(\underline{x}))) = \frac{\beta}{\alpha}[\frac{2\alpha}{\beta}x_2e_1 - \frac{\alpha}{\beta}x_1e_2\frac{\alpha}{\beta}x_3e_1e_2e_3 + (\frac{2\alpha}{\beta}e_1e_2)\underline{x}] =$$
$$= 2x_2e_1 - x_1e_2 - x_3e_1e_2e_3 + 2e_1e_2\underline{x}.$$

Por otro lado,

$$2e_1e_2\underline{x} = 2(x_1e_1e_2e_1 + x_2e_1e_2e_2 + x_3e_1e_2e_3) =$$
$$= 2(-x_2e_1 + x_1e_2 + x_3e_1e_2e_3).$$

Entonces,

$$C_h(C_i(\underline{h}(\underline{x}))) = 2x_2e_1 - x_1e_2 - x_3e_1e_2e_3 -$$
$$-2x_2e_1 + 2x_1e_2 + 2x_3e_1e_2e_3 =$$
$$= x_1e_2 + x_3e_1e_2e_3 \neq h(\underline{x}).$$

Los operadores C_h y C_i son muy valiosos, pues permiten construir soluciones tanto de la ecuación de Lamé-Navier generalizada como de la clásica a partir de una función inframonogénica o de una función armónica dada. A continuación se exponen algunos ejemplos en esta dirección.

Ejemplo 3.1.1 *Sea Ω un dominio de Jordan con frontera suave Γ y sea $f \in C^1(\Gamma)$, considérese la función inframonogénica en Ω dada por la transformada de Cauchy inframonogénica de f, es decir,*

$$i(\underline{x}) := \mathcal{C}_\Gamma^{\mathbf{infra}} f(\underline{x}).$$

Entonces

$$C_h(i(\underline{x})) = \frac{\beta}{\alpha}(2i(\underline{x}) + (i(\underline{x})\partial_{\underline{x}})\underline{x}) =$$
$$= \frac{\beta}{\alpha}(2\mathcal{C}_\Gamma^{\mathbf{infra}} f(\underline{x}) + (\mathcal{C}_\Gamma^l f(\underline{x}))\underline{x}).$$

Así,

$$i(\underline{x}) + h(\underline{x}) = (1 + \frac{2\beta}{\alpha})\mathcal{C}_\Gamma^{\mathbf{infra}} f(\underline{x}) + \frac{\beta}{\alpha}(\mathcal{C}_\Gamma^l f(\underline{x}))\underline{x} \in \; Ker[\mathcal{L}^*_{\lambda,\mu}(\Omega)].$$

Ejemplo 3.1.2 *Sea* $i(\underline{x}) = x_j E_0(\underline{x})$ *definida en* $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$*. Es evidente que* i *es inframonogénica. Su conjugada armónica es*

$$h(\underline{x}) = C_h(i\underline{x}) = \frac{\beta}{\alpha}(2x_j E_0(\underline{x}) + E_0(\underline{x})e_j\underline{x}).$$

Si se tiene en cuenta que $\underline{x}e_j + e_j\underline{x} = -2\underline{x}_j$ *y* $e_j\underline{x} = -2x_j - \underline{x}e_j$*,*

$$h(\underline{x}) = \frac{\beta}{\alpha}[2x_j E_0(\underline{x}) + E_0(\underline{x})(-2x_j - \underline{x}e_j)] = -\frac{\beta}{\alpha}E_1(\underline{x})e_j.$$

Entonces,

$$\underline{u}(\underline{x}) = x_j E_0(\underline{x}) - \frac{\beta}{\alpha}E_1(\underline{x})e_j,$$

es solución de la ecuación de Lamé-Navier homogénea en $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ *para cada* j*.*

Ejemplo 3.1.3 *Sea* $\underline{F}$ *un campo vectorial monogénico. Si se tiene en cuenta el Ejemplo 2.1.2, se tiene que la función* $i(x) = x_j\underline{F}(\underline{x})$ *es inframonogénica, pero no es armónica en general.*

Como ejemplo, se calcula $C_h(i)$ para $i(\underline{x}) = x_j\underline{F}$. La armónica conjugada de $i(\underline{x})$ es

$$h(\underline{x}) = \frac{\beta}{\alpha}(2i(\underline{x}) + (i(\underline{x})\partial_{\underline{x}})\underline{x}) =$$

$$= \frac{\beta}{\alpha}(2x_j\underline{F}(\underline{x}) + \underline{F}(\underline{x})e_j\underline{x}).$$

Entonces, $h + i \in Ker\mathcal{L}^*_{\lambda,\mu}$ por Teorema 3.1.5, es decir

$$(1 + \frac{2\beta}{\alpha})x_j\underline{F}(\underline{x}) + \frac{\beta}{\alpha}\underline{F}(\underline{x})e_j\underline{x} \in Ker[\mathcal{L}^*_{\lambda,\mu}].$$

Defínase,

$$q(\underline{x}) = (1 + \frac{2\beta}{\alpha})x_j + \frac{\beta}{\alpha}e_j\underline{x}.$$

Entonces, $\underline{F}q \in Ker[\mathcal{L}^*_{\lambda,\mu}]$, lo cual implica que $[\underline{F}(\underline{x})q(\underline{x})] \in Ker[\mathcal{L}_{\lambda,\mu}]$. ■

Resulta interesante considerar la clase de desplazamientos de la forma

$$\mathcal{A} = \{[\underline{F}q]_1 : \partial_{\underline{x}}\underline{F} = 0\}.$$

Obsérvese que el polinomio $q(\underline{x})$ es invertible para $\underline{x} \neq 0$. En efecto, considérese el producto

$$\begin{aligned}
[(1+\frac{2\beta}{\alpha})x_j + \frac{\beta}{\alpha}e_j\underline{x}][(1+\frac{2\beta}{\alpha})x_j + \frac{\beta}{\alpha}\underline{x}e_j] &= \\
= (1+\frac{2\beta}{\alpha})^2 x_j^2 + (\frac{\beta}{\alpha})^2 e_j\underline{x}\underline{x}e_j + (1+\frac{2\beta}{\alpha})\frac{\beta}{\alpha}x_j[e_j\underline{x} + \underline{x}e_j] &= \\
= (1+\frac{2\beta}{\alpha})^2 x_j^2 + (\frac{\beta}{\alpha})^2 |\underline{x}|^2 - 2(1+\frac{2\beta}{\alpha})\frac{\beta}{\alpha}x_jx_j &= \\
= [(1+\frac{2\beta}{\alpha})^2 - \frac{2\beta}{\alpha}(1+\frac{2\beta}{\alpha})]x_j^2 + (\frac{\beta}{\alpha})^2 |\underline{x}|^2 &= \\
= (1+\frac{2\beta}{\alpha})x_j^2 + (\frac{\beta}{\alpha})^2 |\underline{x}|^2.
\end{aligned}$$

Para probar que $(1+\frac{2\beta}{\alpha})x_j^2 + (\frac{\beta}{\alpha})^2|\underline{x}|^2 = 0$ si y solo si $\underline{x} = 0$, es suficiente mostrar que $1 + \frac{2\beta}{\alpha} \geq 0$.

Supóngase por absurdo que $1 + \frac{2\beta}{\alpha} < 0$. Entonces, $\frac{\beta}{\alpha} < -\frac{1}{2}$.

Se tiene que $\mu > 0$ por leyes físicas. Luego,

$$\frac{3\mu+\lambda}{2} \cdot \frac{2}{\mu+\lambda} = \frac{3+\frac{\lambda}{\mu}}{1+\frac{\lambda}{\mu}} < -\frac{1}{2}.$$

Por restricciones físicas, $\frac{\lambda}{\mu} > -\frac{2}{3}$; por tanto, $1+\frac{\lambda}{\mu} > 0$. Ahora, si se multiplica por $1 + \frac{\lambda}{\mu}$ resulta

$$3 + \frac{\lambda}{\mu} < -\frac{1}{2}(1+\frac{\lambda}{\mu}) = -\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2\mu}$$

de donde $\frac{\lambda}{\mu} < -\frac{7}{3} < -\frac{2}{3}$ (contradicción). Por tanto, $1 + \frac{2\beta}{\alpha} \geq 0$ y

$$(1+\frac{2\beta}{\alpha})x_j^2 + (\frac{\beta}{\alpha})^2 |\underline{x}|^2,$$

si y solo si $\underline{x} = 0$.

Esto motiva la definición de $q^{-1}(\underline{x})$

$$q^{-1}(\underline{x}) = \frac{(1+\frac{2\beta}{\alpha})x_j + \frac{\beta}{\alpha}\underline{x}e_j}{(\frac{\beta}{\alpha})^2|\underline{x}| + (1+\frac{2\beta}{\alpha})x_j^2}.$$

Entonces, $qq^{-1} = 1$.

Estos resultados permiten considerar el siguiente problema de contorno de tipo Dirichlet para el operador $\mathcal{L}_{\lambda,\mu}$ sobre la clase $\mathcal{A}$ (para más información sobre problemas de frontera en teoría de la elasticidad lineal véase [[30],[27]]). En estte caso, los desplazamientos que se fijan en la frontera tienen la forma particular $\underline{g} = (g_1, g_2, g_3) \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$, $0 < \alpha < 1$, donde Γ es una superficie suave que acota un dominio de Jordan Ω, tal que $0 \notin \overline{\Omega}$ y

$$g_3 = \frac{\xi_3}{\xi_2}g_2,\ \underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \Gamma.$$

Concretamente, una condición necesaria y suficiente para que el problema de tipo Dirichlet

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^*_{\lambda,\mu}u(\underline{x}) &= 0,\ \ \underline{x} \in \Omega,\ \ 0 \notin \overline{\Omega}, \\ u|_\Gamma &= g \end{aligned}$$

admita una solución de la clase $\mathcal{A}$ es que $\mathcal{S}^l_\Gamma[g(\xi)q^{-1}(\xi)] = g(\xi)q^{-1}(\xi)$. En este caso, $\underline{u} = [\mathcal{C}_\Gamma(gq^{-1})]q$.

En efecto, si g es tal que

$$g_3 = \frac{\xi_3}{\xi_2}g_2,$$

entonces,

$$g(\xi)q^{-1}(\xi) = [g(\xi)q^{-1}(\xi)]_1.$$

Se puede demostrar que $[g(\xi)q^{-1}(\xi)]_2 = 0$. Por otro lado,

$$[gq^{-1}]_3 = \frac{\beta}{\alpha}g_3\xi_2 + e_3e_2e_1 + \frac{\beta}{\alpha}g_2\xi_3e_2e_3e_1 =$$

$$= \frac{\beta}{\alpha}(g_2\xi_3 - g_3\xi_2)e_2e_3e_1 = 0,$$

por definición de g.

Suficiencia. Supóngase que $\mathcal{S}_\Gamma^l(gq^{-1}) = gq^{-1}$. Entonces, gq^{-1} tiene una extensión monogénica $\underline{F}$ en Ω, la cual es un campo vectorial ya que gq^{-1} lo es.

Considérese la función $u = \underline{F}q$. Entonces,

$$\lim_{\underline{x}\to\xi, \underline{x}\in\Omega} u(\underline{x}) = \lim_{\underline{x}\to\xi, \underline{x}\in\Omega} \underline{F}(\underline{x}) \lim_{\underline{x}\to\xi, \underline{x}\in\Omega} q(\underline{x}) =$$

$$g(\xi)q^{-1}(\xi)q(\xi) = g(\xi).$$

Por tanto,

$$u = [\mathcal{C}_\Gamma^l]q.$$

Necesidad. Supóngase que u es solución del problema de contorno planteado y

$$u \in \{\underline{F}q | \partial_{\underline{x}}\underline{F} = 0\} \subset Ker[\mathcal{L}^*_{\lambda,\mu}],$$

Entonces,

$$\underline{F}(\underline{x}) = u(\underline{x})q^{-1}(\underline{x}),$$

y

$$\lim_{\underline{x}\to\xi, \underline{x}\in\Omega} \underline{F}(\underline{x}) = \lim_{\underline{x}\to\xi, \underline{x}\in\Omega} u(\underline{x}) \lim_{\underline{x}\to\xi, \underline{x}\in\Omega} q^{-1}(\underline{x}) = g(\xi)q^{-1}(\xi).$$

Luego,

$$\mathcal{S}_\Gamma^l(gq^{-1}) = gq^{-1}.$$

Los teoremas 3.1.3 y 3.1.4 revelan el siguiente resultado.

Teorema 3.1.6 *Una función u definida en Ω con valores en $\mathbb{R}_{0,3}$, solución de la ecuación $\mathcal{L}^*_{\lambda,\mu}u = 0$, se puede descomponer como*

$$u = (1 + \frac{\alpha}{2\beta})h + \frac{\alpha}{2\beta}(\partial_{\underline{x}}\, h)\underline{x} + \omega,$$

donde $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\omega \in \mathcal{H}(\Omega) \cap \mathcal{I}(\Omega)$.

De forma similar, a partir del Teorema 3.1.2 y el Corolario 3.1.1 resulta el siguiente teorema

Teorema 3.1.7 *Un campo vectorial $\underline{u}$ que satisface en Ω el sistema de Lamé-*

Navier (3.1) *se puede descomponer en* Ω *como*

$$\underline{u} = [(1+\frac{\alpha}{2\beta})\underline{h} + \frac{\alpha}{2\beta}(\partial_{\underline{x}}\,\underline{h})\underline{x}\,]_1 + \underline{\omega},$$

o en términos vectoriales puros, como

$$\underline{u} = (1+\frac{\alpha}{2\beta})\underline{h} + \frac{\alpha}{2\beta}((\mathrm{rot}\,\underline{h}) \times \underline{x} - (\mathrm{div}\,\underline{h})\underline{x}) + \underline{\omega},$$

donde $\underline{h} \in \underline{\mathcal{H}}(\Omega)$ *y* $\underline{\omega} \in \underline{\mathcal{H}}(\Omega) \cap \underline{\mathcal{I}}(\Omega)$

El Teorema 3.1.6 implica que los espacios cocientes $\mathcal{H}/_{\mathcal{H}\cap\mathcal{I}}$ y $Ker[\mathcal{L}^*_{\lambda,\mu}]/_{\mathcal{H}\cap\mathcal{I}}$ son isomorfos, con el isomorfismo

$$[\![h]\!] \mapsto [\![(1+\frac{\alpha}{2\beta})h + \frac{\alpha}{2\beta}(\partial_{\underline{x}}\,h)\underline{x}]\!],$$

donde $[\![h]\!]$ denota la clase de equivalencia que contiene h.

Un resultado análogo se obtiene para $\underline{\mathcal{H}}/_{\underline{\mathcal{H}}\cap\underline{\mathcal{I}}}$ y $Ker[\mathcal{L}_{\lambda,\mu}]/_{\underline{\mathcal{H}}\cap\underline{\mathcal{I}}}$ con el isomorfismo

$$[\![\underline{h}]\!] \mapsto [\![(1+\frac{\alpha}{2\beta})\underline{h} + \frac{\alpha}{2\beta}((\mathrm{rot}\,\underline{h}) \times \underline{x} - (\mathrm{div}\,\underline{h})\underline{x})]\!].$$

Así, cada clase de equivalencia en $Ker[\mathcal{L}_{\lambda,\mu}]/_{\underline{\mathcal{H}}\cap\underline{\mathcal{I}}}$ queda caracterizada de forma única por tres funciones armónicas y sus derivadas (las componentes reales de $\underline{h}$).

Este hecho es útil para ver el vínculo entre las soluciones de (3.1) y las funciones armónicas. En efecto, esta última conclusión muestra que hay una aplicación biyectiva entre el espacio de campos vectoriales armónicos y el espacio de soluciones del sistema de Lamé-Navier. Una conclusión idéntica se cumple para el espacio de campos vectoriales inframonogénicos y las soluciones de (3.1).

3.2. Ecuación no homogénea de Lamé-Navier

En esta sección se demuestra una fórmula de tipo Borel-Pompeiu en términos del operador $\mathcal{L}^*_{\lambda,\mu}$, se deduce la fórmula integral de tipo Cauchy asociada a esta y se considera las aplicaciones a la teoría lineal de la elasticidad.

3.2.1. Fórmula de tipo Borel-Pompeiu en términos del operador $\mathcal{L}^*_{\lambda,\mu}$

En el tópico 3.1.1 se definen α y β en términos de λ y μ a continuación se introducen nuevas notaciones para mayor simplicidad en las fórmulas que se obtienen.

$$\alpha^* = \frac{1}{2}[\frac{1}{2\mu+\lambda} - \frac{1}{\mu}]$$

y

$$\beta^* = \frac{1}{2}[\frac{1}{2\mu+\lambda} + \frac{1}{\mu}]$$

A continuación se prueban dos propiedades de α^* y de β^* que serán de vitalidad más adelante.

Proposición 3.2.1 *Se cumplen las identidades siguientes*

(1) $\alpha\beta^* + \beta\alpha^* = 0.$

(2) $\alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1.$

Demostración. se tiene que

$$\alpha\beta^* = (\frac{\mu+\lambda}{2})(\frac{1}{2}\frac{3\mu+\lambda}{(2\mu+\lambda)\mu}) = \frac{1}{4}\cdot\frac{(\mu+\lambda)(3\mu+\lambda)}{(2\mu+\lambda)\mu}$$

$$\beta\alpha^* = (\frac{3\mu+\lambda}{2})(-\frac{1}{2}\frac{\mu+\lambda}{(2\mu+\lambda)\mu}) = -\frac{1}{4}\cdot\frac{(3\mu+\lambda)(\mu+\lambda)}{(2\mu+\lambda)\mu}.$$

Entonces, $\alpha\beta^* + \beta\alpha^* = 0$. Esto prueba la primera identidad.

Por otro lado,

$$\alpha^*\alpha = \frac{1}{2}\cdot(-\frac{\mu+\lambda}{(2\mu+\lambda)\mu})\cdot\frac{\mu+\lambda}{2} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{(\mu+\lambda)^2}{(2\mu+\lambda)\mu},$$

$$\beta^*\beta = \frac{1}{2}\cdot\frac{(3\mu+\lambda)}{(2\mu+\lambda)\mu}\cdot\frac{3\mu+\lambda}{2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{(3\mu+\lambda)^2}{(2\mu+\lambda)\mu},$$

y un cálculo directo muestra que

$$\begin{aligned}\alpha^*\alpha+\beta^*\beta=\frac{1}{4}(\frac{(3\mu+\lambda)^2-(\mu+\lambda)^2}{(2\mu+\lambda)\mu})=\frac{1}{4}(\frac{(4\mu+2\lambda)\cdot 2\mu}{(2\mu+\lambda)\mu})=\\ =\frac{1}{2}(\frac{2(2\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda})=1,\end{aligned}$$

lo que prueba la segunda identidad. ■

Como se ha visto anteriormente, las expresiones del tipo

$$(1+\frac{2\beta}{\alpha})\mathcal{C}_\Gamma^{\mathbf{infra}}f(\underline{x})+\frac{\beta}{\alpha}(\mathcal{C}_\Gamma^l f(\underline{x}))\underline{x},$$

para $f\in C^1(\Omega)$ generan soluciones de la ecuación de Lamé-Navier generalizada. Naturalmente, surge la siguiente pregunta ¿es posible una fórmula integral de tipo Cauchy para las soluciones del operador $\mathcal{L}^*_{\lambda,\mu}$?

Es preciso señalar que en esta dirección existen fórmulas de representación integral para la ecuación de Lamé-Navier clásica, como la fórmula de representación de Betti-Somigliana (se refiere al lector que consulte [12]).

Como un resultado auxiliar para la obtención de la fórmula de tipo Borel-Pompeiu en términos del operador $\mathcal{L}^*_{\lambda,\mu}$, se prueba previamente el siguiente lema.

Lema 3.2.1 *Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ un dominio de Jordan con frontera suave Γ, f_1 y f_2 funciones continuas en Γ y f de clase $C^1(\Gamma)$. Además, sean γ_1, γ_2 y γ_3 constantes reales. Entonces la función*

$$\begin{aligned}\omega(\underline{x})=\gamma_1\mathcal{C}_\Gamma^l f_1(\underline{x})+\gamma_2\mathcal{C}_\Gamma^r f_2(\underline{x})+\gamma_3(\int_\Gamma E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})f(\underline{y})\partial_{\underline{y}}dS(\underline{y})-\\ -\int_\Gamma \partial_{\underline{y}}f(\underline{y})\underline{n}(\underline{y})E_1(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y}))\end{aligned}$$

es inframonogénica y armónica en Ω.

Demostración. Es evidente que ω es armónica. Para probar que es además inframonogénica, basta verificar que

$$\partial_{\underline{x}}(\int\limits_{\Gamma} E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})f(\underline{y})\partial_{\underline{y}}dS(\underline{y}) -$$
$$-\int\limits_{\Gamma} \partial_{\underline{y}}f(\underline{y})\underline{n}(\underline{y})E_1(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y})\partial_{\underline{x}}) = 0.$$

Obsérvese que

$$\int\limits_{\Omega} E_1(\underline{y}-\underline{x})\partial_{\underline{y}}f(\underline{y})\partial_{\underline{y}}dV(\underline{y}) + \int\limits_{\Omega} E_0(\underline{y}-\underline{x})f(\underline{y})\partial_{\underline{y}}dV(\underline{y}) =$$
$$= \int\limits_{\Gamma} E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})f(\underline{y})\partial_{\underline{y}}dS(\underline{y}),$$

$$\int\limits_{\Omega} \partial_{\underline{y}}f(\underline{y})\partial_{\underline{y}}E_1(\underline{y}-\underline{x})dV(\underline{y}) + \int\limits_{\Omega} \partial_{\underline{y}}f(\underline{y})E_0(\underline{y}-\underline{x})dV(\underline{y}) =$$
$$= \int\limits_{\Gamma} \partial_{\underline{y}}f(\underline{y})\underline{n}(\underline{y})E_1(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y}).$$

Restando las dos igualdades anteriores, se obtiene

$$\int\limits_{\Gamma} E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})f(\underline{y})\partial_{\underline{y}}dS(\underline{y}) - \int\limits_{\Gamma} \partial_{\underline{y}}f(\underline{y})\underline{n}(\underline{y})E_1(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y}) =$$
$$= \int\limits_{\Omega} E_0(\underline{y}-\underline{x})f(\underline{y})\partial_{\underline{y}}dV(\underline{y}) - \int\limits_{\Omega} \partial_{\underline{y}}f(\underline{y})E_0(\underline{y}-\underline{x})dV(\underline{y}).$$

Así,

$$\partial_{\underline{x}}(\int\limits_{\Gamma} E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})f(\underline{y})\partial_{\underline{y}}dS(\underline{y}) - \int\limits_{\Gamma} \partial_{\underline{y}}f(\underline{y})\underline{n}(\underline{y})E_1(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y}))\partial_{\underline{x}} =$$

$$= \partial_{\underline{x}}(\int\limits_{\Omega} E_0(\underline{y}-\underline{x})f(\underline{y})\partial_{\underline{y}}dV(\underline{y}) - \int\limits_{\Omega} \partial_{\underline{y}}f(\underline{y})E_0(\underline{y}-\underline{x})dV(\underline{y}))\partial_{\underline{x}} =$$

$$= \partial_{\underline{x}}(\int_{\Omega} E_0(\underline{y}-\underline{x})f(\underline{y})\partial_{\underline{y}}dV(\underline{y}))\partial_{\underline{x}} - \partial_{\underline{x}}(\int_{\Omega} \partial_{\underline{y}}f(\underline{y})E_0(\underline{y}-\underline{x})dV(\underline{y}))\partial_{\underline{x}} =$$

$$= -f(x)\partial_{\underline{x}}^2 - (-\partial_{\underline{x}}^2 f(x)) = 0.$$

Entonces, ω es inframonogénica y armónica. ■

Se puede verificar que

$$\mathcal{T}_{\Omega}^{\mathbf{infra}}\partial_{\underline{x}}^2 f(x) = -\mathcal{C}_{\Gamma}^{\mathbf{infra}}\partial_{\underline{x}}f(x) - \int_{\Omega}\partial_{\underline{y}}f(\underline{y})E_0(\underline{y}-\underline{x})dV(\underline{y}).$$

Esto motiva la definición de la siguiente transformada de Teodorescu asociada a la ecuación de Lamé-Navier generalizada

$$\mathcal{T}_{\Omega}^{\mathcal{L}^*} f := \alpha^* \mathcal{T}_{\Omega}^{\mathbf{infra}} + \beta^* \mathcal{T}_{\Omega}^2 f$$

El caso en que f es un campo vectorial resulta de particular importancia en la teoría de la elasticidad lineal. En este caso se usa la notación $\mathcal{T}_{\Omega}^{\mathcal{L}}\underline{f}$ en lugar de $\mathcal{T}_{\Omega}^{\mathcal{L}^*}\underline{f}$.

Por razones de brevedad y simplicidad conviene además introducir las notaciones $\mathcal{C}_{\Gamma}^{\mathcal{L}_1^*}f(\underline{x}) := \alpha^*\mathcal{C}_{\Gamma}^{\mathbf{infra}}\alpha f(\underline{x}) + \beta^*\mathcal{C}_{\Gamma}^{\mathbf{bi}}f(\underline{x})$ donde

$$\mathcal{C}_{\Gamma}^{\mathbf{bi}}f(\underline{x}) := -\int_{\Gamma} E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})f(\underline{y})dS(\underline{y}),$$

y para el caso de campos vectoriales, $\mathcal{C}_{\Gamma}^{\mathcal{L}_1}\underline{f}(\underline{x}) := \alpha^*\mathcal{C}_{\Gamma}^{\mathbf{infra}}\alpha\underline{f}(\underline{x}) + \beta^*\mathcal{C}_{\Gamma}^{\mathbf{bi}}\underline{f}(\underline{x})$

Ya se está en condiciones de probar la siguiente fórmula de tipo Borel-Pompeiu en términos del operador $\mathcal{L}_{\lambda,\mu}^*$.

Teorema 3.2.1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un dominio de Jordan con frontera suave Γ y* *sea $f \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Entonces, para $\underline{x} \in \Omega$ se cumple que*

$$\begin{aligned} f(\underline{x}) = \beta^*\beta\mathcal{C}^l_\Gamma f(\underline{x}) + \\ +\alpha^*\alpha\mathcal{C}^r_\Gamma f(\underline{x}) - \alpha^*\beta\{\int\limits_\Gamma E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})f(\underline{y})\partial_{\underline{y}}dS(\underline{y}) - \\ -\int\limits_\Gamma \partial_{\underline{y}}f(\underline{y})\underline{n}(\underline{y})E_1(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y})\} + \\ +\mathcal{C}^{\mathcal{L}_1^*}_\Gamma \alpha f(\underline{x})\partial_{\underline{x}} + \beta\partial_{\underline{x}}f(\underline{x}) + \mathcal{T}^{\mathcal{L}^*}_\Omega \mathcal{L}^*_{\lambda,\mu}f(\underline{x}). \end{aligned}$$

Demostración. Se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{\mathcal{L}^*}_\Omega \mathcal{L}^*_{\lambda,\mu}f(\underline{x}) = \alpha^*\mathcal{T}^{\mathbf{infra}}_\Omega\mathcal{L}^* f(\underline{x}) + \beta^*\mathcal{T}^{l,2}_\Omega\mathcal{L}^*_{\lambda,\mu}f(\underline{x}) = \\ = \alpha^*\alpha\mathcal{T}^{\mathbf{infra}}_\Omega\partial_{\underline{x}}f(\underline{x})\partial_{\underline{x}} + \alpha^*\beta\mathcal{T}^{\mathbf{infra}}_\Omega\mathcal{L}^*_{\lambda,\mu}f(\underline{x}) = \\ = \beta^*\alpha\mathcal{T}^{l,2}_\Omega\partial_{\underline{x}}f(\underline{x})\partial_{\underline{x}} + \beta^*\beta\mathcal{T}^{l,2}_\Omega\partial^2_{\underline{x}}f(\underline{x}). \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{\mathcal{L}^*}_\Omega \mathcal{L}^*_{\lambda,\mu}f(\underline{x}) = \alpha^*\alpha f(\underline{x}) - \alpha^*\alpha\mathcal{C}^{\mathbf{infra}}_\Gamma f(\underline{x})\partial_{\underline{x}} - \\ -\alpha^*\beta\mathcal{C}^{\mathbf{infra}}_\Gamma\partial_{\underline{x}}f(\underline{x}) - \alpha^*\beta\int\limits_\Omega \partial_{\underline{y}}f(\underline{y})E_0(\underline{y}-\underline{x})dV(\underline{y}) + \\ +\beta^*\beta f(\underline{x}) - \beta^*\beta\mathcal{C}^l_\Gamma f(\underline{x}) - \beta^*\beta\mathcal{C}^{\mathbf{bi}}_\Gamma\partial_{\underline{x}}f(\underline{x}) - \\ -\beta^*\alpha\int\limits_\Omega E_0(\underline{y}-\underline{x})f(\underline{y})\partial_{\underline{y}}dV(\underline{y}) - \beta^*\alpha\mathcal{C}^{\mathbf{bi}}_\Gamma f(\underline{x})\partial_{\underline{x}} - \alpha^*\alpha\mathcal{C}^r_\Gamma f(\underline{x}). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{\mathcal{L}^*}_\Omega \mathcal{L}^*_{\lambda,\mu}f(\underline{x}) = (\alpha^*\alpha + \beta^*\beta)f(\underline{x}) - \beta^*\beta\mathcal{C}^l_\Gamma f(\underline{x}) - \alpha^*\alpha\mathcal{C}^r_\Gamma f(\underline{x}) + \\ +\alpha^*\beta(\int\limits_\Gamma E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})f(\underline{y})\partial_{\underline{y}}dS(\underline{y}) - \int\limits_\Gamma \partial_{\underline{y}}f(\underline{y})\underline{n}(\underline{y})E_1(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y})) - \\ -\alpha^*\mathcal{C}^{\mathbf{infra}}_\Gamma\alpha f(\underline{x})\partial_{\underline{x}} + \beta\partial_{\underline{x}}f(\underline{x}). \end{aligned}$$

y en virtud de la Proposición 3.2.1(2) finalmente se obtiene

$$f(\underline{x}) = \beta^*\beta\mathcal{C}_\Gamma^l f(\underline{x}) + \alpha^*\alpha\mathcal{C}_\Gamma^r f(\underline{x}) -$$
$$-\alpha^*\beta\{\int_\Gamma E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})f(\underline{y})\partial_{\underline{y}}dS(\underline{y}) -$$
$$-\int_\Gamma \partial_{\underline{y}}f(\underline{y})\underline{n}(\underline{y})E_1(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y})\} + \mathcal{C}_\Gamma^{\mathcal{L}_1^*}\alpha f(\underline{x})\partial_{\underline{x}} +$$
$$+\beta\partial_{\underline{x}}f(\underline{x}) + \mathcal{T}_\Omega^{\mathcal{L}^*}\mathcal{L}^*_{\lambda,\mu}f(\underline{x}). \quad \blacksquare$$

Como consecuencia de esta fórmula de tipo Borel-Pompeiu se obtiene la siguiente fórmula integral de Cauchy para el operador de Lamé-Navier generalizado.

Teorema 3.2.2 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un dominio de Jordan con frontera suave Γ y sea $f \in Ker[\mathcal{L}^*_{\lambda,\mu}(\Omega)] \cap C^1(\overline{\Omega})$. Entonces, se cumple que*

$$f(\underline{x}) = \beta^*\beta\mathcal{C}_\Gamma^l f(\underline{x}) + \alpha^*\alpha\mathcal{C}_\Gamma^r f(\underline{x}) - \alpha^*\beta(\int_\Gamma E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})f(\underline{y})\partial_{\underline{y}}dS(\underline{y}) -$$
$$-\int_\Gamma \partial_{\underline{y}}f(\underline{y})\underline{n}(\underline{y})E_1(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y})) + \mathcal{C}_\Gamma^{\mathcal{L}_1^*}[\alpha f(\underline{x})\partial_{\underline{x}} + \beta\partial_{\underline{x}}f(\underline{x})].$$

Si se tiene en cuenta que $\mathcal{L}_{\lambda,\mu}\underline{f} = \mathcal{L}^*_{\lambda,\mu}\underline{f}$ se deduce una fórmula de tipo Borel-Pompeiu asociada al operador de Lamé-Navier clásico y la fórmula integral de Cauchy correspondiente, las cuales son expresadas en los siguientes corolarios.

Corolario 3.2.1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un dominio de Jordan con frontera suave Γ y sea $\underline{f} \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Entonces, para $\underline{x} \in \Omega$ se cumple que*

$$\underline{f}(\underline{x}) = \beta^*\beta\mathcal{C}_\Gamma^l \underline{f}(\underline{x}) + \alpha^*\alpha\mathcal{C}_\Gamma^r \underline{f}(\underline{x}) -$$
$$-\alpha^*\beta(\int_\Gamma E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})\underline{f}(\underline{y})\partial_{\underline{y}}dS(\underline{y}) -$$
$$-\int_\Gamma \partial_{\underline{y}}\underline{f}(\underline{y})\underline{n}(\underline{y})E_1(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y})) + \mathcal{C}_\Gamma^{\mathcal{L}_1}\alpha\underline{f}(\underline{x})\partial_{\underline{x}} +$$
$$+\beta\partial_{\underline{x}}\underline{f}(\underline{x}) + \mathcal{T}_\Omega^{\mathcal{L}}\mathcal{L}_{\lambda,\mu}\underline{f}(\underline{x}).$$

Corolario 3.2.2 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un dominio de Jordan con frontera suave Γ y sea $\underline{f} \in Ker[\mathcal{L}_{\lambda,\mu}(\Omega)] \cap C^1(\overline{\Omega})$ un campo de desplazamientos, entonces $\underline{f}$ se puede representar en el interior de Ω a partir de los valores en Γ de $\underline{f}$ y de sus derivadas parciales*

$$\underline{f}(\underline{x}) = \beta^* \beta \mathcal{C}^l_\Gamma \underline{f}(\underline{x}) + \alpha^* \alpha \mathcal{C}^r_\Gamma \underline{f}(\underline{x}) - \alpha^* \beta \{ \int\limits_\Gamma E_1(\underline{y} - \underline{x}) \underline{n}(\underline{y}) \underline{f}(\underline{y}) \partial_{\underline{y}} dS(\underline{y}) -$$

$$- \int\limits_\Gamma \partial_{\underline{y}} \underline{f}(\underline{y}) \underline{n}(\underline{y}) E_1(\underline{y} - \underline{x}) dS(\underline{y}) \} + \mathcal{C}^{\mathcal{L}_1}_\Gamma [\alpha \underline{f}(\underline{x}) \partial_{\underline{x}} + \beta \partial_{\underline{x}} \underline{f}(\underline{x})].$$

Como consecuencia de estas fórmulas de tipo Cauchy, se infiere que las soluciones regulares de las ecuaciones de Lamé-Navier, tanto de la clásica como de la generalizada son de clase $\mathcal{C}^\infty$.

Esta fórmula motiva la introducción de la siguiente transformada de tipo Cauchy asociada al operador de Lamé-Navier generalizado para funciones $f \in \mathcal{C}^1(\Gamma)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{\mathcal{L}^*}_\Gamma f(\underline{x}) &= \beta^* \beta \mathcal{C}^l_\Gamma f(\underline{x}) + \alpha^* \alpha \mathcal{C}^r_\Gamma f(\underline{x}) - \\ -\alpha^* \beta \{ &\int\limits_\Gamma E_1(\underline{y} - \underline{x}) \underline{n}(\underline{y}) f(\underline{y}) \partial_{\underline{y}} dS(\underline{y})) - \\ - &\int\limits_\Gamma \partial_{\underline{y}} f(\underline{y}) \underline{n}(\underline{y}) E_1(\underline{y} - \underline{x}) dS(\underline{y}) \} - \\ &-\mathcal{C}^{\mathcal{L}^*_1}_\Gamma [\alpha f(\underline{x}) \partial_{\underline{x}} + \beta \partial_{\underline{x}} f(\underline{x})]. \end{aligned}$$

3.3. Una versión cliffordiana de la solución de Kelvin

A lo largo de esta sección Ω denota un dominio de Jordan con frontera suave Γ. Considérese la ecuación no homogénea generalizada

$$\mathcal{L}^*_{\lambda,\mu} u(\underline{x}) = -f(\underline{x}), \ \underline{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^3. \tag{3.15}$$

donde $f : \Omega \to \mathbb{R}_{0,3}$.

Note que cuando $\underline{u}$ y $\underline{f}$ son campos vectoriales, 3.15 coincide con la clásica de Lamé-Navier cuando aparecen fuerzas de volumen dadas por $\underline{f}$.

Esta sección está dedicada al estudio de la solución de estas ecuaciones, tanto de la generalizada como de la clásica. Para este propósito, se prueba primeramente el siguiente teorema que expresa una propiedad clave de $\mathcal{T}_{\Omega}^{\mathcal{L}^*}$.

Teorema 3.3.1 *Sea $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, se cumple la siguiente identidad*

$$\mathcal{L}^*_{\lambda,\mu}[\mathcal{T}_{\Omega}^{\mathcal{L}^*} f] = f.$$

Demostración. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^*_{\lambda,\mu}[\mathcal{T}_{\Omega}^{\mathcal{L}^*} f] = \mathcal{L}^*_{\lambda,\mu}[\alpha^*\mathcal{T}_{\Omega}^{\mathbf{infra}} f + \beta^*\mathcal{T}_{\Omega}^{l,2} f] = \\
= \alpha\alpha^* f + \alpha\beta^*(\mathcal{T}_{\Omega}^{\mathcal{L}^*} f)\partial_{\underline{x}} + \beta\beta^* f = \\
= (\alpha\alpha^* + \beta\beta^*) f + (\alpha\beta^* + \beta\alpha^*)\mathcal{T}_{\Omega}^{l} f \partial_{\underline{x}} = f.
\end{aligned}$$

luego de usar la Proposición 3.2.1(1)(2).

Del Teorema 3.3.1 se deduce que una solución general de la ecuación de Lamé-Navier generalizada (3.15) está dada por $\mathcal{T}_{\Omega}^{\mathcal{L}^*}(-f)$.

Para el caso de campos vectoriales, la ecuación no homogénea 3.15 toma la forma

$$\mathcal{L}_{\lambda,\mu} u(\underline{x}) = -\underline{f}(\underline{x}), \;\; \underline{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^3, \tag{3.16}$$

donde $\underline{f} : \Omega \to \mathbb{R}^3$. En el sentido físico, f representa fuerzas de volumen o fuerzas másicas.

Corolario 3.3.1 *Se cumple la siguiente identidad*

$$\mathcal{L}_{\lambda,\mu}[\mathcal{T}_{\Omega}^{\mathcal{L}} \underline{f}] = \underline{f}.$$

Del Teorema 3.3.1 se deduce que la solución de la ecuación no homogénea 3.16 está dada por la función $\mathcal{T}_{\Omega}^{\mathcal{L}}(-\underline{f})$.

Además, del Lema 2.3.2 resulta que esta es una versión cliffordiana de la solución de Kelvin como en [7], [29], [27], [4].

$$u_i(\underline{x}) = A\int\limits_{\Omega}[\frac{\partial}{\partial_{x_i}}(\frac{1}{R})\sum_{j=1}^{3}(x_j-y_j)f_j(\underline{y}) - B\frac{f_i(\underline{y})}{R}]dV(\underline{y}),$$

$$R^2 = \sum_{j=1}^{3}(x_j-y_j)^2,$$

$$A = \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)},\ B = \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}.$$

donde $\alpha^* = 4\pi A$ y $\beta^* = 4\pi AB$.

En efecto,

$$\underline{u} = \mathcal{T}_{\Omega}^{\mathcal{L}}(-\underline{f}) = \alpha^*\mathcal{T}_{\Omega}^{\mathbf{infra}}(-\underline{f}) + \beta^*\mathcal{T}_{\Omega}^{l,2}(-\underline{f}).$$

Si se hace uso del Lema 2.3.2, se obtiene

$$\begin{aligned}
&\mathcal{T}_{\Omega}^{\mathcal{L}}(-\underline{f})(\underline{x}) = \\
&= -\alpha^*\int\limits_{\Omega}E_0(\underline{y}-\underline{x})(\sum_{j=1}^{m}(\underline{y}-\underline{x})_j\cdot\underline{f}_j(\underline{y}))dV(\underline{y}) - \\
&-\beta^*\int\limits_{\Omega}E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{f}(\underline{y})dV(\underline{y}) = \\
&= \alpha^*\int\limits_{\Omega}[\partial_{\underline{x}}E_1(\underline{y}-\underline{x})][\sum_{j=1}^{m}(\underline{y}-\underline{x})_j\underline{f}_j(\underline{y})]dV(\underline{y}) - \\
&-\beta^*\int\limits_{\Omega}E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{f}(\underline{y})dV(\underline{y}) = \\
&= \frac{\alpha^*}{4\pi}\int\limits_{\Omega}[\partial_{\underline{x}}(\frac{1}{R})][\sum_{j=1}^{m}(\underline{y}-\underline{x})_j\underline{f}_j(\underline{y})]dV(\underline{y}) - \\
&-\frac{\beta^*}{4\pi}\int\limits_{\Omega}\frac{1}{R}\underline{f}(\underline{y})dV(\underline{y}).
\end{aligned}$$

Nótese que

$$\frac{\alpha^*}{4\pi} = \frac{1}{8\pi}\frac{(\mu+\lambda)}{(2\mu+\lambda)\mu} = -A$$

$$-\frac{\beta^*}{4\pi} = -\frac{1}{8\pi}\frac{(3\mu+\lambda)}{(2\mu+\lambda)\mu} = -[\frac{1}{8\pi}\frac{(\mu+\lambda)}{(2\mu+\lambda)\mu}][\frac{(3\mu+\lambda)}{(\mu+\lambda)}] = -AB.$$

Así,

$$\underline{u} = -\frac{\alpha^*}{4\pi}\int_\Omega [\partial_{\underline{x}}(\frac{1}{R})][\sum_{j=1}^m (\underline{y}-\underline{x})_j \underline{f}_j(\underline{y})]dV(\underline{y}) + \frac{\beta^*}{4\pi}\int_\Omega \frac{1}{R}\underline{f}(\underline{y})dV(\underline{y}) =$$

$$= A\{\int_\Omega [\partial_{\underline{x}}(\frac{1}{R})][\sum_{j=1}^m (\underline{y}-\underline{x})_j \underline{f}_j(\underline{y})]dV(\underline{y}) - B\int_\Omega \frac{1}{R}\underline{f}(\underline{y})dV(\underline{y})\}.$$

Si se consideran las coordenadas reales, se obtiene

$$\underline{u}_i = A[\int_\Omega [\frac{\partial}{\partial_{x_i}}(\frac{1}{R})\sum_{j=1}^3 (x_j - y_j)\underline{f}_j(\underline{y}) - B\frac{f_i(\underline{y})}{R}]dV(\underline{y}).]$$

Nótese que cada solución de la ecuación de Lamé-Navier no homogénea admite la descomposición aditiva

$$\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2,$$

donde $\partial_{\underline{x}}\underline{u}_1\partial_{\underline{x}} = -\alpha^* f$ y $\partial_{\underline{x}}^2\underline{u}_2 = -\beta^* f$. En efecto, basta tomar $\underline{u}_1 = -\alpha^*\mathcal{T}_\Omega^{\mathbf{infra}} f$ y $\underline{u}_2 = -\beta^*\mathcal{T}_\Omega^{l,2} f$.

Como se puede apreciar, la reformulación del sistema de Lamé-Navier en el Análisis de Clifford hace posible la aplicación de los resultados obtenidos en el Capítulo 2 para las funciones inframonogénicas en la caracterización de la estructura de sus soluciones y ofrece un marco teórico ventajoso para la continuación del estudio de estos sistemas.

Conclusiones

Se concluye que los objetivos de la investigación se cumplieron, lo cual queda claro a partir de los resultados obtenidos.

- Se obtiene una fórmula de representación integral de tipo Cauchy para funciones inframonogénicas. A partir de esta se obtiene una representación de tipo Almansi para las funciones simultáneamente inframonogénicas y armónicas.

- Se define una transformada de Cauchy inframonogénica y una transformada de Teodorescu asociada a esta, además se realiza una generalización no trivial de estos resultados para el caso de funciones infrapolimonogénicas.

- Los resultados principales del Capítulo 2 contribuyen de forma esencial a la obtención de los aportes del Capítulo 3.

- Se reformula el sistema de Lamé-Navier homogéneo en términos del operador $\partial_{\underline{x}}(.)\partial_{\underline{x}}$, lo cual permite obtener una descomposición aditiva de sus soluciones.

- Se caracteriza el espacio de los desplazamientos universales como aquel de las funciones que son simultáneamente inframonogénicas y armónicas.

- Se obtiene una reformulación cliffordiana de la solución clásica de Kelvin como superposición de dos transformadas de tipo Teodorescu.

Recomendaciones

Se recomienda continuar la presente investigación en las siguientes direcciones.

- Aplicar la fórmula integral de Cauchy demostrada para funciones infrapolimonogénicas a la investigación de la estructura de las soluciones de otros sistemas asociados a problemas de la física teórica.
- Hallar una descomposición de tipo Almansi en el caso de los espacios de dimensión par.
- Investigar la estructura del núcleo del operador de Lamé-Navier iterado.

Índice de materias

Conceptos fundamentales

Resultados fundamentales

- Un criterio de inframonogenicidad en términos de las partes k-vectoriales, 21
- Una fórmula integral de tipo Cauchy para funciones inframonogénicas, 31
- Una fórmula integral de tipo Cauchy par funciones infrapolimonogénicas, 45
- Una descomposición de Almansi para funciones simultáneamente inframonogénicas y armónicas, 54
- Una reformulación cliffordiana de la ecuación de Lamé-Navier en términos del operador $\partial_{\underline{x}}(.)\partial_{\underline{x}}$, 65
- Una descomposición aditiva de las soluciones de la ecuación de Lamé-Navier en términos de una función inframonogénica y de una función armónica, 72
- Construcción de soluciones del sistema de Lamé-Navier a partir de una función inframonogénica o de una función armónica, 74
- Identificación de los campos de desplazamientos universales con la clase de las funciones simultáneamente inframonogénicas y armónicas, 71

Bibliografía

[1] E. Almansi, E. (1898). Sulle integrazione dell equazione differenziale $\triangle^{2m}u = 0$. Annali di Matematica Pura ed Applicata, 2(3).

[2] Barber, J. R. (2003). Solid mechanics and its applications 107. Springer, Berlin.

[3] Begehr, H. (2002). Integral representations in complex, hypercomplex and Clifford analysis. Integral Transforms and Special Functions. Taylor and Francis Group, 13, 305-316.

[4] Bock, S. (2018). On a hypercomplex version of the Kelvin solution in linear elasticity. In Modern Problems in Applied Analysis (pp. 35-50). Birkhuser, Cham.

[5] Bock, S., Gürlebeck, K., Legatiuk, D., and Nguyen, H. M. (2015). ψ-Hyperholomorphic functions and a Kolosov-Muskhelishvili Formula. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 38(18), 5114-5123.

[6] Brackx, F., Delanghe, R., and Sommen, F. (1982). Clifford analysis (Vol. 76). Pitman Books Limited.

[7] Favata, A. (2012). On the Kelvin problem. Journal of Elasticity, 109(2), 189-204.

[8] Gürlebeck, K., Habetha, K., and Sprössig, W. (2008). Holomorphic Functions in the Plane and n-Dimensional Space. Birkhäuser Verlag, Basel.

[9] Grlebeck, K., and Nguyen, H. M. (2015). Ψ-hyperholomorphic functions and an application to elasticity problems. In AIP Conference Proceedings (Vol. 1648, No. 1, p. 440005). AIP Publishing.

[10] Grigoriev, Y. (2016). Regular quaternionic functions and their applications in three-dimensional elasticity. XXIV ICTAM, 21-26.

[11] Grigoriev, Y. (2014). Three-dimensional quaternionic analogue of the Kolosov-Muskhelishvili formulae. In Hypercomplex Analysis: New Perspectives and Applications (pp. 145-166). Birkhuser, Cham.

[12] Hsiao, G. C., and Wendland, W. L. (2008). Boundary Integral Equations. Applied Mathematical Sciences, 164, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[13] Knops, R. J., and Payne, L. E. (1971). Uniqueness Theorems in Linear Elasticity. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

[14] Lai, M. C., and Liu, H. C. (2005). Fast direct solver for the biharmonic equation on a disk and its application to incompressible flows. Applied Mathematics and Computation, 164(3), 679-695.

[15] Lam*é*, G. (1837). Sur les surfaces isothermes dans les corps homogènes en *é*quilibre de temprature. Journal de math*é*matiques pures et appliqu*é*es, 2, 147-188.

[16] Landau, L. D., and Lifshitz, E. M. (1986). Theory of elasticity. Pergamon Press, London.

[17] Malonek, H. R., and Ren, G. (2002). Almansi-type theorems in Clifford analysis. Methods in the Applied Sciences, 25 (16-18), 1541-1552.

[18] Malonek, H. R., Pea Pea, D., and Sommen, F. (2010). Fischer decomposition by inframonogenic functions. Cubo: A Mathematical Journal, 12(2), 189-197.

[19] Malonek, H., Peña Peña, D., and Sommen, F. (2011). A Cauchy-Kowalevski Theorem for Inframonogenic Functions. Mathematical Journal of Okayama University, 53, 167-172.

[20] Moreno García, A., Moreno García, T., Abreu Blaya, R., Bory Reyes, J. (2017). A Cauchy integral formula for inframonogenic functions in Clifford analysis. Adv. Appl. Clifford Algebras, 27 (2), 1147-1159.

[21] Moreno García, A., Moreno García, T., Abreu Blaya, R., Bory Reyes, J. (2018). A Cauchy integral formula for infrapolymonogenic functions in Clifford analysis. Enviado a publicar.

[22] Moreno García, A., Moreno García, T., Abreu Blaya, R., Bory Reyes, J. (2018). Decomposition for inframonogenic functions with applicatios in elasticity theory. Enviado a publicar.

[23] Moreno García, A., Moreno García, T., Abreu Blaya, R., Bory Reyes, J. (2018). Inframonogenic functions and its applications to 3D elasticity theory. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 41(10), 3622-3631.

[24] Nguyen, M. H. (2015). ψ-Hyperholomorphic Function Theory in $\mathbb{R}^3$: Geometric Mapping Properties and Applications. (Habilitation Thesis), Fakultat Bauingenieurwesen der Bauhaus-Universitat. Weimar.

[25] Romano, A., Marasco, A. (2014). Continuum Mechanis using Mathematica. Springer Sience, Business Media New York.

[26] Ryan, J. (1995). Cauchy-Green type formulae in Clifford Analysis. Transactions of the American Mathematical Society, 347 (4).

[27] Sadd, M. H. (2005). Elasticity: Theory, Applications and Numerics. Elsevier, Oxford.

[28] Shapiro, M. V., Vasilevski, N. L. (1995). Quaternionic ψ-hyperholomorphic functions, singular integral operators and boundary value problems. I. Ψ-hyperholomorphic function theory, Complex Variables, 27, 1746.

[29] Thompson, W. (1848). Note on the integration of the equations of equilibrium of an elastic solid. Cambr. Dubl. Math. J., 3, 8789.

[30] Truesdell, C. (1966). The elements of continuum mechanics. Springer Verlag, New York.

[31] Weisz-Patrault, D., Bock, S. and Gürlebeck, K. (2014). Three-dimensional elasticity based on quaternion-valued potentials. International Journal of Solids and Structures, 51, 3422-3430.