UNIVERSIDAD DE ORIENTE

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

TEOREMA DE PLEMELJ-PRIVALOV SOBRE LAS CLASES DE LIPSCHITZ DE EXPONENTE ARBITRARIO EN EL ANÁLISIS DE CLIFFORD

Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Matemáticas

LIANET DE LA CRUZ TORANZO

Santiago de Cuba

2019

UNIVERSIDAD DE ORIENTE

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

TEOREMA DE PLEMELJ-PRIVALOV SOBRE LAS CLASES DE LIPSCHITZ DE EXPONENTE ARBITRARIO EN EL ANÁLISIS DE CLIFFORD

Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Matemáticas

Autora: Lic. Lianet De la Cruz Toranzo, M.Sc

Tutor: Prof. Tit., Lic. Ricardo Abreu Blaya, Dr.Cs

Santiago de Cuba

2019

SÍNTESIS

El Teorema de Plemelj-Privalov en la teoría de funciones analíticas del Análisis Complejo establece la propiedad de invariancia de la clase de funciones de Hölder de exponente alfa bajo la acción del operador integral singular usual con núcleo de Cauchy. Este hecho permite luego atacar fácilmente los problemas de contorno de tipo Riemann para funciones analíticas, por lo que promete tener igual connotación en otros espacios de funciones, así como en espacios multidimensionales. Precisamente, en esta investigación se aborda la propiedad de invariancia de la clase de funciones de Lipschitz de exponente arbitrario bajo la acción de dos operadores singulares que surgen naturalmente en la teoría de funciones polianalíticas y polimonogénicas en el Análisis Complejo y de Clifford, respectivamente. Los resultados obtenidos sobre la validez del Teorema de Plemelj-Privalov en estos contextos más generales, constituyen la principal novedad científica de este trabajo.

Tabla de contenidos

Dedicatoria

A mis padres: Liana, Danilo y Aldana

«El arte de hacer matemáticas consiste en encontrar ese caso especial que contiene todos los gérmenes de generalidad»

David Hilbert

Agradecimientos

«En las matemáticas, el arte de proponer un problema debe tener un valor más alto que resolverlo»

Georg Cantor

Mi eterna gratitud a Ricardo Abreu Blaya, mi tutor, por proponerme este problema y depositar su confianza en mí a lo largo de tantos años, sin lo cual esta modesta contribución no hubiera sido posible.

«He aprendido que un hombre solo tiene derecho a mirar a otro hacia abajo cuando ha de ayudarle a levantarse»

Gabriel García Márquez

Agradezco el apoyo recibido de mi familia, amistades y colegas de trabajo, así como de las instituciones involucradas en la realización de esta tesis.

Abstract

In this work the invariance of the Lipschitz class of arbitrary order under the action of two singular integral operators arising in the theory of polyanalytic and polymonogenic functions respectively is proved. In both cases the results obtained can be understood as a generalization of the Plemelj-Privalov theorem of the analytic function theory.

Resumen

En este trabajo se demuestra la invariancia de la clase de Lipschitz de orden arbitrario bajo la acción de dos operadores integrales singulares que surgen en la teoría de funciones polianalíticas y polimonogénicas respectivamente. En ambos casos los resultados obtenidos pueden entenderse como una generalización del Teorema de Plemelj-Privalov usual de la teoría de funciones analíticas.

Lista de notaciones

INTRODUCCIÓN

Del Análisis Real es conocido que una función definida en algún intervalo abierto es analítica en un punto de dicho intervalo cuando es posible representarla como suma de una serie de potencias convergente en alguna vecindad del punto. Esto hace que las funciones analíticas encuentren aplicaciones en diversos problemas mecánicos y físicos, ya que heredan propiedades importantes de las series de potencias convergentes, como por ejemplo, la suma, la integración y la diferenciación que resultan operaciones internas. Más aún, funciones analíticas en un punto son infinitamente diferenciables en dicho punto.

Una teoría sistemática de funciones de una variable compleja (TFVC), con la inclusión de los conceptos de límite, continuidad, derivada, serie e integral, construida en analogía con la teoría clásica de funciones analíticas, fue legada por el matemático francés Augustin Louis Cauchy en el siglo XIX [48]. La entonces nueva disciplina, conocida hoy día por Análisis Complejo, posee inmensas ventajas sobre el Análisis Real. Es válido mencionar, a modo de ejemplo, que el Teorema Fundamental del Álgebra encuentra tal vez su más armoniosa demostración mediante el uso de la TFVC. La teoría de funciones analíticas puede considerarse como la esencia misma de esta disciplina. Dentro de los resultados más importantes de la teoría de funciones analíticas se encuentra la Fórmula integral de Cauchy (FIC), la cual permite conocer el valor de una función analítica en el interior de un dominio a través de sus valores en la frontera.

El estudio de la integral de tipo de Cauchy, y en particular la investigación del comportamiento de sus valores límites al aproximarse al contorno, ha sido también objeto de numerosas investigaciones. Ello se debe especialmente a que es vital en la consideración de los problemas de contorno de Riemann-Hilbert y a que está estrechamente relacionada a los potenciales de capa simple y capa doble distribuidos a lo largo de la línea de integración (véase en [51] la prueba de esta conexión). Esto quiere decir que la integral de tipo de Cauchy constituye una importante herramienta para resolver problemas de contorno en la teoría de funciones analíticas, estando íntimamente relacionada a ello la integral singular (también conocida como transformada de Hilbert).

Propiedades menos elementales de una función dependen muchas veces de la relación entre el orden del incremento de la función con respecto al de su argumento, por lo que la clase de funciones continuas se hace muy amplia ya que esta relación no se tiene en cuenta. En cambio, puede considerarse el módulo de continuidad de una función sobre un conjunto y estudiar aquellas funciones para las cuales su módulo de continuidad es, por ejemplo, una función potencial del incremento del argumento. Tal es el caso de la clase $\mathbf{C}^{0,\alpha}$ de funciones de Hölder con exponente $0 < \alpha < 1$.

Estas funciones desempeñan un rol importante en la teoría de funciones analíticas gracias a sus buenas propiedades: son funciones uniformemente continuas, forman un álgebra para la suma y el producto usual de funciones, y toda función periódica que satisfaga la condición de Hölder puede ser representada en una serie de Fourier (uniformemente convergente). Es de destacar además la propiedad de invariancia de esta clase bajo la acción del operador integral singular. Precisamente, esto es lo que establece en esencia el Teorema de Plemelj-Privalov y constituye la principal motivación de esta investigación.

Este teorema debe su nombre al matemático esloveno Josip Plemelj (1873-1967) y al matemático ruso Ivan Ivanovich Privalov (1891-1941). Ambos realizaron contribuciones a la teoría de funciones analíticas y, de forma independiente, arribaron a dicho resultado. Plemelj viajó a Göttingen después de su doctorado y allí trabajó bajo la dirección de Klein y Hilbert en los años 1900 y 1901. En aquella época, muchos matemáticos en la Universidad de Göttingen, instados por Hilbert, comenzaban a adentrarse en la nueva área de estudio que estaba naciendo: la teoría de ecuaciones integrales lineales de Fredholm. El propio Hilbert había reducido el Problema de Riemann (sobre la existencia de una ecuación diferencial Fuchsiana con grupo de mondromía dado) a una ecuación integral.

Plemelj no fue la excepción y aplicó esta teoría al estudio de las funciones armónicas en la teoría del potencial [55], lo que sumado a sus contribuciones en Ecuaciones Integrales, le valió el Premio Príncipe Jablonowski en 1911. Las ecuaciones que Plemelj descubrió sobre los valores de frontera de las funciones analíticas son ampliamente conocidas en la literatura como las fórmulas de Plemelj[1] y le valieron hallar solución al Problema de Riemann [54,56]. Igualmente Privalov tuvo la oportunidad de asistir a las conferencias de Klein y Hilbert cuando visitó Göttingen en 1911 mientras aún era estudiante universitario, por lo que no es de extrañar que sus trabajos se relacionaran con los de Plemelj.

El Teorema de Plemelj-Privalov fue establecido por Plemelj [53] en 1908, a juzgar por el contexto, para el caso de curvas suaves, y fue redescubierto por Privalov [58] en 1916, quien consideró una circunferencia como curva de integración. En 1939 Privalov demostró este teorema para toda curva suaves a tramos y sin cúspides [59], y posteriormente fue probado por Muskhelishvili [51] y Davydov [25] para curvas suaves a tramos (pudiendo admitir cúspides) y curvas cuerda-arco (o k-curvas) res-

[1] También se conocen por fórmulas de Sokhotski-Plemelj, en honor al matemático ruso que las obtuvo con anterioridad

pectivamente. Otra generalización en el caso de una circunferencia fue ofrecida por Zygmund [65] en 1923, quien obtiene una estimación en términos del módulo de continuidad con rectificación de Stieskin. Su trabajo fue generalizado por Magnaradze [47] para curvas suaves a tramos, y por Babaev y Salaev [17] para curvas cuerda-arco. También Ivanov [41] obtuvo un análogo de este resultado para funciones de la clase $H_{p+\alpha}$.

En 1975, V. V. Salaev planteó el problema de describir la clase maximal Π_α de curvas de Jordan, cerradas y rectificables (CJCR) para las cuales este resultado seguía siendo válido. Al año siguiente, él mismo obtuvo una descripción (en términos de una métrica) de una clase de curvas que satisfacía el Teorema de Plemelj-Privalov, la cual era más amplia que la clase de curvas suaves a tramos y las k-curvas, y que se denominan curvas AD-regulares.

Específicamente, Salaev probó [60] que si la curva era una CJCR que satisfacía la condición de regularidad descrita, entonces la estimación de Zygmund se preservaba y, en particular, el Teorema de Plemelj-Privalov era válido en esta clase. Salimov construyó importantes ejemplos [62] que daban idea de la estructura de la clase Π_α: (a) una CJCR sobre la cual no era válido este resultado; y (b) una clase de CJCR que no eran AD-regulares y sobre las cuales sí era válido. La condición métrica de Salaev era suficiente, pero no necesaria. Por esta época, G. David [24] demuestra que la clase maximal de curvas planas donde la clase de funciones p-integrables (espacio L^p) queda invariante bajo la acción del operador singular, es la clase de curvas AD-regulares.

En 1990 salió a luz una caracterización completa de la clase Π_α, fruto del trabajo conjunto entre Salaev, Guseinov y Seifullaev [61]. Pocos años después, Guseinov [37] ofreció una solución al problema de Salaev para la clase de Hölder generalizada H_φ con mayorante φ.

El Teorema de Plemelj-Privalov también ha sido abordado en espacios de dimensión arbitraria mayor que 2 con el uso del Análisis de Clifford, y en particular del Análisis Cuaterniónico. Se pueden citar en este sentido los trabajos de Karapetyants [42] y Kokilashvili [43] para funciones de la clase de Hölder con exponente variable; el de Gerus, Schneider y Shapiro [33] para un operador asociado a la teoría de funciones α-hiperholomorfas; así como el de Abreu, Bory y Moreno [5–8, 10–13, 15] para funciones de la clase de Hölder (usual y generalizada), para superficies AD-regulares y para superficies fractales.

Es conveniente mencionar que los cuaternios, cuyo descubrimiento se atribuye al matemático y físico irlandés William Rowan Hamilton, forman un álgebra asociativa (4-dimensional) no conmutativa sin divisores de cero que generaliza al álgebra (2-dimensional) de los números complejos. El producto cuaterniónico fue extendido por el matemático inglés William Kingdon Clifford al espacio n-dimensional, creando así las hoy llamadas «álgebras de Clifford». Análogamente al Análisis Complejo, cuyos resultados más importantes son los relacionados con las funciones analíticas, en estas álgebras juegan un rol similar las funciones monogénicas, definidas como aquellas que anulan el llamado operador de Dirac. De este modo tiene lugar una teoría más general, que se denomina Análisis de Clifford.

El término Análisis de Clifford fue empleado por Ryan a finales de los años 70 y luego retomado por los matemáticos belgas Brackx, Delanghe y Sommen para el título del primer libro publicado en esta área [23]. Desde entonces han sido varios los trabajos en torno a esta disciplina, destacándose el de los alemanes Gürlebeck, Habetha y Sprößig [35, 36]. Dentro de las ventajas y aplicaciones se pueden mencionar las relativas a describir rotaciones en el espacio [30] y, en particular, modelar movimientos oculares [57], entre otras aplicaciones en la Física como el procesamiento de señales e imágenes (Transformada de Fourier Cuaterniónica y Cliffordiana, QFT y CFT respectivamente) [31, 34, 39].

En esta investigación se define un operador singular con núcleo de Cauchy asociado a la teoría de funciones polianalíticas [3, 4, 18, 19, 38, 49] la cual representa una generalización de las analíticas. El hecho de que algunas de las propiedades de las funciones analíticas dejan de ser válidas para las polianalíticas (por ejemplo, el Principio del módulo máximo) no ha sido una barrera para el exitoso desarrollo de estas últimas.

Los primeros trabajos relevantes sobre funciones polianalíticas se remontan a las investigaciones de los rusos Kolossov [44] y Mushkelishvili [52] en teoría de la elasticidad, así como a los de Balk y Zuev [20]. Trabajos más actuales muestran la interdisciplinaridad adquirida en este campo, la cual abarca el análisis de tiempo-frecuencia [1,2] y la Física Cuántica, por lo que se han usado para describir imágenes por radar [16] y flujos lentos de un fluido viscoso [46].

El operador singular antes mencionado surge naturalmente de una fórmula de representación integral para funciones polianalíticas [21] análoga a la FIC pero que, en adición, involucra a los valores de las derivadas parciales hasta el orden k de la función sobre la curva de integración. Es precisamente esta peculiaridad la que inclina la selección del espacio de funciones sobre el cual considerar el dominio de este operador, a favor de la clase de Lipschitz de exponente arbitrario (u orden superior) $k+\alpha$, con $k \in \mathbb{Z}_+$ y $0 < \alpha < 1$.

Estas funciones fueron definidas por Stein [63] en 1970 y constituyen una especie de generalización de la noción de funciones diferenciables sobre conjuntos cerrados de $\mathbb{R}^m$ que introdujo Hassler Whitney [64] en 1933. De hecho, si se toma a $\mathbb{R}^m$ como el conjunto cerrado en cuestión, la clase de Lipschitz de exponente $k+\alpha$ no es más que la clase de funciones continuamente diferenciables hasta el orden k y cuya k-ésima derivada es de Hölder. Además, para $k = 0$, la clase de Lipschitz coincide con la clase de Hölder usual.

Posteriormente, y de una manera similar, se define una versión multidimensional de operador singular con núcleo de Cauchy asociado a la teoría de funciones polimonogénicas del Análisis de Clifford que actúa sobre funciones de la clase Lipschitz de exponente arbitrario. Bajo la acción de estos operadores, los cuales generalizan las versiones usuales en ambos espacios de funciones, la investigación de la invariancia de la clase de Lipschitz de exponente arbitrario resulta sugerente y promete un interesante problema científico no abordado hasta el momento por otros autores: ¿se comporta invariante la clase de Lipschitz de exponente arbitrario bajo la acción de estos operadores?

Las diferentes versiones del Teorema de Plemelj-Privalov conducen a la hipótesis de que si se consideran los operadores aquí definidos, entonces es posible establecer la propiedad de invariancia para la clase de funciones antes mencionada. Es por ello que el objetivo de esta investigación consiste en establecer y demostrar un análogo del Teorema de Plemelj-Privalov en la teoría de funciones polianalíticas y polimonogénicas. Ello permitiría, consiguientemente, resolver problemas de frontera que generalizan los clásicos problemas de tipo Riemann-Hilbert para funciones analíticas,

En aras de lograr una mejor comprensión de los resultados obtenidos ([27–29]) y de forma general de toda la exposición aquí presentada, el informe se encuentra estructurado en tres capítulos del siguiente modo. En el Capítulo 1 se expone el marco teórico referencial que incluye las definiciones de clase de Lipschitz de orden superior, álgebras de Clifford, funciones polianalíticas y funciones polimonogénicas, así como los principales resultados y notaciones que se usan en el desarrollo ulterior.

El Capítulo 2 presenta la definición del operador integral singular asociado a funciones polianalíticas, se comprueba su legitimidad y se establece un análogo del Teorema de Plemelj-Privalov [28] que generaliza los métodos utilizados en [26] para demostrar la invariancia de las clases de Lipschitz de primer orden. Su demostración utiliza una reescritura de la condición de Lipschitz en términos puramente complejos que descansa esencialmente en las fórmulas que expresan las derivadas parciales reales a través del operador de Cauchy-Riemann y su conjugado. Al tratarse de una prueba directa a través de acotaciones, el método llevado a cabo permite estimar en adición la norma del operador propuesto.

Por último, en el Capítulo 3 estos resultados se extienden al caso multidimensional en el marco del Análisis de Clifford [27, 29]. En este caso no fue posible utilizar una escritura en términos puramente cliffordianos, debido esencialmente a la imposibilidad de expresar las derivadas parciales reales en términos del operador de Dirac. Esto conllevó a rechazar tentativamente la metodología usada en el caso complejo de proponer las funciones candidatas asociadas al operador. La demostración comenzó por examinar el caso más sencillo de las clases de Lipschitz de primer orden, confirmando con ello la hipótesis planteada. No obstante, dicha demostración se basó fuertemente en algunas particularidades del núcleo del operador que para un orden arbitrario no son satisfechas en general, y por tanto no fue factible utilizar el nuevo método para el caso general. Tal dificultad se pudo vencer retornando a la vía directa desarrollada en el Capítulo 1 para el caso complejo.

Una vez concluido este capítulo, se presentan las conclusiones finales a las que se ha arribado. También se ofrecen algunas recomendaciones encaminadas a dar continuidad a esta investigación.

1. ASPECTOS ALGEBRAICOS, ANALÍTICOS Y GEOMÉTRICOS

CAPÍTULO 1

Aspectos algebraicos, analíticos y geométricos

Este capítulo inicial tiene como objetivo exponer los principales aspectos teóricos que sirven de base a la investigación y en particular, aquellos que intervienen en el planteamiento del problema científico, esto es: el contexto algebraico-analítico donde surge el operador integral, la clase de funciones sobre la cual actúa, y la clase de curvas o superficies donde se comprende la integración. Primeramente, se señalan tales elementos en el caso de considerar el Teorema de Plemelj-Privalov usual.

En este, el operador singular surge en el contexto de la teoría de funciones analíticas y está dado por el valor principal $\mathcal{S}f(t) = \lim\limits_{\epsilon \to 0} \dfrac{1}{\pi \mathbf{i}} \displaystyle\int_{\Gamma \setminus \Gamma_\epsilon} \dfrac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau$, donde $\Gamma_\epsilon = B_\epsilon(t) \cap \Gamma$, $B_\epsilon(t)$ denota la bola cerrada con centro en t y radio ϵ, e $\mathbf{i}$ denota la unidad imaginaria. La clase de funciones sobre la cual actúa $\mathcal{S}$ es la clase $\mathbf{C}^{0,\alpha}(\Gamma)$ de funciones de Hölder con exponente $0 < \alpha < 1$, y el contorno de integración Γ se considera suave.

Se recuerda que una curva (cerrada o abierta) es suave si su tangente cambia continuamente y es suave a tramos si consiste de un número finito de tramos los cuales son suaves. A lo largo de la presente investigación, Γ denotará la curva o superficie de integración y Ω el dominio que encierra, o sea, $\Gamma = \partial\Omega$. Además, Ω_+ y Ω_- denotarán respectivamente los dominios interior y exterior a la frontera Γ.

En el Capítulo 2 (caso bidimensional) se consideran siempre curvas suaves, cerradas, simples (no se autointersectan) y sin puntos de retroceso; y en el Capítulo 3 (caso multidimensional) las superficies también deberán entenderse como suaves. No obstante, aunque no es objeto de esta investigación, se puede mencionar que los resultados obtenidos en ambos casos pueden extenderse al caso de curvas y superficies AD-regulares. Un subconjunto cerrado $\mathbf{E}$ de $\mathbb{R}^m$ se dice Ahlfors-David regular (AD-regular) si existe una constante $C > 0$ tal que para cada $x \in \mathbf{E}$ y $0 < r < diam(\mathbf{E})$ se cumple $C^{-1}r^{m-1} \leq \mathcal{H}^{m-1}(\mathbf{E} \cap B_r(x)) \leq Cr^{m-1}$, donde $\mathcal{H}^{m-1}$ denota la medida de Hausdorff $(m-1)-$dimensional.

Antes de introducir los restantes elementos fundamentales, se hace observar el uso de multiíndices en lo que sigue. Un multiíndice no es más que una $n-$upla ordenada $j = (j_1, j_2, \cdots, j_n)$ donde las coordenadas j_k son números enteros no negativos para cada $k = 1, 2, \cdots, n$. Esta notación permite simplificar varias operaciones y resultados propiciando una lectura más didáctica. Por ejemplo, $j_1! \cdots j_n!$, $j_1 + \cdots + j_n$, ${x_1}^{j_1} \ldots {x_n}^{j_n}$, etc., se escriben de este modo como $j!$, $|j|$ y x^j respectivamente. Cuando sea necesario distinguir entre un multiíndice y un número natural, se convendrá en escribir respectivamente (j) y j.

1.1 Clase de funciones de Lipschitz

Un resultado del Análisis establece que toda función continua definida en un conjunto cerrado de $\mathbb{R}^m$ puede ser extendida continuamente a todo el espacio. Un problema más ambicioso sería determinar si una función puede ser extendida a todo el espacio preservando cierta propiedad P que satisface en el conjunto donde está definida. En particular, si la función dada es diferenciable en algún sentido ¿podrá ser extendida a todo $\mathbb{R}^m$ de modo que dicha extensión sea también diferenciable? Inspirado en esta interrogante, H. Whitney introdujo en 1933 la siguiente noción de diferenciabilidad sobre conjuntos cerrados y estableció un importante teorema de extensión [64].

Sea f definida en un conjunto cerrado $\mathbf{E}$ y $k \in \mathbb{Z}$. Se dice que $f(x) = f^{(0)}(x)$ «es de clase $\mathbf{C}^k$ en $\mathbf{E}$ en términos de las funciones $f^{(j)}$» si las $f^{(j)}$ están definidas en $\mathbf{E}$ y

$$f^{(j)}(x) = \sum_{|j+l|\leq k} \frac{f^{(j+l)}(y)}{l!}(x-y)^l + R_j(x,y), \forall\, |j| \leq k,$$

donde $R_j(x,y)$ tiene la siguiente propiedad. Para cada $x_0 \in \mathbf{E}, \epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$, $|y - x_0| < \delta$, entonces $|R_j(x,y)| \leq \epsilon |x-y|^{k-|j|}$.

Nótese que si $k = 0$, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, si $|x - y| < \delta$, entonces $|R_0(x,y)| = |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$. Es decir, $f(x) = f^{(0)}(x)$ es continua en el sentido usual.

Whitney probó que si $f = f^{(0)}$ era una función de clase $\mathbf{C}^k$ ($k < \infty$ o $k = \infty$) en $\mathbf{E}$ en términos de $f^{(j)}$ ($|j| \leq k$), entonces existe una función $\tilde{f}$ de clase $\mathbf{C}^k$ en $\mathbf{E}$ en el sentido ordinario tal que: restringida a los puntos del conjunto cerrado $\mathbf{E}$ coincide con $f^{(0)}$ ($\tilde{f}|_{\mathbf{E}} = f^{(0)}$), sus derivadas parciales coinciden en $\mathbf{E}$ con las correspondientes funciones de la colección asociada a $f^{(0)}$ ($\partial^{(j)}\tilde{f}|_{\mathbf{E}} = f^{(j)}\ \forall\, |j| \leq k$) y $\tilde{f}$ es analítica en $\mathbb{R}^m \setminus \mathbf{E}$. Paralelamente a los trabajos de Whitney, en 1934, E. J. McShane escribió también un artículo sobre extensión de funciones [50]. Específicamente, McShane estableció un teorema de extensión para funciones de la clase de Hölder.

También E. Stein trabajó en este tópico [63, cap. VI]. Él considera que los espacios más apropiados son aquellos dados en términos del módulo de continuidad e introduce el espacio de funciones de Lipschitz de exponente arbitrario (u orden superior).

Definición 1.1.1. ***(Clase de funciones de Lipschitz de exponente arbitrario)*** *Sea $\mathbf{E}$ un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^m$, k un entero no negativo y $0 < \alpha \leq 1$. Se dirá que una función real f definida en $\mathbf{E}$ pertenece a la clase de Lipschitz de exponente arbitrario «$\mathcal{L}ip(k+\alpha, \mathbf{E})$», si existen las funciones reales y acotadas $f^{(j)}$ definidas en $\mathbf{E}$, $0 \leq |j| \leq k$ y $f^{(0)} = f$, y tales que los restos*

$$R_j(x,y) = f^{(j)}(x) - \sum_{|j+l|\leq k} \frac{f^{(j+l)}(y)}{l!}(x-y)^l, \;\; x, y \in \mathbf{E} \tag{1.1}$$

junto a dichas funciones satisfacen

$$|f^{(j)}(x)| \leq M, \quad |R_j(x,y)| \leq M|x-y|^{k+\alpha-|j|}, \;\; x, y \in \mathbf{E}, |j| \leq k. \tag{1.2}$$

Claramente, la clase antes definida es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones usuales de suma de funciones y del producto de un escalar por una función.

Una norma $\|\cdot\|_{k+\alpha,\mathbf{E}}$ en este espacio se puede definir como la menor constante M que satisface (1.2).

Más detalladamente:

$$\|f\|_{k+\alpha,\mathbf{E}} = \sup_{0\leq|j|\leq k} \left\{ \sup_{x\in\mathbf{E}} |f^{(j)}(x)|, \sup_{\substack{x,y\in\mathbf{E} \\ x\neq y}} \frac{|R_j(x,y)|}{|x-y|^{k+\alpha-|j|}} \right\}.$$

El espacio $\mathcal{L}ip(k+\alpha, \mathbf{E})$ con la norma $\|\cdot\|_{k+\alpha,\mathbf{E}}$ es de Banach [63]. En particular, cuando $k = 0$, dicha clase no es más que la clase de funciones de Hölder acotadas.

Note que en general un elemento de esta clase debe interpretarse como una colección de funciones, ya que la función $f^{(0)}$ no determina las funciones $f^{(j)}$. No obstante, si $\mathbf{E} = \mathbb{R}^m$, las funciones $f^{(j)}$ están únicamente determinadas por $f^{(0)}$ y en este caso $\mathcal{L}ip(k+\alpha, \mathbb{R}^m)$ consiste en la clase de funciones continuas y acotadas f

con derivadas parciales continuas y acotadas $\partial^{(j)} f = \frac{\partial^{|j|} f}{\partial_{j_1} \cdots \partial_{j_m}}$ hasta el orden k cuyas k-ésimas derivadas son de Hölder.

Usando técnicas similares a las del trabajo citado de Whitney, Stein [63] arriba a la existencia de una transformación continua de $\mathcal{L}ip(k+\alpha, \mathbf{E})$ a $\mathcal{L}ip(k+\alpha, \mathbb{R}^m)$ que extiende $f^{(0)}$ a todo $\mathbb{R}^m$. Luego, para $f \in \mathcal{L}ip(k+\alpha, \Gamma)$ el Teorema de Whitney se puede establecer como sigue.

Teorema 1.1.1 ([63]). *Sea $f \in \mathcal{L}ip(k+\alpha, \mathbf{E})$. Entonces existe $\tilde{f} \in \mathcal{L}ip(k+\alpha, \mathbb{R}^m)$ tal que*

(i) $\tilde{f}|_{\mathbf{E}} = f^{(0)}$, $\partial^{(j)} \tilde{f}|_{\mathbf{E}} = f^{(j)}$,

(ii) $\tilde{f} \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^m \setminus \mathbf{E})$,

(iii) $|\partial^{(j)} \tilde{f}(x)| \leqslant c\,\text{dist}(x, \mathbf{E})^{\alpha-1}$, *para* $|j| = k+1$ *y* $x \in \mathbb{R}^m \setminus \mathbf{E}$.

1.1.1 Funciones de Lipschitz complejas

La definición de funciones de la clase de Lipschitz está dada por coordenadas, mas como es natural al extender conceptos del Análisis Real al Análisis Complejo, se dirá que una función compleja $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es de la clase de Lipschitz de orden superior si sus partes real e imaginaria u y v pertenecen a dicha clase. Claramente, la clase de funciones de Lipschitz complejas representa un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.

Para el caso particular del trabajo en $\mathbb{R}^2$ pueden usarse las conocidas identidades que permiten expresar las partes real e imaginaria de un número complejo a través de combinaciones lineales del número y su conjugado y de este modo reescribir la condición de Lipschitz en términos puramente complejos. El siguiente resultado [26] detalla el procedimiento utilizado para ello.

Teorema 1.1.2. *Si f es una función compleja de clase $\mathcal{L}ip(k+\alpha, \mathbf{E})$, entonces existen las funciones complejas y acotadas $f^{(j)},\ 0 \leq |j| \leq k$, definidas en $\mathbf{E}$, con $f^{(0)} = f$ y tales que los restos*

$$R_j(x,y) \;=\; f^{(j)}(x) - \sum_{|l|\leq k-|j|} \frac{f^{(j+l)}(y)}{l!}(x-y)^{l_1}(\overline{x-y})^{l_2},\ x,y\in\mathbf{E} \qquad (1.3)$$

junto a dichas funciones satisfacen

$$|f^{(j)}(x)| \leq M, \quad |R_j(x,y)| \leq M|x-y|^{k+\alpha-|j|},\ x,y\in\mathbf{E}, |j|\leq k. \qquad (1.4)$$

Viceversa, si una función compleja satisface (1.3) *y* (1.4) *entonces ella es de clase $\mathcal{L}ip(k+\alpha, \mathbf{E})$.*

Demostración. Sea $f(x) = u(x_1,x_2) + iv(x_1,x_2)$ una función compleja de clase $\mathcal{L}ip(k+\alpha, \Gamma)$ y considerése, abusando de la notación, tanto $x = x_1 + ix_2$ como $x = (x_1, x_2)$. Entonces por definición

$$u^{(j)}(x) \;=\; \sum_{|j+l|\leq k} \frac{u^{(j+l)}(y)}{l!}(x_1-y_1)^{l_1}(x_2-y_2)^{l_2} + U_j(x,y), \qquad (1.5)$$

y

$$v^{(j)}(x) \;=\; \sum_{|j+l|\leq k} \frac{v^{(j+l)}(y)}{l!}(x_1-y_1)^{l_1}(x_2-y_2)^{l_2} + V_j(x,y). \qquad (1.6)$$

Al multiplicar (1.6) por i y sumarle (1.5) se tiene que $f^{(j)}(x) = P_j(x,y) + R_j(x,y)$, donde, por definición,

$$R_j = U_j + iV_j, P_j(x,y) = \sum_{|j+l|\leq k} \frac{f^{(j+l)}(y)}{l!}(x_1-y_1)^{l_1}(x_2-y_2)^{l_2} \text{ y } f^{(j)} = u^{(j)} + iv^{(j)}$$

Luego, usando las identidades $\Re z = \frac{z+\bar{z}}{2}$ e $\Im z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, se obtiene una reescritura de

P_j en términos complejos

$$P_j(x,y) = \sum_{|j+l|\le k} \frac{f^{(j+l)}(y)}{l!} \left(\frac{(x-y)+(\overline{x-y})}{2}\right)^{l_1} \left(\frac{(x-y)-(\overline{x-y})}{2i}\right)^{l_2} \tag{1.7}$$

Luego de usar la fórmula del binomio de Newton en los dos últimos factores de (1.7)

$$\begin{aligned}
P_j(x,y) &= \sum_{|j+l|\le k} \frac{f^{(j+l)}(y)}{2^{l_1}(2i)^{l_2} l!} \Big\{ \sum_{|s|\le|l|} \binom{l}{s} (-1)^{s_2} (x-y)^{|l|-|s|} (\overline{x-y})^{|s|} \Big\} \\
&= f^{(j)}(y) + \sum_{|l|=1} \frac{f^{(j+l)}(y)}{2^{l_1}(2i)^{l_2} l!} \left\{ (x-y) + \sum_{|s|=1} \binom{l}{s} (-1)^{s_2} (\overline{x-y}) \right\} + \ldots \\
&\quad + \sum_{|l|=n} \frac{f^{(j+l)}(y)}{2^{l_1}(2i)^{l_2} l!} \Bigg\{ (x-y)^n + \sum_{|s|=1} \binom{l}{s} (-1)^{s_2} (x-y)^{n-1} (\overline{x-y}) + \ldots \\
&\quad + \sum_{|s|=n} \binom{l}{s} (-1)^{s_2} (\overline{x-y})^n \Bigg\} + \ldots \\
&= f^{(j)}(y) + \sum_{|l|=1} a_0^{(l)} \frac{f^{(j+l)}(y)}{2^{l_1}(2i)^{l_2} l!} (x-y) + \sum_{|l|=1} a_1^{(l)} \frac{f^{(j+l)}(y)}{2^{l_1}(2i)^{l_2} l!} (\overline{x-y}) + \ldots \\
&\quad + \sum_{|l|=n} a_0^{(l)} \frac{f^{(j+l)}(y)}{2^{l_1}(2i)^{l_2} l!} (x-y)^n + \sum_{|l|=n} a_1^{(l)} \frac{f^{(j+l)}(y)}{2^{l_1}(2i)^{l_2} l!} (x-y)^{n-1} (\overline{x-y}) + \ldots \\
&\quad + \sum_{|l|=n} a_n^{(l)} \frac{f^{(j+l)}(y)}{2^{l_1}(2i)^{l_2} l!} (\overline{x-y})^n + \ldots + \sum_{|l|=k-|j|} a_0^{(l)} \frac{f^{(j+l)}(y)}{2^{l_1}(2i)^{l_2} l!} (x-y)^{k-|j|} + \\
&\quad + \sum_{|l|=k-|j|} a_1^{(l)} \frac{f^{(j+l)}(y)}{2^{l_1}(2i)^{l_2} l!} (x-y)^{k-|j|-1} (\overline{x-y}) + \ldots \\
&\quad + \sum_{|l|=k-|j|} a_{k-|j|}^{(l)} \frac{f^{(j+l)}(y)}{2^{l_1}(2i)^{l_2} l!} (\overline{x-y})^{k-|j|},
\end{aligned}$$

donde $a_n^{(l)} = \sum_{|s|=n} \binom{l}{s} (-1)^{s_2}, n = \overline{0, |l|}$. Note que $a_0^{(l)} = 1$. De este modo,

$$P_j(x,y) = \sum_{|j+L|\le k} \frac{F^{(j+L)}(y)}{L!} (x-y)^{L_1} (\overline{x-y})^{L_2},$$

donde

$$F^{(j+L)}(y) = L! \sum_{|l|=|L|} \frac{a_{L_2}^{(l)} f^{(j+l)}(y)}{2^{|l|} i^{l_2} l!}.$$

Así se obtiene una reescritura de la Definición 1.1.1 cuando la función es compleja:

$$f^{(j)}(x) = \sum_{|j+l|\leq k} \frac{f^{(j+l)}(y)}{l!}(x-y)^{l_1}(\overline{x-y})^{l_2} + R_j(x,y), \tag{1.8}$$

donde $|R_j(x,y)| \leq c|x-y|^{k+\alpha-|j|}$ y $|f^{(j)}(x)| \leq c, \ \forall\, 0 \leq |j| \leq k, \ x, y \in \mathbf{E}.$ (1.9)

Viceversa, suponiendo que una función compleja se representa como en (1.8) y tal que satisface (1.9). Entonces, tomando parte real a ambos miembros de (1.8) resulta que

$$\Re f^{(j)}(x) = \sum_{|j+l|\leq k} \Re\left\{\frac{f^{(j+l)}(y)}{l!}(x-y)^{l_1}(\overline{x-y})^{l_2}\right\} + \Re R_j(x,y).$$

Claramente, la relación $|\Re z| \leq |z|$ implica que las funciones $\Re f^{(j)}$ son acotadas y que los restos $\Re R_j(x,y)$ satisfacen la relación $|\Re R_j(x,y)| \leq c|x-y|^{k+\alpha-|j|}$. Restaría verificar que

$$\sum_{|j+l|\leq k} \Re\Big\{\frac{f^{(j+l)}(y)}{l!}(x-y)^{l_1}(\overline{x-y})^{l_2}\Big\} = \sum_{|j+L|\leq k} \frac{F^{(j+L)}(y)}{L!}(x-y)^{L_1}(\overline{x-y})^{L_2},$$

donde tanto x e y como las funciones $F^{(j+L)}$ (con $F^{(j)} = \Re f^{(j)}$) del miembro derecho son reales.

Escríbase $u = x_1 + ix_2$ e $u = y_1 + iy_2$ y desarróllese por el binomio de Newton $(x-y)^{l_1} = ((x_1-y_1)+i(x_2-y_2))^{l_1}$ y $(\overline{x-y})^{l_2} = ((x_1-y_1)-i(x_2-y_2))^{l_2}$. Entonces, luego de agrupar $\sum\limits_{|j+l|\leq k} \dfrac{f^{(j+l)}(y)}{l!}(x-y)^{l_1}(\overline{x-y})^{l_2}$ convenientemente, se toma parte real y se verifica lo deseado. Análogamente se procede con la parte imaginaria. □

Para concluir este epígrafe se muestra una identidad donde solo intervienen los restos que genera la función de Lipschitz y que será de uso frecuente en los próximos capítulos. Denótese como en [63, pág. 177]

$$P_j(\tau,\zeta) = \sum_{|j+l|\leq k} \frac{f^{(j+l)}(\zeta)}{l!}(\tau-\zeta)^{l_1}(\overline{\tau-\zeta})^{l_2}.$$

Entonces, desarrollando en serie de Taylor el polinomio $P_j(\tau,t) - P_j(\tau,\zeta)$ alrededor del punto $t \in \mathbb{R}^2$, se obtiene

$$P_j(\tau,t) - P_j(\tau,\zeta) = \sum_{|j+l|\leq k} \frac{R_{j+l}(t,\zeta)}{l!}(\tau-t)^{l_1}(\overline{\tau-t})^{l_2}.$$

Luego la identidad $f(\tau) = P_j(\tau,\zeta) + R_j(\tau,\zeta)$ implica

$$P_j(\tau,t) - f(\tau) + R_j(\tau,\zeta) = \sum_{|j+l|\leq k} \frac{R_{j+l}(t,\zeta)}{l!}(\tau-t)^{l_1}(\overline{\tau-t})^{l_2}.$$

Simétricamente, $f(\tau) = P_j(\tau,t) + R_j(\tau,t)$, por lo que

$$\begin{aligned} R_j(\tau,\zeta) - R_j(\tau,t) &= \sum_{|j+l|\leq k} \frac{R_{j+l}(t,\zeta)}{l!}(\tau-t)^{l_1}(\overline{\tau-t})^{l_2} \\ &= R_j(t,\zeta) + \sum_{0<|j+l|\leq k} \frac{R_{j+l}(t,\zeta)}{l!}(\tau-t)^{l_1}(\overline{\tau-t})^{l_2}, \end{aligned}$$

lo que equivale a

$$R_j(\tau,\zeta) - R_j(t,\zeta) = R_j(\tau,t) + \sum_{0<|j+l|\leq k} \frac{R_{j+l}(t,\zeta)}{l!}(\tau-t)^{l_1}(\overline{\tau-t})^{l_2}. \quad (1.10)$$

1.2 Funciones polianalíticas

En esta sección se define un operador singular con núcleo de Cauchy asociado a la teoría de funciones polianalíticas [3, 4, 18, 19, 38, 49] que actúa sobre funciones pertenecientes a la clase de Lipschitz de exponente arbitrario.

Definición 1.2.1 (**Función polianalítica**). *Una función $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es llamada polianalítica de orden k (o k-analítica) en algún dominio Ω del plano de la variable compleja z, si tiene derivadas parciales (con respecto a x y a y) de orden menor o igual que k en Ω y si en este dominio satisface la condición de Cauchy-Riemann generalizada: $\partial_{\bar{z}}^k f = 0$, donde $\partial_{\bar{z}}$ es el clásico operador de Cauchy-Riemann $\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$.*

Al resolver esta ecuación diferencial de orden superior, se deduce que una función k-analítica puede ser escrita como un polinomio en la variable $\overline{z}$ cuyos coeficientes son funciones analíticas [20], esto es

$$f(z) = \sum_{i=0}^{k-1} u_i(z)\overline{z}^i.$$

Los primeros trabajos relevantes sobre funciones polianalíticas se remontan a las investigaciones de los rusos Kolossov [44] y Mushkelishvili [52] en teoría de la elasticidad, así como a los de Balk y Zuev [20] y hoy día encuentra aplicaciones en el análisis de tiempo-frecuencia [1, 2], en la descripción de imágenes por radar [16] y flujos lentos de un fluido viscoso [46]. Algunas de las propiedades de las funciones analíticas dejan de ser válidas para las polianalíticas. Para ello basta considerar la función bi-analítica (polianalítica de orden 2) dada por $f(z) = 1 - |z|^2 = 1 - z\overline{z}$. La misma se anula en la circunferencia $|z| = 1$ y claramente $f \neq 0$. O sea, los ceros de una función polianalítica pueden acumularse, a diferencia de las analíticas, que como se conoce, sus ceros son puntos aislados. Además, esta función es acotada en el disco $|z| < 1$, alcanza el máximo en $z = 0$ que es un punto del interior, y sin embargo no es constante. Recuérdese que para las funciones analíticas se tenía el llamado Principio del módulo máximo, que establece que si una función analítica es acotada y alcanza el máximo en un punto interior, entonces tiene que ser constante. Esto último quiere decir que en general no se cumple el Principio del módulo máximo para las funciones polianalíticas.

No obstante es de destacar que las funciones polianalíticas admiten una fórmula integral [21] análoga a la FIC que permite representar a la función en los puntos del interior del dominio, en este caso a través de los valores de ella y de sus derivadas en la frontera. Dicha fórmula se tiene como una simple consecuencia de la Fórmula de Borel-Pompeiu para funciones de clase $\mathbf{C}^k$, que establece para $z \in \Omega$ y $f \in$

$\mathbf{C}^k(\Omega;\mathbb{C}) \cap \mathbf{C}^{k-1}(\Omega\cup\Gamma;\mathbb{C})$, $k \geq 1$ lo siguiente

$$f(z) = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int\limits_{\Gamma} \frac{1}{n!} \frac{(\overline{z-\zeta})^n}{\zeta - z} \partial_{\overline{\zeta}}^n f(\zeta) d\zeta - \frac{1}{\pi} \int\limits_{\Omega} \frac{1}{(k-1)!} \frac{(\overline{z-\zeta})^{k-1}}{\zeta - z} \partial_{\overline{\zeta}}^k f(\zeta) d\xi d\eta.$$

Claramente de aquí se deduce la fórmula de representación de tipo Cauchy

$$f(z) = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int\limits_{\Gamma} \frac{1}{n!} \frac{(\overline{z-\zeta})^n}{\zeta - z} \partial_{\overline{\zeta}}^n f(\zeta) d\zeta, \tag{1.11}$$

ya que si f es polianalítica de orden k en Ω, la integral sobre el dominio en la Fórmula de Borel-Pompeiu se hace cero. El operador singular que se define a continuación surge naturalmente de esta fórmula de representación integral.

Definición 1.2.2 (Operador integral singular bidimensional)**.** *Sea* $0 < \alpha \leq 1$*. Para una función compleja* $f \in \mathcal{L}ip(k+\alpha,\Gamma)$ *se define el operador integral singular de orden superior como*

$$\mathcal{S}_k f(t) = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{\pi\mathbf{i}} \int_{\Gamma} \frac{(\overline{t-\zeta})^n}{n!(\zeta - t)} f^{(0,n)}(\zeta) d\zeta,\ t \in \Gamma, \tag{1.12}$$

donde las funciones $f^{(0,n)}$ *son aquellas de la colección* $\{f^{(j)} : |j| \leq k\}$ *que poseen multiíndices del tipo* $j = (0,n)$ *con* $n \leq k$*.*

Algunas observaciones sobre esta definición son pertinentes. En primer lugar, debe notarse el uso implícito del Teorema 1.1.1 en (1.12). El mismo permite identificar las derivadas parciales $\partial_{\zeta}^{j_1}\partial_{\overline{\zeta}}^{j_2} f$ con las correspondientes funciones $f^{(j_1,j_2)}$ de la colección para $f^{(0)}$. En particular, ello posibilita sustituir las funciones $\partial_{\overline{\zeta}}^n f$ que aparecen en (1.11) por las correspondientes funciones $f^{(0,n)}$.

En segundo lugar, nótese que si $k = 0$, entonces $\mathcal{S}_0$ coincide con el operador singular usual $\mathcal{S}$ asociado a la teoría de funciones analíticas.

Similarmente, es posible definir una transformada de Cauchy [14].

1.3 Análisis de Clifford

Sea $\{e_1, \ldots, e_m\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^m$ sujeta a las reglas $e_ie_j = -e_je_i$ para $i, j = 1, \ldots, m, i < j$ y $e_i^2 = -1, e_0 = 1$, para $i = 1, \ldots, m$. El conjunto $\{e_A : e_A = e_{j_1} \ldots e_{j_k}\}$, donde $A = \{j_1, \ldots, j_k\} \subset \{1, \ldots, m\}$ es tal que $j_1 < \cdots < j_k$ y $e_\emptyset = e_0 = 1$, constituye la base estándar de un álgebra asociativa (no conmutativa para $m \geq 2$): el álgebra de Clifford real, que se denota por $\mathbb{R}_{0,m}$ y cuyos elementos se denominan números de Clifford. Es decir, un número de Clifford tiene la forma $x = \sum_A x_Ae_A$ donde $x_A \in \mathbb{R}$. Si $m = 1$ y se identifica e_1 con **i**, resulta $\mathbf{i}^2 = -1$ por lo que $\mathbb{R}_{0,1} \cong \mathbb{C}$; si $m = 2$ y se identifican e_1, e_2 y $e_3 := e_1e_2$ respectivamente con **i**, **j** y **k**, se obtiene la fórmula fundamental de la multiplicación cuaterniónica $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1$, es decir, $\mathbb{R}_{0,2} \cong \mathbb{H}$.

Al introducir los subespacio de k-vectores $\mathbb{R}_{0,m}^{(k)} := \mathbf{span}_{\mathbb{R}}\{e_A : |A| = k\}$ donde $|A|$ denota el cardinal de A, resulta claro que toda el álgebra de Clifford puede representarse como suma directa de estos subespacios ($0 \leq k \leq m$) y por tanto su dimensión es igual a 2^m. La proyección $[x]_k = \sum_{|A|=k} x_Ae_A$ de un número de Clifford en $\mathbb{R}_{0,m}^{(k)}$, denominada k-parte del número x, permite expresar a todo número de Clifford como suma de sus $k-$partes. En particular, $[x]_0$ y $[x]_1$ se llaman respectivamente parte escalar y parte vectorial, lo cual está en armonía con los términos “parte real” y “parte imaginaria” conocidos del Análisis Complejo. La conjugación se define como el operador $\overline{(\cdot)}$ tal que para cada $x, y \in \mathbb{R}_{0,m}$ satisface $\overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}$ y $\overline{e_i} = -e_i, \ \forall i = 1, \ldots, m$. En particular, si x es un 1-vector, $\overline{x} = -x$.

Las álgebras de Clifford, a pesar de contener como caso particular al álgebra de los números complejos «mutan» ciertas propiedades debido fundamentalmente a la no conmutatividad de su producto. Por ejemplo, en $\mathbb{R}_{0,3}$ se verifica que $(1 - e_1e_2e_3)(1 + e_1e_2e_3) = (1 + e_1e_2e_3)(1 - e_1e_2e_3) = 0$, por lo que se puede afirmar que $\mathbb{R}_{0,m}$ tiene divisores de cero para $m \geq 3$. De hecho, esto obedece a un teorema del Álgebra más revelador, debido a Frobenius, y que expresa que las únicas álgebras reales asociativas de dimensión finita sin divisores de cero son $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ y $\mathbb{H}$. La existencia de divisores de cero conlleva a desechar la opción de considerar funciones de $\mathbb{R}_{0,m}$ en sí misma, tal como se hacía en el Análisis Complejo (funciones de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$), donde la función inversa de la idéntica, o sea, $\frac{1}{z}$, conocida como núcleo de Cauchy (salvo un factor de normalización), desempeña un rol fundamental. Así, el Análisis de Clifford comprende el estudio de funciones que están definidas en subconjuntos de $\mathbb{R}^m$ y que toman valores en $\mathbb{R}_{0,m}$, esencialmente porque los elementos de $\mathbb{R}^m$ pueden ser vistos como $1-$vectores y para todo vector no nulo sí existe inverso multiplicativo. Dichas funciones pueden escribirse como $f = \sum_A f_A e_A$, donde f_A son funciones reales. Cuando se diga que una función con valores en el álgebra de Clifford $\mathbb{R}_{0,m}$ goza de alguna propiedad como continuidad, diferenciabilidad, etc. si todas sus componentes f_A satisfacen tal propiedad. En particular, una función se dice que es la clase de Lipschitz de exponente arbitrario, si cada una de sus componentes reales lo es.

1.3.1 Funciones polimonogénicas

Definición 1.3.1 (**Operador de Dirac**). *Para una función $f \in \mathbf{C}^1(\Omega)$ se define el operador de Dirac por*

$$\partial_{\underline{x}} = \sum_{i=1}^{n} e_i \partial_{x_i}.$$

Se dice que f es monogénica a la izquierda (resp. a la derecha) si $\partial_{\underline{x}} f = 0$ (resp. $f\partial_{\underline{x}} = 0$) en Ω. Más generalmente, $f \in \mathbf{C}^k(\Omega)$ se dice polimonogénica de orden k o k-monogénica a la izquierda si $\partial_{\underline{x}}^k f = 0$ en Ω. El conjunto de todas las funciones monogénicas a la izquierda (resp. a la derecha) se denotará por $\mathcal{M}_l(\Omega)$ (resp. $\mathcal{M}_r$).

Claramente, toda función monogénica es k-monogénica de cualquier orden y la suma de funciones k-monogénicas es nuevamente una función k-monogénica. Sin embargo, a diferencia de las funciones analíticas en el Análisis Complejo, el producto de dos funciones monogénicas a un lado no necesariamente resulta una función monogénica a dicho lado. Por ejemplo, las funciones $f = e_1$ y $g = x_2 e_1 + x_1 e_2$

son monogénicas a la izquierda mientras que $\partial_{\underline{x}}(fg) = \sum_{k=1}^{n} e_i \partial_{x_i}(-x_2 + x_1 e_1 e_2) = e_1(e_1 e_2) - e_2 = -2e_2 \neq 0$ por lo que el producto fg no es monogénico a la izquierda. De hecho, $\partial_{\underline{x}}(\underline{x}) \neq 0$, es decir, la función idéntica no es monogénica.

Nótese que $\partial_{\underline{x}}$ factoriza el operador de Laplace en $\mathbb{R}^m$ en el sentido que $\partial_{\underline{x}}^2 = -\triangle_m$. De aquí que las funciones bimonogénicas no son más que las funciones armónicas $\mathbb{R}_{0,m}$-valuadas. La solución fundamental de $\partial_{\underline{x}}$ está dada entonces por $E_0(\underline{x}) = \partial_{\underline{x}} E_1(\underline{x})$, donde

$$E_1(\underline{x}) = \frac{1}{(m-2)\sigma_m |\underline{x}|^{m-2}}, \ \underline{x} \neq 0$$

es la solución fundamental del Laplaciano $\triangle_m$ y σ_m denota el área de la esfera unitaria en $\mathbb{R}^m$. La función

$$E_0(\underline{x}) = -\frac{1}{\sigma_m} \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|^m},$$

es llamada núcleo de Cauchy, y satisface en $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$

$$\partial_{\underline{x}} E_0(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{m} e_i \partial_{x_i} \Big(-\frac{1}{\sigma_m} \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|^m} \Big) = -\frac{1}{\sigma_m} \sum_{i=1}^{m} e_i \Big(\frac{e_i}{|\underline{x}|^m} - m \frac{x_i \underline{x}}{|\underline{x}|^{m+2}} \Big) = 0$$

y $E_0 \partial_{\underline{x}} = 0$ por lo que es una función monogénica a ambos lados.

Teorema 1.3.1 (**Fórmula de Borel-Pompeiu**). *Si $f \in \mathbf{C}^1(\Omega \cup \Gamma)$, entonces*

$$\int_{\Gamma} E_0(\underline{y} - \underline{x}) \eta(\underline{y}) f(\underline{y}) d\underline{y} - \int_{\Omega} E_0(\underline{y} - \underline{x}) \partial_{\underline{y}} f(\underline{y}) d\underline{y} = \begin{cases} f(\underline{x}), \underline{x} \in \Omega, \\ 0, \underline{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \overline{\Omega} \end{cases}$$

donde $\eta(\underline{y})$ denota el vector normal unitario exterior a Ω en $\underline{y} \in \Gamma$.

Corolario 1.3.1 (**Fórmula de Cauchy**). *Si $f \in \mathcal{M}_l(\Omega)$, entonces*

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\Gamma} E_0(\underline{y} - \underline{x}) \eta(\underline{y}) f(\underline{y}) d\underline{y}, & \underline{x} \in \Omega, \\ 0, & \underline{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Esto sugiere naturalmente definir la trasformada de Cauchy para funciones de la clase de Hölder como

$$\mathcal{C}f(\underline{x}) = \int\limits_{\Gamma} E_0(\underline{y} - \underline{x})\eta(\underline{y})f(\underline{y})d\underline{y},\ \underline{x} \notin \Gamma$$

así como el operador singular con núcleo de Cauchy

$$\mathbb{S}f(\underline{x}) = \int\limits_{\Gamma} E_0(\underline{y} - \underline{x})\eta(\underline{y})f(\underline{y})d\underline{y},\ \underline{x} \in \Gamma.$$

Importantes propiedades de esta transformada y del operador singular están dadas por las Fórmulas de Plemelj-Sojotski cliffordianas [35]:

$$\begin{cases} \mathcal{C}^+f(\underline{x}) - \mathcal{C}^-f(t) = f(\underline{x}), \\ \mathcal{C}^+f(\underline{x}) + \mathcal{C}^-f(\underline{x}) = \mathbb{S}f(\underline{x}), \end{cases}$$

donde $\mathcal{C}^{\pm}f$ denota los valores límites de la transformada de Cauchy en la frontera

$$\mathcal{C}^{\pm}f(\underline{x}) = \lim_{\substack{\underline{y} \to \underline{x} \\ \underline{y} \in \Omega^{\pm}}} \mathcal{C}f(\underline{y}).$$

Conclusiones del capítulo

En este capítulo se introdujeron los principales aspectos analíticos, algebraicos y geométricos que son utilizados en la tesis, tales como clases de Lipschitz y álgebra de Clifford. Además, se definió un operador integral singular asociado a la teoría de funciones polianalíticas, así como uno asociado a la teoría de funciones polimonogénicas, los cuales serán el principal foco de atención en este trabajo. En particular, para el caso de funciones complejas pertenecientes a la clase de Lipschitz de orden superior, se encontró y demostró una reescritura de la condición usual (por coordenadas) en términos complejos.

2. TEOREMA DE PLEMELJ-PRIVALOV BIDIMENSIONAL GENERALIZADO

CAPÍTULO 2

Teorema de Plemelj-Privalov bidimensional generalizado

En este capítulo se demuestra la invariancia de la clase de Lipschitz de exponente arbitrario bajo la acción del operador integral singular de orden superior. Se recuerda que $\Gamma_r(t)$ denota el tramo de curva $\Gamma \cap B_r(t),\ t \in \Gamma$ y $C_r(t)$ su frontera.

2.1 Operador integral singular complejo de orden superior

Se hace necesario comprobar que el operador bidimensional generalizado introducido está bien definido. Como es conocido del caso complejo, para funciones de Hölder, esto es, de Lipschitz con exponente α ($k = 0$) el operador singular usual $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$ está bien definido [32, pp. 23-24].

Sea $k \neq 0$, entonces (1.12) se expresa como

$$\mathcal{S}_k f(t) = \frac{1}{\pi \mathbf{i}} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta + \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{\pi \mathbf{i}} \int_\Gamma \frac{(\overline{t - \zeta})^n}{n!(\zeta - t)} f^{(0,n)}(\zeta) d\zeta. \tag{2.1}$$

Para $1 \leq n \leq k$,

$$\left|\frac{(\overline{t-\zeta})^n}{n!(\zeta - t)} f^{(0,n)}(\zeta)\right| \leq c|\zeta - t|^{n-1}|f^{(0,n)}(\zeta)| \leq c|\zeta - t|^{n-1} \leq c\,\mathtt{d}(\Gamma)^{n-1},$$

donde $\mathtt{d}(\Gamma)$ es el diámetro de Γ. Es decir, el segundo sumando de (2.1) existe en el sentido impropio y, por consiguiente, según el valor principal. Si $n = 0$, y siguiendo [32, pág. 24], el primer sumando se reescribe como

$$\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta = \int_\Gamma \frac{f(\zeta) - f(t)}{\zeta - t} d\zeta + f(t) \int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - t}. \tag{2.2}$$

Al analizar el primer sumando de (2.2) se nota que

$$\begin{aligned} \frac{|f(t) - f(\zeta)|}{|\zeta - t|} &= \frac{\left|\sum\limits_{0<|l|\leq k} \frac{f^{(l)}(\zeta)}{l!}(\zeta - t)^{l_1}(\overline{\zeta - t})^{l_1} + R_0(t,\zeta)\right|}{|\zeta - t|} \\ &\leq \frac{\sum\limits_{0<|l|\leq k} \left|\frac{f^{(l)}(\zeta)}{l!}\right| |\zeta - t|^{|l|} + |R_0(t,\zeta)|}{|\zeta - t|} \\ &\leq \sum_{0<|l|\leq k} c|\zeta - t|^{|l|-1} + \frac{c|t - \zeta|^{k+\alpha}}{|\zeta - t|} \\ &\leq c, \end{aligned}$$

por tanto existe en el sentido impropio. Por su parte, el segundo sumando existe en el sentido del valor principal pues al ser la curva suave y cerrada se tiene que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\Gamma \setminus \Gamma_\epsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - t} = \pi \mathbf{i}.$$

En resumen, el operador propuesto para funciones de Lipschitz de exponente arbitrario existe en el sentido del valor principal.

2.1.1 Invariancia de la clase de Lipschitz de primer orden

En esta sección se prueba la invariancia de la clase de Lipschitz de primer orden [26] bajo el operador integral singular de orden superior. Este resultado será esencialmente usado en la Sección 2.1.2 para el caso general. Los próximos dos resultados serán utilizados con bastante frecuencia y sus demostraciones no serán incluidas, pues son tratadas en diferentes bibliografías (véase [32], por ejemplo).

Lema 2.1.1. *Sea* $0 \leq r \leq \mathtt{d}(\Gamma)$ *y* $t \in \Gamma$. *Entonces*

(a) $\mathtt{m}(\Gamma_r(t)) := \displaystyle\int_{\Gamma_r(t)} |d\zeta| \leq cr$ **(b)** $\displaystyle\int_{\Gamma_r(t)} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - t|^{1-\alpha}} \leq c\, r^{\alpha}$

(c) $r \displaystyle\int_{\Gamma\setminus\Gamma_r(t)} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - t|^{2-\alpha}} \leq c\, r^{\alpha}$ **(d)** $\left| \displaystyle\int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma_r(t)} \frac{d\zeta}{\zeta - t} \right| \leq c.$

Aquí y en lo que sigue, c denotará una constante genérica positiva, no necesariamente la misma en diferentes apariciones.

Lema 2.1.2. *Sean* $t, \tau \in \Gamma$. *Entonces,*

(a) $\displaystyle\frac{1}{\pi\mathbf{i}} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{(\zeta - t)(\zeta - \tau)} = 0$ **(b)** $\displaystyle\frac{1}{\pi\mathbf{i}} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{(\zeta - t)^k} = 0, \ \forall \mathbb{N} \ni k \geq 2.$

Teorema 2.1.1. *Sea* $0 < \alpha < 1$ *y* $f \in \mathcal{L}ip(1 + \alpha, \Gamma)$. *Entonces se tiene la inclusión*

$$\mathcal{S}_1(\mathcal{L}ip(1 + \alpha, \Gamma)) \subset \mathcal{L}ip(1 + \alpha, \Gamma).$$

Demostración. Por simplicidad en la notación, se escribirá $\widehat{f}$ en vez de $\mathcal{S}_1 f$. Sean

$$\widehat{f}^{(1,0)}(t) = \frac{1}{\pi\mathbf{i}} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) + \overline{t - \zeta} f^{(0,1)}(\zeta)}{(\zeta - t)^2} d\zeta, \quad \widehat{f}^{(0,1)}(t) = \frac{1}{\pi\mathbf{i}} \int_{\Gamma} \frac{f^{(0,1)}(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta.$$

Se probará que tanto las funciones $\widehat{f}^{(j)}$ como los restos

$$\widehat{R}_{(0,0)}(t, \tau) = R_{(0,0)}[\widehat{f}](t, \tau) = \widehat{f}(t) - \widehat{f}(\tau) - (t - \tau)\widehat{f}^{(1,0)}(\tau) - (\overline{t - \tau})\widehat{f}^{(0,1)}(\tau)$$

$$\widehat{R}_{(0,1)}(t, \tau) = R_{(0,1)}[\widehat{f}](t, \tau) = \widehat{f}^{(0,1)}(t) - \widehat{f}^{(0,1)}(\tau)$$

$$\widehat{R}_{(1,0)}(t, \tau) = R_{(1,0)}[\widehat{f}](t, \tau) = \widehat{f}^{(1,0)}(t) - \widehat{f}^{(1,0)}(\tau)$$

satisfacen $|\widehat{f}^{(j)}| \leq c$ y $|\widehat{R}_j(t,\tau)| \leq c|t-\tau|^{1+\alpha-|j|}$ para cada $0 \leq |j| \leq 1$. Dado que la acotación de las funciones resulta bastante directa, se mostrará solamente el proceder con las estimaciones para los restos. Primero se estimará $|\widehat{R}_0(t,\tau)|$. Esto es

$$\begin{aligned}\widehat{R}_0(t,\tau) &= \frac{1}{\pi\mathbf{i}}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)+(\overline{t-\zeta})f^{(0,1)}(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta - \frac{1}{\pi\mathbf{i}}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)+(\overline{\tau-\zeta})f^{(0,1)}(\zeta)}{\zeta-\tau}d\zeta \\ &\quad -\frac{t-\tau}{\pi\mathbf{i}}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)+(\overline{\tau-\zeta})f^{(0,1)}(\zeta)}{(\zeta-\tau)^2}d\zeta - \frac{\overline{t-\tau}}{\pi\mathbf{i}}\int_\Gamma \frac{f^{(0,1)}(\zeta)}{\zeta-\tau}d\zeta. \qquad (2.3)\end{aligned}$$

Al usar la identidad

$$\overline{t-\zeta} = \overline{(t-\tau)+(\tau-\zeta)} = \overline{t-\tau}+\overline{\tau-\zeta}$$

en (2.3) y agrupar se obtiene

$$\begin{aligned}\widehat{R}_0(t,\tau) &= \frac{t-\tau}{\pi\mathbf{i}}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)+(\overline{\tau-\zeta})f^{(0,1)}(\zeta)}{(\zeta-t)(\zeta-\tau)}d\zeta + \frac{\overline{t-\tau}}{\pi\mathbf{i}}\int_\Gamma \frac{f^{(0,1)}(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta \\ &\quad -\frac{t-\tau}{\pi\mathbf{i}}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)+(\overline{\tau-\zeta})f^{(0,1)}(\zeta)}{(\zeta-\tau)^2}d\zeta - \frac{\overline{t-\tau}}{\pi\mathbf{i}}\int_\Gamma \frac{f^{(0,1)}(\zeta)}{\zeta-\tau}d\zeta.\end{aligned}$$

Aún más simplificado,

$$\begin{aligned}\widehat{R}_0(t,\tau) &= \frac{(t-\tau)^2}{\pi\mathbf{i}}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)+(\overline{\tau-\zeta})f^{(0,1)}(\zeta)}{(\zeta-t)(\zeta-\tau)^2}d\zeta + \\ &\quad +\frac{\overline{t-\tau}}{\pi\mathbf{i}}\Big[\int_\Gamma \frac{f^{(0,1)}(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta - \int_\Gamma \frac{f^{(0,1)}(\zeta)}{\zeta-\tau}d\zeta\Big].\end{aligned}$$

Al despejar de (1.3) resulta

$$f(\zeta)+(\overline{\tau-\zeta})f^{(0,1)}(\zeta) = f(\tau)-(\tau-\zeta)f^{(1,0)}(\zeta)-R_0(\tau,\zeta),$$

lo que sustituido en la expresión aterior y unido al Lema 2.1.2-(a) implica

$$\begin{aligned}\widehat{R}_0(t,\tau) &= \frac{(t-\tau)^2}{\pi\mathbf{i}}\int_\Gamma \frac{f^{(1,0)}(\zeta)}{(\zeta-t)(\zeta-\tau)}d\zeta - \frac{(t-\tau)^2}{\pi\mathbf{i}}\int_\Gamma \frac{R_0(\tau,\zeta)}{(\zeta-t)(\zeta-\tau)^2}d\zeta \\ &+\frac{\overline{t-\tau}}{\pi\mathbf{i}}\Big[\int_\Gamma \frac{f^{(0,1)}(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta - \int_\Gamma \frac{f^{(0,1)}(\zeta)}{\zeta-\tau}d\zeta\Big] \\ &= \frac{t-\tau}{\pi\mathbf{i}}\Big[\int_\Gamma \frac{f^{(1,0)}(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta - \int_\Gamma \frac{f^{(1,0)}(\zeta)}{\zeta-\tau}d\zeta\Big] - \frac{(t-\tau)^2}{\pi\mathbf{i}}\int_\Gamma \frac{R_0(\tau,\zeta)}{(\zeta-t)(\zeta-\tau)^2}d\zeta \\ &+\frac{\overline{t-\tau}}{\pi\mathbf{i}}\Big[\int_\Gamma \frac{f^{(0,1)}(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta - \int_\Gamma \frac{f^{(0,1)}(\zeta)}{\zeta-\tau}d\zeta\Big].\end{aligned}$$

Como $f \in \mathcal{L}ip(1+\alpha,\Gamma)$, se tendrá que $f^{(0,1)}, f^{(1,0)} \in \mathcal{L}ip(\alpha,\Gamma)$, por lo que, del Teorema de Plemelj-Privalov clásico, se concluye que el primer y último sumando anteriores están dominados por $c\,|t-\tau|^\alpha$. Por tanto, será suficiente probar que el segundo sumando

$$I(t,\tau) = \frac{(t-\tau)^2}{\pi\mathbf{i}}\int_\Gamma \frac{R_0(\tau,\zeta)}{(\zeta-t)(\zeta-\tau)^2}d\zeta$$

está también dominado modularmente por $c|t-\tau|^\alpha$.

Sea $r = \frac{|t-\tau|}{2}$ y denótese $\Gamma_1 = \Gamma_r(t)$, $\Gamma_2 = \Gamma_r(\tau)$, $\Gamma_3 = \Gamma \setminus \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ así como

$$I_p(t,\tau) = \frac{(t-\tau)^2}{\pi\mathbf{i}}\int_{\Gamma_p} \frac{R_0(\tau,\zeta)}{(\zeta-t)(\zeta-\tau)^2}d\zeta,\ p=\overline{1,3}.$$

Entonces, evidentemente la estimación de $|I(t,\tau)|$ se reduce a la de $|I_p(t,\tau)|$ para cada $p=\overline{1,3}$.

En primer lugar, el Lema 2.1.1-(b) junto al hecho de que $|\zeta-t|\geq r$ en Γ_2 implican

$$\begin{aligned}|I_2(t,\tau)| &\leq c|t-\tau|^2\int_{\Gamma_2}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-t||\zeta-\tau|^{1-\alpha}} \leq c|t-\tau|\int_{\Gamma_2}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-\tau|^{1-\alpha}} \\ &\leq c|t-\tau|^{1+\alpha}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

En segundo lugar, se observa que si $|\zeta-\tau|\leq|\zeta-t|$, entonces

$$\frac{1}{|\zeta-t||\zeta-\tau|^{1-\alpha}} \leq \frac{1}{|\zeta-\tau|^{2-\alpha}},$$

y si $|\zeta - t| \leq |\zeta - \tau|$, entonces

$$\frac{1}{|\zeta - t||\zeta - \tau|^{1-\alpha}} \leq \frac{1}{|\zeta - t|^{2-\alpha}}.$$

Por lo que en cualquier caso resulta

$$\frac{1}{|\zeta - t||\zeta - \tau|^{1-\alpha}} \leq \frac{1}{|\zeta - t|^{2-\alpha}} + \frac{1}{|\zeta - \tau|^{2-\alpha}}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} |I_3(t,\tau)| &\leq c|t-\tau|^2 \int_{\Gamma_3} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - t||\zeta - \tau|^{1-\alpha}} \\ &\leq c|t-\tau|^2 \Big\{ \int_{\Gamma_3} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - t|^{2-\alpha}} + \int_{\Gamma_3} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - \tau|^{2-\alpha}} \Big\}. \end{aligned}$$

Como $\Gamma_3 \subset \Gamma \setminus \Gamma_1$ y $\Gamma_3 \subset \Gamma \setminus \Gamma_2$, del Lema 2.1.1-(c) se concluye que

$$|I_3(t,\tau)| \leq c|t-\tau|^2 \Big\{ \int_{\Gamma \setminus \Gamma_1} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - t|^{2-\alpha}} + \int_{\Gamma \setminus \Gamma_2} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - \tau|^{2-\alpha}} \Big\} \leq \frac{c}{|t-\tau|^{1-\alpha}}, \tag{2.5}$$

y consecuentemente

$$|I_3(t,\tau)| \leq c|t-\tau|^{1+\alpha}. \tag{2.6}$$

Finalmente, se examinará $I_1(t,\tau)$. De la identidad (1.10) se sigue que

$$\begin{aligned} I_1(t,\tau) = \frac{(t-\tau)^2}{\pi \mathbf{i}} \Big\{ &\int_{\Gamma_1} \frac{R_0(\tau,t)d\zeta}{(\zeta - t)(\zeta - \tau)^2} + \int_{\Gamma_1} \frac{R_0(t,\zeta)d\zeta}{(\zeta - t)(\zeta - \tau)^2} \\ &+ (t-\tau) \int_{\Gamma_1} \frac{R_{(1,0)}(t,\zeta)d\zeta}{(\zeta - t)(\zeta - \tau)^2} + (\overline{t-\tau}) \int_{\Gamma_1} \frac{R_{(0,1)}(t,\zeta)d\zeta}{(\zeta - t)(\zeta - \tau)^2} \Big\}. \end{aligned}$$

Denótese ahora por $I_1^p(t,\tau)$, el p-ésimo término en corchetes de la expresión anterior para $p = \overline{1,4}$. Entonces será suficiente estimar cada uno de ellos. Se comenzará con

$I_1^1(t,\tau)$. De la identidad

$$\frac{1}{(\zeta-t)(\zeta-\tau)^2}=\frac{1}{(t-\tau)^2}\Big(\frac{1}{\zeta-t}-\frac{1}{\zeta-\tau}\Big)-\frac{1}{t-\tau}\frac{1}{(\zeta-\tau)^2},$$

se obtiene

$$\begin{aligned}|I_1^1(t,\tau)| &\leq \frac{c|R_0(\tau,t)|}{|t-\tau|^2}\Big(\Big|\int_{\Gamma_1}\frac{d\zeta}{\zeta-t}\Big|+\Big|\int_{\Gamma_1}\frac{d\zeta}{\zeta-\tau}\Big|+|t-\tau|\Big|\int_{\Gamma_1}\frac{d\zeta}{(\zeta-\tau)^2}\Big|\Big)\\ &\leq \frac{c}{|\tau-t|^{1-\alpha}}\Big(\Big|\int_{\Gamma_1}\frac{d\zeta}{\zeta-t}\Big|+\int_{\Gamma_1}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-\tau|}+|t-\tau|\int_{\Gamma_1}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-\tau|^2}\Big).\end{aligned}$$

Por el Lema 2.1.1-(d) y por ser la curva suave y cerrada resulta

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\Gamma_1}\frac{d\zeta}{\zeta-t}\Big| &= \Big|\int_{\Gamma}\frac{d\zeta}{\zeta-t}-\int_{\Gamma\setminus\Gamma_1}\frac{d\zeta}{\zeta-t}\Big|\leq\Big|\int_{\Gamma}\frac{d\zeta}{\zeta-t}\Big|+\Big|\int_{\Gamma\setminus\Gamma_1}\frac{d\zeta}{\zeta-t}\Big|\\ &\leq |\pi\mathbf{i}|+c\leq c.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Ahora, del Lema 2.1.1-(a) se pueden estimar los sumandos restantes

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-\tau|} &\leq \frac{c}{|t-\tau|}\int_{\Gamma_1}|d\zeta|\leq\frac{c\,\mathtt{m}(\Gamma_1)}{|t-\tau|}\leq c,\\ |t-\tau|\int_{\Gamma_1}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-\tau|^2} &\leq \frac{c}{|t-\tau|}\int_{\Gamma_1}|d\zeta|\leq\frac{c\,\mathtt{m}(\Gamma_1)}{|t-\tau|}\leq c.\end{aligned}$$

Consecuentemente, $|I_1^1(t,\tau)|\leq\dfrac{c}{|t-\tau|^{1-\alpha}}$.
Ahora se analizará $I_1^2(t,\tau)$. Como $|t-\zeta|\leq|t-\tau|$ y $|\zeta-\tau|\geq|t-\tau|$ en Γ_1, se tendrá

$$|I_1^2(t,\tau)|\leq\int_{\Gamma_1}\frac{|R_0(t,\zeta)||d\zeta|}{|\zeta-t||\zeta-\tau|^2}\leq c\frac{|t-\tau|^\alpha}{|t-\tau|^2}\int_{\Gamma_1}|d\zeta|\leq\frac{c\,\mathtt{m}(\Gamma_1)}{|t-\tau|^{2-\alpha}}\leq\frac{c}{|t-\tau|^{1-\alpha}}.$$

Al aplicar el Lema 2.1.1-(b),

$$|I_1^3(t,\tau)|\leq|t-\tau|\int_{\Gamma_1}\frac{|R_{(1,0)}(t,\zeta)||d\zeta|}{|\zeta-t||\zeta-\tau|^2}\leq\frac{c}{|t-\tau|}\int_{\Gamma_1}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-t|^{1-\alpha}}\leq\frac{c}{|t-\tau|^{1-\alpha}}.$$

Análogamente, $|I_1^4(t,\tau)|\leq\dfrac{c}{|t-\tau|^{1-\alpha}}$ y finalmente $|\widehat{R}_0(t,\tau)|\leq c|t-\tau|^{1+\alpha}$. Observe ahora que, como $f^{(0,1)}\in\mathcal{L}ip(\alpha,\Gamma)$, por el Teorema de Plemelj-Privalov clásico se satisface automáticamente $|\widehat{R}_{(0,1)}(t,\tau)| \leq c|t-\tau|^{\alpha}$. Luego el análisis se reduce a probar que

$$|\widehat{R}_{(1,0)}(t,\tau)| \leq c|t-t|^{\alpha}.$$

En aras de encontrar esta estimación se usa (1.3) de nuevo para expresar

$$f(\zeta) + \overline{t-\zeta} f^{(0,1)}(\zeta) = f(t) - (t-\zeta) f^{(1,0)}(\zeta) - R_0(t,\zeta),$$

que una vez sustituido permite escribir

$$\begin{aligned} \widehat{R}_{(1,0)}(t,\tau) &= \frac{1}{\pi \mathbf{i}} \int_{\Gamma} \frac{f^{(1,0)}(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta - \frac{1}{\pi \mathbf{i}} \int_{\Gamma} \frac{f^{(1,0)}(\zeta)}{\zeta - \tau} d\zeta + \frac{1}{\pi \mathbf{i}} \int_{\Gamma} \frac{R_0(\tau,\zeta)}{(\zeta-\tau)^2} d\zeta \\ &\quad - \frac{1}{\pi \mathbf{i}} \int_{\Gamma} \frac{R_0(t,\zeta)}{(\zeta - t)^2} d\zeta. \end{aligned}$$

Como $f^{(1,0)} \in \mathcal{L}ip(\alpha, \Gamma)$,

$$\left| \frac{1}{\pi \mathbf{i}} \int_{\Gamma} \frac{f^{(1,0)}(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta - \frac{1}{\pi \mathbf{i}} \int_{\Gamma} \frac{f^{(1,0)}(\zeta)}{\zeta - \tau} d\zeta \right| \leq c|t-\tau|^{\alpha}.$$

Por tanto será suficiente estimar

$$J(t,\tau) = \frac{1}{\pi \mathbf{i}} \int_{\Gamma} \frac{R_0(\tau,\zeta)}{(\zeta-\tau)^2} d\zeta - \frac{1}{\pi \mathbf{i}} \int_{\Gamma} \frac{R_0(t,\zeta)}{(\zeta - t)^2} d\zeta.$$

Partiendo de las identidades

$$\frac{1}{\pi \mathbf{i}} \int_{\Gamma} \frac{R_0(\tau,\zeta)}{(\zeta-\tau)^2} d\zeta = \frac{t-\tau}{\pi \mathbf{i}} \int_{\Gamma} \frac{-R_0(\tau,\zeta)}{(\zeta-\tau)^2(\zeta-t)} d\zeta + \frac{1}{\pi \mathbf{i}} \int_{\Gamma} \frac{R_0(\tau,\zeta)}{(\zeta-\tau)(\zeta-t)} d\zeta \tag{2.8}$$

$$\frac{1}{\pi \mathbf{i}} \int_{\Gamma} \frac{R_0(t,\zeta)}{(\zeta-t)^2} d\zeta = \frac{t-\tau}{\pi \mathbf{i}} \int_{\Gamma} \frac{R_0(t,\zeta)}{(\zeta-t)^2(\zeta-\tau)} d\zeta + \frac{1}{\pi \mathbf{i}} \int_{\Gamma} \frac{R_0(t,\zeta)}{(\zeta-\tau)(\zeta-t)} d\zeta \tag{2.9}$$

se sutrae (2.9) de (2.8) quedando

$$\begin{aligned} J(t,\tau) &= \frac{t-\tau}{\pi \mathbf{i}} \int_{\Gamma} \frac{-R_0(\tau,\zeta)}{(\zeta-\tau)^2(\zeta-t)} d\zeta - \frac{t-\tau}{\pi \mathbf{i}} \int_{\Gamma} \frac{R_0(t,\zeta)}{(\zeta-t)^2(\zeta-\tau)} d\zeta \\ &\quad + \frac{1}{\pi \mathbf{i}} \int_{\Gamma} \frac{R_0(\tau,\zeta) - R_0(t,\zeta)}{(\zeta-\tau)(\zeta-t)} d\zeta. \end{aligned} \tag{2.10}$$

De la desigualdad

$$|I(t,\tau)| = \Big|\frac{(t-\tau)^2}{\pi\mathbf{i}}\int_\Gamma \frac{R_0(\tau,\zeta)}{(\zeta-t)(\zeta-\tau)^2}d\zeta\Big| \le c|t-\tau|^{1+\alpha}$$

probada anteriormente, se tiene rápidamente que los dos primeros términos del miembro derecho de (2.10) están acotados por $c|t-\tau|^\alpha$. De aquí, el análisis se reduce a probar que también lo está el último término

$$J'(t,\tau) = \frac{1}{\pi\mathbf{i}}\int_\Gamma \frac{R_0(\tau,\zeta)-R_0(t,\zeta)}{(\zeta-\tau)(\zeta-t)}d\zeta.$$

De (1.10) se sigue que

$$R_0(\tau,\zeta)-R_0(t,\zeta) = R_0(\tau,t) + (\tau-t)R_{(1,0)}(t,\zeta) + (\overline{\tau-t})R_{(0,1)}(t,\zeta).$$

Al sustituir en $J'(t,\tau)$ resulta

$$J'(t,\tau) = \frac{\tau-t}{\pi\mathbf{i}}\int_\Gamma \frac{R_{(1,0)}(t,\zeta)}{(\zeta-\tau)(\zeta-t)}d\zeta + \frac{\overline{\tau-t}}{\pi\mathbf{i}}\int_\Gamma \frac{R_{(0,1)}(t,\zeta)}{(\zeta-\tau)(\zeta-t)}d\zeta. \tag{2.11}$$

Denótese por $J''(t,\tau)$ el primer término del miembro derecho de (2.11). Para Γ_p definido como antes, con $p=\overline{1,3}$, se denotará

$$J''_p(t,\tau) = \frac{\tau-t}{\pi\mathbf{i}}\int_{\Gamma_p} \frac{R_{(1,0)}(t,\zeta)}{(\zeta-\tau)(\zeta-t)}d\zeta.$$

Se tiene entonces

$$|J''_1(t,\tau)| = \Big|\frac{\tau-t}{\pi\mathbf{i}}\int_{\Gamma_1} \frac{R_{(1,0)}(t,\zeta)}{(\zeta-\tau)(\zeta-t)}d\zeta\Big| \le c\int_{\Gamma_1}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-t|^{1-\alpha}} \le c|t-\tau|^\alpha. \tag{2.12}$$

Por su parte, (2.5) implica que

$$\begin{aligned} |J''_3(t,\tau)| &= \Big|\frac{\tau-t}{\pi\mathbf{i}}\int_{\Gamma_3} \frac{R_{(1,0)}(t,\zeta)}{(\zeta-\tau)(\zeta-t)}d\zeta\Big| \le c|t-\tau|\int_{\Gamma_3}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-\tau||\zeta-t|^{1-\alpha}} \\ &\le c|t-\tau|^\alpha. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Ahora se estimará $J_2''(t,\tau)$. De (1.10) se obtiene que $R_{(1,0)}(t,\zeta) = R_{(1,0)}(\tau,\zeta) - R_{(1,0)}(\tau,t)$, de donde

$$\Big|\int_{\Gamma_2}\frac{R_{(1,0)}(t,\zeta)}{(\zeta-\tau)(\zeta-t)}d\zeta\Big| \le \Big|\int_{\Gamma_2}\frac{R_{(1,0)}(\tau,\zeta)}{(\zeta-\tau)(\zeta-t)}d\zeta\Big| + \Big|\int_{\Gamma_2}\frac{R_{(1,0)}(\tau,t)}{(\zeta-\tau)(\zeta-t)}d\zeta\Big|$$

Se necesita verificar que los dos términos del miembro derecho de la expresión anterior están acotados por $\frac{c}{|t-\tau|^{1-\alpha}}$. Al examinar el primero, resulta

$$\Big|\int_{\Gamma_2}\frac{R_{(1,0)}(\tau,\zeta)}{(\zeta-\tau)(\zeta-t)}d\zeta\Big| \le c\int_{\Gamma_2}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-\tau|^{1-\alpha}|\zeta-t|} \le \frac{c}{|t-\tau|}\int_{\Gamma_2}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-\tau|^{1-\alpha}} \le \frac{c}{|t-\tau|^{1-\alpha}}.$$

Por otro lado,

$$\Big|\int_{\Gamma_2}\frac{R_{(1,0)}(\tau,t)}{(\zeta-\tau)(\zeta-t)}d\zeta\Big| = \Big|\frac{R_{(1,0)}(\tau,t)}{t-\tau}\Big(\int_{\Gamma_2}\frac{d\zeta}{\zeta-t} - \int_{\Gamma_2}\frac{d\zeta}{\zeta-\tau}\Big)\Big|.$$

Modularmente, las dos integrales en paréntesis están acotadas por una constante no negativa c, por tanto

$$\Big|\int_{\Gamma_2}\frac{R_{(1,0)}(\tau,t)}{(\zeta-\tau)(\zeta-t)}d\zeta\Big| \le c|t-\tau|^{\alpha-1},$$

y finalmente

$$|J_2''(t,\tau)| = \Big|\frac{\tau-t}{\pi\mathbf{i}}\int_{\Gamma_2}\frac{R_{(1,0)}(\tau,t)}{(\zeta-\tau)(\zeta-t)}d\zeta\Big| \le c|t-\tau|^{\alpha}. \tag{2.14}$$

Argumentos similares se aplican al segundo término del miembro derecho de (2.11), y al combinar (2.12)-(2.14) la prueba estará completa. □

2.1.2 Invariancia de la clase de Lipschitz de orden arbitrario

En aras de extender el resultado establecido en el Teorema 2.1.1 para todo k, o sea, para toda la clase $\mathcal{L}ip(k+\alpha,\Gamma)$ [28], fueron establecidos los siguientes resultados auxiliares.

Lema 2.1.3. *Sean $m, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $r = \frac{|\tau - t|}{2}$ y $\Gamma_1 = \Gamma_r(t)$. Entonces*

$$\left| \int_{\Gamma_1} \frac{d\zeta}{(\zeta - t)^k (\zeta - \tau)^m} \right| \leq \frac{c}{|t - \tau|^{k+m-1}}. \tag{2.15}$$

Demostración. Si m y k son cero simultáneamente, entonces el Lema 2.1.1-(a) garantiza la desigualdad (2.15). Se puede suponer entonces que m y k no son cero simultáneamente. Si $k = 0$ y $m \geq 1$, se usa el Lema 2.1.1-(a) para obtener

$$\left| \int_{\Gamma_1} \frac{d\zeta}{(\zeta - \tau)^m} \right| \leq \int_{\Gamma_1} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - \tau|^m} \leq \frac{c}{|t - \tau|^m} \int_{\Gamma_1} |d\zeta| \leq \frac{c}{|t - \tau|^{m-1}}.$$

Si $m = 0$ y $k = 1$, el resultado se ha establecido ya en (2.7). Si $m = 0$ y $k > 1$ se usa entonces el Lema 2.1.2-(b) para obtener

$$\left| \int_{\Gamma_1} \frac{d\zeta}{(\zeta - t)^k} \right| = \left| \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{(\zeta - t)^k} - \int_{\Gamma \backslash \Gamma_1} \frac{d\zeta}{(\zeta - t)^k} \right| = \left| \int_{\Gamma \backslash \Gamma_1} \frac{d\zeta}{(\zeta - t)^k} \right|.$$

Como Γ es suave, Γ_1 se puede considerar un arco; y al ser cerrada, el Teorema integral de Cauchy implica $\displaystyle\int_{\Gamma \backslash \Gamma_1} \frac{d\zeta}{(\zeta - t)^k} = \sum_j \int_{C_r^j(t)} \frac{d\zeta}{(\zeta - t)^k}$, donde $C_r^j(t)$ denotan los arcos que quedan contenidos en el dominio. Si $C_r(t)$ es parametrizada por $\zeta - t = re^{\mathbf{i}\theta},\ a_j \leq \theta \leq b_j$, será $d\zeta = \mathbf{i}re^{\mathbf{i}\theta}$ y

$$\left| \int_{\Gamma \backslash \Gamma_1} \frac{d\zeta}{(\zeta - t)^k} \right| = \left| \int_{C_r^j(t)} \frac{d\zeta}{(\zeta - t)^k} \right| = \left| \frac{\mathbf{i}r}{r^k} \int_{C_r^j(t)} \frac{e^{\mathbf{i}\theta}}{e^{\mathbf{i}k\theta}} d\theta \right| \leq \frac{c}{|t - \tau|^{k-1}}$$

para cada j. Luego, $\displaystyle\left| \int_{\Gamma_1} \frac{d\zeta}{(\zeta - t)^k} \right| \leq \frac{c}{|t - \tau|^{k-1}}$ como se deseaba. Obsérvese que el lema está probado ya para $k + m = 1$ (o sea, $k = 0$ y $m = 1$ y $k = 1$ y $m = 0$). Considérese entonces $m \neq 0$ y $k \neq 0$. Se probará el lema por inducción sobre $k + m$. Supóngase que (2.15) es válido hasta $k + m = N$. Sea ahora $k + m = N + 1$ y asúmase $k \leq m$, entonces

$$\begin{aligned} K(t,\tau) &= \int_{\Gamma_1} \frac{d\zeta}{(\zeta-t)^k(\zeta-\tau)^m} = \int_{\Gamma_1} \frac{(\zeta-t)^{m-k}}{(\zeta-t)^m(\zeta-\tau)^m} d\zeta \\ &= \int_{\Gamma_1} (\zeta-t)^{m-k} \left[\frac{1}{(\zeta-t)(\zeta-\tau)}\right]^m d\zeta \\ &= \frac{1}{(t-\tau)^m} \int_{\Gamma_1} (\zeta-t)^{m-k} \left[\frac{1}{\zeta-t} - \frac{1}{\zeta-\tau}\right]^m d\zeta \\ &= \frac{1}{(t-\tau)^m} \int_{\Gamma_1} (\zeta-t)^{m-k} \sum_{j=0}^{m} \frac{\binom{m}{j}(-1)^j}{(\zeta-t)^{m-j}(\zeta-\tau)^j} d\zeta \\ &= \frac{1}{(t-\tau)^m} \sum_{j=0}^{m} \int_{\Gamma_1} \frac{\binom{m}{j}(-1)^j(\zeta-t)^{m-k}}{(\zeta-t)^{m-j}(\zeta-\tau)^j} d\zeta. \end{aligned}$$

Como $k \leq m$,

$$\begin{aligned} K(t,\tau) &= \frac{1}{(t-\tau)^m} \Bigg\{ \sum_{j=0}^{k} \int_{\Gamma_1} \frac{\binom{m}{j}(-1)^j}{(\zeta-t)^{k-j}(\zeta-\tau)^j} d\zeta \\ &\quad + \sum_{j=k+1}^{m} \int_{\Gamma_1} \frac{\binom{m}{j}(-1)^j(\zeta-t)^{j-k}}{(\zeta-\tau)^j} d\zeta \Bigg\}. \end{aligned}$$

Ahora, como $(k-j)+j = k < N$, la hipótesis de inducción implica

$$\left| \int_{\Gamma_1} \frac{\binom{m}{j}(-1)^j}{(\zeta-t)^{k-j}(\zeta-\tau)^j} d\zeta \right| \leq c \left| \int_{\Gamma_1} \frac{d\zeta}{(\zeta-t)^{k-j}(\zeta-\tau)^j} \right| \leq \frac{c}{|t-\tau|^{k-1}}.$$

Por otro lado,

$$\left| \int_{\Gamma_1} \frac{\binom{m}{j}(-1)^j(\zeta-t)^{j-k}}{(\zeta-\tau)^j} d\zeta \right| \leq \frac{c|t-\tau|^{j-k}}{|t-\tau|^j} \int_{\Gamma_1} |d\zeta| \leq \frac{c}{|t-\tau|^{k-1}}.$$

De aquí, $|K(t,\tau)| \leq \dfrac{1}{|t-\tau|^m}\left(\dfrac{c}{|t-\tau|^{k-1}}\right) \leq \dfrac{c}{|t-\tau|^{k+m-1}}$.
Asúmase ahora $k \geq m$. Entonces

$$\begin{aligned} K(t,\tau) &= \int_{\Gamma_1} \frac{d\zeta}{(\zeta-t)^k(\zeta-\tau)^m} = \int_{\Gamma_1} \frac{(\zeta-\tau)^{k-m}}{(\zeta-t)^k(\zeta-\tau)^k} d\zeta \\ &= \int_{\Gamma_1} (\zeta-\tau)^{k-m} \left[\frac{1}{(\zeta-t)(\zeta-\tau)}\right]^k d\zeta \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(t-\tau)^k}\int_{\Gamma_1}(\zeta-\tau)^{k-m}\left[\frac{1}{\zeta-t}-\frac{1}{\zeta-\tau}\right]^k d\zeta\\
&= \frac{1}{(t-\tau)^k}\sum_{j=0}^{k}\int_{\Gamma_1}\frac{\binom{k}{j}(-1)^{k-j}(\zeta-\tau)^{k-m}}{(\zeta-t)^j(\zeta-\tau)^{k-j}}d\zeta.
\end{aligned}
$$

Como $k \geq m$,

$$
\begin{aligned}
K(t,\tau) &= \frac{1}{(t-\tau)^k}\Bigg[\sum_{j=0}^{m}\int_{\Gamma_1}\frac{\binom{k}{j}(-1)^{k-j}d\zeta}{(\zeta-t)^j(\zeta-\tau)^{m-j}}\\
&\quad+\sum_{j=m+1}^{k}\int_{\Gamma_1}\frac{\binom{k}{j}(-1)^{k-j}(\zeta-\tau)^{j-m}}{(\zeta-t)^j}d\zeta\Bigg].
\end{aligned}
$$

Luego, como $j+(m-j)=m<N$, la hipótesis de inducción implica

$$
\left|\int_{\Gamma_1}\frac{\binom{k}{j}(-1)^j d\zeta}{(\zeta-t)^j(\zeta-\tau)^{m-j}}\right| \leq c\left|\int_{\Gamma_1}\frac{d\zeta}{(\zeta-t)^j(\zeta-\tau)^{m-j}}\right| \leq \frac{c}{|t-\tau|^{m-1}}.
$$

Por otro lado, al usar la identidad

$$
(\zeta-\tau)^{j-m} = [(\zeta-t)+(t-\tau)]^{j-m} = \sum_{i=0}^{j-m}\binom{j-m}{i}(\zeta-t)^{j-m-i}(t-\tau)^i,
$$

se obtiene

$$
\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1}\frac{(\zeta-\tau)^{j-m}}{(\zeta-t)^j}d\zeta &= \int_{\Gamma_1}\frac{\sum\limits_{i=0}^{j-m}\binom{j-m}{i}(\zeta-t)^{j-m-i}(t-\tau)^i}{(\zeta-t)^j}d\zeta\\
&= \sum_{i=0}^{j-m}(t-\tau)^i\int_{\Gamma_1}\frac{\binom{j-m}{i}(\zeta-t)^{j-m-i}}{(\zeta-t)^j}d\zeta\\
&= \sum_{i=0}^{j-m}(t-\tau)^i\int_{\Gamma_1}\frac{\binom{j-m}{i}d\zeta}{(\zeta-t)^{m+i}}.
\end{aligned}
$$

Como $m+i \leq m+(j-m)=j \leq k<N$, se infiere por hipótesis que

$$
\left|\int_{\Gamma_1}\frac{(\zeta-\tau)^{j-m}}{(\zeta-t)^j}d\zeta\right| \leq \sum_{i=0}^{j-m}c|t-\tau|^i\left|\int_{\Gamma_1}\frac{d\zeta}{(\zeta-t)^{m+i}}\right| \leq \frac{c}{|t-\tau|^{m-1}}.
$$

Luego,

$$\begin{aligned}|K(t,\tau)| &\leq \frac{1}{|t-\tau|^k}\Bigg\{\sum_{j=0}^{m}\Bigg|\int_{\Gamma_1}\frac{\binom{k}{j}(-1)^{k-j}d\zeta}{(\zeta-t)^j(\zeta-\tau)^{m-j}}\Bigg| \\ &\quad+\sum_{j=m+1}^{k}\Bigg|\int_{\Gamma_1}\frac{\binom{k}{j}(-1)^{k-j}(\zeta-\tau)^{j-m}}{(\zeta-t)^j}d\zeta\Bigg|\Bigg\} \\ &\leq \frac{1}{|t-\tau|^k}\Bigg\{\frac{c}{|t-\tau|^{m-1}}+c\Bigg|\int_{\Gamma_1}\frac{(\zeta-\tau)^{j-m}}{(\zeta-t)^j}d\zeta\Bigg|\Bigg\} \leq \frac{c}{|t-\tau|^{k+m-1}}\end{aligned}$$

En cualquier caso se verifica (2.15) y la prueba está completa. □

Es fácil ver que el Lema 2.1.3 sigue siendo válido si en vez de Γ_1 se considera Γ_2. Combinando esto con Lema 2.1.2-(b) se concluye que para todo $k, m \geq 1$

$$\Big|\int_{\Gamma_3}\frac{d\zeta}{(\zeta-t)^k(\zeta-\tau)^m}\Big| \leq \frac{c}{|t-\tau|^{k+m-1}}. \tag{2.16}$$

Lema 2.1.4. *Sean $f \in \mathcal{L}ip(k+\alpha,\Gamma)$, $r = \frac{|\tau-t|}{2}$ y Γ_1, Γ_2 y Γ_3 como antes. Entonces*

(a) $\left|\int_{\Gamma_1}\frac{R_j[f](t,\zeta)d\zeta}{(\zeta-\tau)^k(\zeta-t)}\right| \leq \frac{c}{|\tau-t|^{|j|-\alpha}}\ \forall\, 0 \leq |j| \leq k.$

(b) $\left|\int_{\Gamma_3}\frac{R_j[f](t,\zeta)d\zeta}{(\zeta-\tau)^k(\zeta-t)}\right| \leq \frac{c}{|\tau-t|^{|j|-\alpha}}\ \forall\, 1 \leq |j| \leq k.$

Demostración. Primero se demostrará (a). Para $0 \leq |j| \leq k-1$ se tiene

$$\left|\int_{\Gamma_1}\frac{R_j[f](t,\zeta)d\zeta}{(\zeta-\tau)^k(\zeta-t)}\right| \leq \frac{c|t-\tau|^{k+\alpha-|j|-1}}{|\tau-t|^k}\int_{\Gamma_1}|d\zeta| \leq \frac{c}{|\tau-t|^{|j|-\alpha}}.$$

Por otro lado, si $|j| = k$, se usa el Lema 2.1.1-(b) y así

$$\left|\int_{\Gamma_1}\frac{R_j[f](t,\zeta)d\zeta}{(\zeta-\tau)^k(\zeta-t)}\right| \leq \frac{c}{|\tau-t|^k}\int_{\Gamma_1}\frac{|d\zeta|}{|t-\zeta|^{1-\alpha}} \leq \frac{c}{|\tau-t|^{|j|-\alpha}}.$$

Es decir, para cada $0 \leq |j| \leq k$, se tiene la validez de (a). Resta demostrar (b).

Si $|\zeta-t| \leq |\zeta-\tau|$, entonces

$$\left|\frac{R_j[f](t,\zeta)}{(\zeta-\tau)^k(\zeta-t)}\right| \leq \frac{c|\zeta-t|^{k+\alpha-|j|-1}}{|\zeta-\tau|^k} \leq \frac{c}{|\zeta-t|^{|j|+1-\alpha}}. \tag{2.17}$$

Cuando $|\zeta - \tau| \leq |\zeta - t|$,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{R_j[f](t,\zeta)}{(\zeta-\tau)^k(\zeta-t)}\right| &= \left|\frac{R_j[f](t,\tau) + \sum\limits_{|l|\leq k-|j|} R_{j+l}(\tau,\zeta)(t-\tau)^{l_1}(\overline{t-\tau})^{l_2}}{l!(\zeta-\tau)^k(\zeta-t)}\right| \\
&\leq \frac{c|t-\tau|^{k+\alpha-|j|}}{|\zeta-\tau|^k|\zeta-t|} + \sum_{|l|\leq k-|j|} \frac{c|\tau-\zeta|^{k+\alpha-|j|-|l|}|t-\tau|^{|l|}}{|\zeta-\tau|^k|\zeta-t|} \\
&\leq \frac{c}{|\zeta-\tau|^{|j|+1-\alpha}}. \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

Combinando (2.17) con (2.18), se obtiene

$$\left|\frac{R_j[f](t,\zeta)}{(\zeta-\tau)^k(\zeta-t)}\right| \leq c\left(\frac{1}{|\zeta-t|^{|j|+1-\alpha}} + \frac{1}{|\zeta-\tau|^{|j|+1-\alpha}}\right).$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\Gamma_3} \frac{R_j[f](t,\zeta)d\zeta}{(\zeta-\tau)^k(\zeta-t)}\right| \leq c\int_{\Gamma_3} \frac{|d\zeta|}{|\zeta-t|^{|j|+1-\alpha}} + c\int_{\Gamma_3} \frac{|d\zeta|}{|\zeta-\tau|^{|j|+1-\alpha}} \\
\leq\ & \frac{c}{|t-\tau|^{|j|-1}} \int_{\Gamma_3} \frac{|d\zeta|}{|\zeta-t|^{2-\alpha}} + \frac{c}{|t-\tau|^{|j|-1}} \int_{\Gamma_3} \frac{|d\zeta|}{|\zeta-\tau|^{2-\alpha}} \\
\leq\ & \frac{c}{|t-\tau|^{|j|-1}} \int_{\Gamma\setminus\Gamma_1} \frac{|d\zeta|}{|\zeta-t|^{2-\alpha}} + \frac{c}{|t-\tau|^{|j|-1}} \int_{\Gamma\setminus\Gamma_2} \frac{|d\zeta|}{|\zeta-\tau|^{2-\alpha}} \\
\leq\ & \frac{c}{|t-\tau|^{|j|-\alpha}},
\end{aligned}$$

donde el Lema 2.1.1-(c) juega un rol básico. □

Lema 2.1.5. *Sea $f \in \mathcal{L}ip(k+\alpha,\Gamma)$. Entonces para cada $0 \leq |j| \leq k$, la función*

$$L(t,\tau) := \int_\Gamma \frac{R_j(\tau,\zeta)}{(\zeta-\tau)^{k+1-|j|}(\zeta-t)} d\zeta \ \textit{ satisface } \ |L(t,\tau)| \leq \frac{c}{|t-\tau|^{1-\alpha}}.$$

Demostración. Sea $r = \frac{|t-\tau|}{2}$ y Γ_1, Γ_2 y Γ_3 definidas como en el Lema 2.1.4. Si se denota

$$L_p(t,\tau) := \int_{\Gamma_p} \frac{R_j(\tau,\zeta)}{(\zeta-\tau)^{k+1-|j|}(\zeta-t)} d\zeta,\ p = \overline{1,3},$$

entonces será suficiente probar que $|L_p(t,\tau)| \leq \frac{c}{|t-\tau|^{1-\alpha}}$ para cada $p = \overline{1,3}$.

Obsérvese primeramente que la acotación de $L_3(t,\tau)$ se deduce de (2.5), ya que

$$|L_3(t,\tau)| = \left|\int_{\Gamma_3} \frac{R_j(\tau,\zeta)d\zeta}{(\zeta-\tau)^{k+1-|j|}(\zeta-t)}\right| \le c\int_{\Gamma_3} \frac{|d\zeta|}{|\zeta-\tau|^{1-\alpha}|\zeta-t|} \le \frac{c}{|\tau-t|^{1-\alpha}}.$$

Se continúa con $L_2(t,\tau)$. En virtud del Lema 2.1.1-(b)

$$|L_2(t,\tau)| = \left|\int_{\Gamma_2} \frac{R_j(\tau,\zeta)d\zeta}{(\zeta-\tau)^{k+1-|j|}(\zeta-t)}\right| \le \frac{c}{|\tau-t|}\int_{\Gamma_2} \frac{|d\zeta|}{|\zeta-\tau|^{1-\alpha}} \le \frac{c}{|\tau-t|^{1-\alpha}}.$$

Por último se analiza $L_1(t,\tau)$. De la identidad dada por (1.10) resulta

$$L_1(t,\tau) = \int_{\Gamma_1} \frac{R_j(\tau,t)d\zeta}{(\zeta-\tau)^{k+1-|j|}(\zeta-t)} + \sum_{|j+l|\le k}\int_{\Gamma_1} \frac{R_{j+l}(t,\zeta)d\zeta}{l!(\zeta-\tau)^{k+1-|j|}(\zeta-t)}(\tau-t)^{l_1}(\overline{\tau-t})^{l_2}. \tag{2.19}$$

Denótese por $L_1^1(t,\tau)$ y $L_1^2(t,\tau)$ el primer y segundo sumando de (2.19), respectivamente. Entonces, por el Lema 2.1.3

$$|L_1^1(t,\tau)| = |R_j(\tau,t)|\left|\int_{\Gamma_1} \frac{d\zeta}{(\zeta-\tau)^{k+1-|j|}(\zeta-t)}\right| \le \frac{c}{|\tau-t|^{1-\alpha}}.$$

Nótese ahora que para cada $|j+l| \le k$

$$\left|\int_{\Gamma_1} \frac{R_{j+l}(t,\zeta)d\zeta}{l!(\zeta-\tau)^{k+1-|j|}(\zeta-t)}\right| \le c\int_{\Gamma_1} \frac{|\zeta-t|^{k+\alpha-|j+l|-1}}{|\zeta-\tau|^{k+1-|j|}}|d\zeta| \le \frac{c}{|\tau-t|^{|l|+1-\alpha}},$$

por lo que

$$\begin{aligned} |L_1^2(t,\tau)| &= \left|\sum_{|j+l|\le k}\int_{\Gamma_1} \frac{R_{j+l}(t,\zeta)d\zeta}{l!(\zeta-\tau)^{k+1-|j|}(\zeta-t)}(\tau-t)^{l_1}(\overline{\tau-t})^{l_2}\right| \\ &\le \sum_{|j+l|\le k}\left|\int_{\Gamma_1} \frac{R_{j+l}(t,\zeta)d\zeta}{l!(\zeta-\tau)^{k+1-|j|}(\zeta-t)}\right||\tau-t|^{|l|} \le \frac{c}{|\tau-t|^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Es decir, se cumple que $|L_1(t,\tau)| \le |L_1^1(t,\tau)| + |L_1^2(t,\tau)| \le \dfrac{c}{|\tau-t|^{1-\alpha}}$. Nótese el uso reiterado del Lema 2.1.1-(a). En resumen, $|L(t,\tau)| \le \dfrac{c}{|\tau-t|^{1-\alpha}}$ y el lema queda probado. □

Proposición 2.1.1. *Sean dados $c_n(l_1)$ de forma recursiva por*

$$c_1(l_1) := \frac{1 + l_1(1 - j_1)}{(l_1 + 1)!}, \; c_n(l_1) := \frac{c_{n-1}(l_1 + 1)|_{l_1=0}}{l_1!} - c_{n-1}(l_1 + 1), n \geq 2.$$

Entonces se cumple que

$$\begin{aligned} c_n(l_1) &= \sum_{i=1}^{n-2} \Big\{ (-1)^{i+1} c_1(i) \frac{(l_1 + n - (i+2))(l_1 + n - (i+3)) \dots l_1}{(n - (i+1))!(l_1 + n - (i+1))!} \Big\} + \\ & +(-1)^n \frac{c_1(n-1)}{l_1!} + (-1)^{n+1} c_1(l_1 + n - 1), \quad n \geq 2. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Demostración. La prueba se realizará por inducción en n. Para $n = 2$, resulta de la definición

$$c_2(l_1) := \frac{c_1(1)}{l_1!} - c_1(l_1 + 1) = (-1)^n \frac{c_1(n-1)}{l_1!} + (-1)^{n+1} c_1(l_1 + n - 1),$$

por tanto se cumple (2.20). Suponga válido (2.20) hasta $n = k$. Sea $N = k + 1$, entonces

$$\begin{aligned} c_N(l_1) &:= \frac{c_k(1)}{l_1!} - c_k(l_1 + 1) \\ &= \frac{1}{l_1!} \Bigg\{ \frac{(1 + k - 3) \dots 1}{(k-2)!(1 + k - 2)!} c_1(1) - \frac{(1 + k - 4) \dots 1}{(k-3)!(1 + k - 3)!} c_1(2) + \dots \\ & \dots + (-1)^k c_1(k-1) + (-1)^{k+1} c_1(1 + k - 1) \Bigg\} - \\ & -\Bigg\{ \frac{(l_1 + 1 + k - 3) \dots (l_1 + 1)}{(k-2)!(l_1 + 1 + k - 2)!} c_1(1) - \frac{(l_1 + 1 + k - 4) \dots (l_1 + 1)}{(k-3)!(l_1 + 1 + k - 3)!} c_1(2) + \dots \\ & \dots + (-1)^k \frac{c_1(k-1)}{(l_1 + 1)!} + (-1)^{k+1} c_1(l_1 + 1 + k - 1) \Bigg\} \\ &= \Big\{ \frac{(k-2)(k-3) \dots 1}{l_1!(k-2)!(k-1)!} - \frac{(l_1 + k - 2)(l_1 + k - 3) \dots (l_1 + 1)}{(k-2)!(l_1 + k - 1)!} \Big\} c_1(1) \\ & -\Big\{ \frac{(k-3) \dots 1}{l_1!(k-3)!(k-2)!} - \frac{(l_1 + k - 3) \dots (l_1 + 1)}{(k-3)!(l_1 + k - 2)!} c_1(2) \Big\} c_1(2) + \dots \\ & \dots + (-1)^k \Big\{ \frac{1}{l_1!} - \frac{1}{(l_1 + 1)!} \Big\} c_1(k-1) + (-1)^{k+1} \frac{c_1(k)}{l_1!} + (-1)^{k+2} c_1(l_1 + k) \end{aligned}$$

Dado que los dos últimos sumandos son iguales respectivamente a

$$(-1)^N \frac{c_1(N-1)}{l_1!} \quad \text{y} \quad (-1)^{N+1} c_1(l_1+N-1)$$

será suficiente probar que la diferencia i-ésima que acompaña a $c_1(i), i=\overline{1,N-2}$, o sea

$$D_i = (-1)^{i+1}\left\{ \frac{(1+k-(i+2))\dots 1}{l_1!(k-(i+1))!(1+k-(i+1))!} - \right.$$
$$\left. \frac{(l_1+1+k-(i+2))\dots(l_1+1)}{(k-(i+1))!(l_1+1+k-(i+1))!} \right\},$$

es igual a

$$(-1)^{i+1}\left\{ \frac{(l_1+N-(i+2))\dots l_1}{(N-(i+1))!(l_1+N-(i+1))!} \right\}, \qquad i=\overline{1,N-2}.$$

Simplificando y posteriormente efectuando la diferencia en cuestión, se obtiene

$$\begin{aligned}
D_i &= (-1)^{i+1}\left\{ \frac{1}{l_1!(k-i)!} - \frac{(l_1+k-(i+1))\dots(l_1+1)}{(k-(i+1))!(l_1+k-i)!} \right\} \\
&= (-1)^{i+1}\left\{ \frac{(l_1+k-i)(l_1+k-(i+1))\dots(l_1+1)}{(k-i)!(l_1+k-i)!} \right\} - \\
&\quad -(-1)^{i+1}\left\{ \frac{(k-i)[(l_1+k-(i+1))\dots(l_1+1)]}{(k-i)!(l_1+k-i)!} \right\} \\
&= (-1)^{i+1}\left\{ \frac{(l_1+k-(i+1))\dots(l_1+1)[(l_1+k-i)-(k-i)]}{(k-i)!(l_1+k-i)!} \right\} \\
&= (-1)^{i+1}\left\{ \frac{(l_1+k-(i+1))\dots(l_1+1)l_1}{(k-i)!(l_1+k-i)!} \right\} \\
&= (-1)^{i+1}\left\{ \frac{(l_1+N-(i+2))\dots l_1}{(N-(i+1))!(l_1+N-(i+1))!} \right\}
\end{aligned}$$

con lo que queda demostrada la fórmula (2.20). $\square$

Corolario 2.1.1. *Sean $c_n(l_1)$ definidos como en la Proposición 2.1.1. Entonces se cumple:*

$$c_n(1) = \frac{n+1-j_1}{(n+1)!}, \quad n \geq 1. \tag{2.21}$$

Demostración. Para $n = 1$ es evidente. Para $n \geq 2$ se usa la fórmula (2.20) en el caso $l_1 = 1$.

$$\begin{aligned}
c_n(1) &= \sum_{i=1}^{n-2}\left[(-1)^{i+1}c_1(i)\frac{(n+1-(i+2))(n+1-(i+3))\dots 1}{(n-(i+1))!(n+1-(i+1))!}\right] + \\
&\quad +(-1)^n c_1(n-1) + (-1)^{n+1}c_1(n) \\
&= \sum_{i=1}^{n-2}\left[(-1)^{i+1}\frac{1+i(1-j_1)}{(i+1)!}\frac{1}{(n-i)!}\right] + (-1)^n\frac{n+(n-1)j_1}{n!} + \\
&\quad +(-1)^{n+1}\frac{1+n(1-j_1)}{(n+1)!} \\
&= \sum_{i=1}^{n-2}\left[(-1)^{i+1}\frac{(n+1)![1+i(1-j_1)]}{(n+1)!(i+1)!(n-i)!}\right] + (-1)^n\frac{n+(n-1)j_1}{n!} + \\
&\quad +(-1)^{n+1}\frac{1+n(1-j_1)}{(n+1)!} \\
&= \sum_{i=1}^{n-2}\left[(-1)^{i+1}\frac{1+i(1-j_1)}{(n+1)!}\binom{n+1}{i+1}\right] + (-1)^n\frac{n+(n-1)j_1}{n!} + \\
&\quad +(-1)^{n+1}\frac{1+n(1-j_1)}{(n+1)!} \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left\{\sum_{i=1}^{n-2}\left[(-1)^{i+1}[1+i(1-j_1)]\binom{n+1}{i+1}\right] + \right. \qquad (2.22) \\
&\quad \left. +(-1)^n(n+1)[n+(n-1)j_1] + (-1)^{n+1}[1+n(1-j_1)]\right\} \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left\{\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}[1+i(1-j_1)]\binom{n+1}{i+1}\right\} \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

Comparando (2.21) con (2.22) se observa que será suficiente verificar

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}[1+i(1-j_1)]\binom{n+1}{i+1} = n+1-j_1. \tag{2.24}$$

Para probar la igualdad dada en (2.24) se observa primeramente que

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0, \tag{2.25}$$

lo cual se obtiene de desarrollar $(a-b)^n$ por la fórmula de Newton y luego hacer $a=b=1$. De (2.25) se infiere que

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k}=(-1)^{n+1}. \tag{2.26}$$

La prueba de (2.24) se hará por inducción en n. Para $n=1$ es evidente. Supóngase cierta (2.24) hasta n. Para $n+1$ hay que probar que

$$s \;:=\; \sum_{i=1}^{n+1}\Big((-1)^{i+1}[1+i(1-j_1)]\Big)\binom{n+2}{i+1}=(n+1)+1-j_1.$$

Usando la propiedad

$$\binom{r+1}{p+1}=\binom{r}{p}+\binom{r}{p+1} \tag{2.27}$$

resulta

$$\begin{aligned} s=\sum_{i=1}^{n}\Big((-1)^{i+1}[1+i(1-j_1)]\Big)\binom{n+1}{i+1}+\\ +\sum_{i=1}^{n}\Big((-1)^{i+1}[1+i(1-j_1)]\Big)\binom{n+1}{i}+(-1)^{n+2}[1+(n+1)(1-j_1)]. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Denótese respectivamente por s_1 y s_2 los dos sumandos de (2.28). Entonces, por el paso de inducción, $s_1=n+1-j_1$. Por otro lado, si se hace el cambio de variable $i=k+1$, entonces

$$\begin{aligned} s_2=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+2}\Big(1+(k+1)(1-j_1)\Big)\binom{n+1}{k+1}\\ =-\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\Big(1+k(1-j_1)\Big)\binom{n+1}{k+1}-(1-j_1)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\binom{n+1}{k+1}. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Observando que la primera sumatoria de (2.29) se escribe como

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\Big(1+k(1-j_1)\Big)\binom{n+1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}[1+k(1-j_1)]\binom{n+1}{k+1} +$$
$$+\left[(-1)^{k+1}[1+k(1-j_1)]\binom{n+1}{k+1}\right]_{k=0} - \left[(-1)^{k+1}[1+k(1-j_1)]\binom{n+1}{k+1}\right]_{k=n},$$

se puede hacer uso nuevamente del paso de inducción en el primero de estos sumandos, obteniéndose

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}[1+k(1-j_1)]\binom{n+1}{k+1} &= [n+1-j_1]+[(-1)(n+1)]-\\ &\quad -(-1)^{n+1}(1+n(1-j_1))]\\ &= -j_1+(-1)^{n+2}(1+n(1-j_1)).\end{aligned}$$

Por su parte, con $M=k+1$, $N=n+1$ y (2.26), la segunda sumatoria de (2.29) se puede escribir como

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\binom{n+1}{k+1} &= \sum_{M=1}^{N-1}(-1)^{M}\binom{N}{M}\\ &= \sum_{M=0}^{N-1}(-1)^{M}\binom{N}{M} - \left[\sum_{M=1}^{N-1}(-1)^{M}\binom{N}{M}\right]_{M=0}\\ &= (-1)^{N+1}-1\\ &= (-1)^{n+2}-1.\end{aligned}$$

Retomando (2.28) se concluye

$$\begin{aligned} s &= [n+1-j_1]+\big[j_1-(-1)^{n+2}(1+n(1-j_1))\big]-\big[(1-j_1)((-1)^{n+2}-1)\big]+\\ &\quad +(-1)^{n+2}[1+(n+1)(1-j_1)]\\ &= n+2-j_1\end{aligned}$$

con lo que queda demostrada la afirmación inicial. $\square$

Lema 2.1.6. *Sean $f \in \mathcal{L}ip(k+\alpha,\Gamma)$, $i_1,\ldots,i_n \in \mathbb{N}$, entonces*

(a) $$\left|\int\limits_{\Gamma_3} \frac{R_0(\tau,\zeta) - \sum\limits_{|l|\le k-m} \frac{R_l(t,\zeta)}{l!}(\tau-t)^{l_1}(\overline{\tau-t})^{l_2} d\zeta}{(\zeta-t)^{m+1}}\right| \le c|\tau-t|^{k-m+\alpha},\ 0\le m\le k.$$

(b) $$\sum_{i_1=1}^{m+1}\sum_{i_2=1}^{m+2-i_1}\cdots\sum_{i_n=1}^{m+n-i_1-\ldots-i_{n-1}} 1 = \frac{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}{m!} = \binom{m+n}{n}.$$

(c) $$\left|\int\limits_{\Gamma_3} \frac{R_0(\tau,\zeta)}{(\zeta-\tau)^{k+1-m}(\zeta-t)^m} d\zeta - \int\limits_{\Gamma_3} \frac{R_0(t,\zeta)}{(\zeta-t)^{k+1}} d\zeta\right| \le c|\tau-t|^{\alpha},\ 0\le m\le k+1.$$

Demostración. Prueba de (a). Haciendo uso de (1.10) se escribe

$$\begin{aligned}
L(t,\tau) &:= \int\limits_{\Gamma_3} \frac{R_0(\tau,\zeta) - \sum\limits_{|l|\le k-m} \frac{R_l(t,\zeta)}{l!}(\tau-t)^{l_1}(\overline{\tau-t})^{l_2}}{(\zeta-t)^{m+1}} d\zeta \\
&= \int\limits_{\Gamma_3} \frac{R_0(\tau,t) + \sum\limits_{i=1}^{m}\Big\{\sum\limits_{|l|=k-(m-i)} \frac{R_l(t,\zeta)}{l!}(\tau-t)^{l_1}(\overline{\tau-t})^{l_2}\Big\}}{(\zeta-t)^{m+1}} d\zeta \\
&= \int\limits_{\Gamma_3} \frac{R_0(\tau,t)}{(\zeta-t)^{m+1}} d\zeta + \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\Gamma_3} \frac{\sum\limits_{|l|=k-(m-i)} \frac{R_l(t,\zeta)}{l!}(\tau-t)^{l_1}(\overline{\tau-t})^{l_2}}{(\zeta-t)^{m+1}} d\zeta
\end{aligned} \tag{2.30}$$

El primer sumando en la igualdad anterior se puede reescribir como

$$\int\limits_{\Gamma_3} \frac{R_0(\tau,t)}{(\zeta-t)^{m+1}} d\zeta = R_0(\tau,t)\left\{(t-\tau)\int\limits_{\Gamma_3} \frac{d\zeta}{(\zeta-t)^{m+1}(\zeta-\tau)} + \int\limits_{\Gamma_3} \frac{d\zeta}{(\zeta-t)^{m}(\zeta-\tau)}\right\}.$$

De esta forma se puede aplicar (2.16) a cada integral dentro de las llaves y obtener la acotación buscada. Para el segundo sumando de (2.30) se acota directamente, teniendo en cuenta que $|l| = k-(m-i)$ y que $1\le i\le m$,

$$\begin{aligned}
\left|\int\limits_{\Gamma_3} \frac{R_l(t,\zeta)}{(\zeta-t)^{m+1}}\right| &\le c\int\limits_{\Gamma_3} \frac{|d\zeta|}{|\zeta-t|^{1+i+\alpha}} = c\int\limits_{\Gamma_3} \frac{|d\zeta|}{|\zeta-t|^{i-1}|\zeta-t|^{2-\alpha}} \\
&\le \frac{c}{|\tau-t|^{i}}\left(|\tau-t|\int\limits_{\Gamma_3} \frac{|d\zeta|}{|\zeta-t|^{2-\alpha}}\right).
\end{aligned}$$

Usando ahora el Lemma 2.1.1-(c)

$$\left|\int_{\Gamma_3} \frac{R_l(t,\zeta)}{(\zeta-t)^{m+1}}\right||\tau-t|^{|l|} \leq \frac{c|\tau-t|^{|l|}}{|\tau-t|^{i-\alpha}} \leq c|\tau-t|^{k-m+\alpha},$$

con lo que queda probado (a). Para la prueba de (b) se usará inducción en n. Si $n = 1$, entonces $\sum\limits_{i_1=1}^{m+1} 1 = m+1 = \binom{m+1}{1}$, por lo que se cumple el paso inicial. Suponga que se cumple hasta n que:

$$\sum_{i_1=1}^{m+1} \cdots \sum_{i_n=1}^{m+n-i_1-\ldots-i_{n-1}} 1 = \binom{m+n}{n}.$$

Sea ahora $N = n+1$. Entonces, por hipótesis de inducción resulta que

$$\begin{aligned}
\sum_{i_1=1}^{m+1} \cdots \sum_{i_N=1}^{m+N-i_1-\ldots-i_{N-1}} 1 &= \sum_{i_1=1}^{m+1} \left\{ \sum_{i_2=1}^{m+2-i_1} \cdots \sum_{i_N=1}^{m+N-i_1-i_2-\ldots-i_{N-1}} 1 \right\} \\
&= \sum_{i_1=1}^{m+1} \left\{ \sum_{i_2=1}^{(m+1-i_1)+1} \cdots \sum_{i_N=1}^{(m+1-i_1)+(N-1)-i_2-\ldots-i_{N-1}} 1 \right\} \\
&= \sum_{i_1=1}^{m+1} \binom{(m+1-i_1)+(N-1)}{N-1} \\
&= \sum_{i_1=1}^{m+1} \binom{m+1-i_1+n}{n}.
\end{aligned}$$

Usando (2.27) recursivamente m veces con $p = n$ y $r = m+n, m+n-1, \ldots, m+n-(m-1)$ se obtiene en definitiva

$$\binom{m+n+1}{n+1} = \binom{m+n}{n} + \binom{m+n-1}{n} + \ldots + \binom{n}{n} = \sum_{i_1=1}^{m+1} \binom{m+1-i_1+n}{n},$$

lo que evidentemente prueba (b). Resta probar (c).

Aquí se usa nuevamente (1.10) en el primer sumando de (c)

$$\int\limits_{\Gamma_3} \frac{R_0(\tau,\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-\tau)^{k+1-m}(\zeta-t)^m} = \int\limits_{\Gamma_3} \frac{R_0(\tau,t)\,d\zeta}{(\zeta-\tau)^{k+1-m}(\zeta-t)^m} +$$
$$+\int\limits_{\Gamma_3} \frac{R_0(t,\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-\tau)^{k+1-m}(\zeta-t)^m} + \int\limits_{\Gamma_3} \frac{\sum\limits_{|l|\geq 1} \frac{R_l(t,\zeta)}{l!}(\tau-t)^{l_1}(\overline{\tau-t})^{l_2}\,d\zeta}{(\zeta-\tau)^{k+1-m}(\zeta-t)^m}. \tag{2.31}$$

Haciendo uso de (2.16) se deduce que el primer sumando de (2.31) está acotado modularmente por $c|\tau-t|^\alpha$. Para estimar el tercer sumando de (2.31) se acota directamente

$$\left| \frac{\sum\limits_{|l|\geq 1} \frac{R_l(t,\zeta)}{l!}(\tau-t)^{l_1}(\overline{\tau-t})^{l_2}}{(\zeta-\tau)^{k+1-m}(\zeta-t)^m} \right| \leq \sum_{|l|\geq 1} \frac{c|t-\zeta|^{k-|l|-m+\alpha}}{|\zeta-\tau|^{k+1-m}}|\tau-t|^{|l|}$$
$$= \sum_{|l|\geq 1} \frac{c|t-\zeta|^{k-|l|-m+\alpha}}{|\zeta-\tau|^{k+1-m}}|\tau-t|^{|l|}.$$

Teniendo en cuenta que por desigualdad triangular $|\zeta-t| \leq |\zeta-\tau| + |\tau-t|$ y que en Γ_3 es $|\zeta-\tau| \geq r := \frac{|\tau-t|}{2}$, se infiere que $|\zeta-t| \leq c|\zeta-\tau|$ en Γ_3, por tanto

$$\left| \int\limits_{\Gamma_3} \frac{\sum\limits_{|l|\geq 1} \frac{R_l(t,\zeta)}{l!}(\tau-t)^{l_1}(\overline{\tau-t})^{l_2}}{(\zeta-\tau)^{k+1-m}(\zeta-t)^m} d\zeta \right| \leq c|\tau-t|^{|l|} \sum_{|l|\geq 1} \int\limits_{\Gamma_3} \frac{|d\zeta|}{|\zeta-\tau|^{|l|+1-\alpha}}$$
$$\leq c|\tau-t| \sum_{|l|\geq 1} \int\limits_{\Gamma_3} \frac{|d\zeta|}{|\zeta-\tau|^{2-\alpha}}.$$

Usando una vez más el Lema 2.1.1-(c) se concluye que igualmente el tercer sumando de (2.31) está acotado por $c|\tau-t|^\alpha$. Por consiguiente, será suficiente verificar esta cota para la diferencia

$$L'(t,\tau) := \int\limits_{\Gamma_3} \frac{R_0(t,\zeta)}{(\zeta-\tau)^{k+1-m}(\zeta-t)^m} d\zeta - \int\limits_{\Gamma_3} \frac{R_0(t,\zeta)}{(\zeta-\tau)^{k+1}} d\zeta.$$

Como

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(\zeta-\tau)^{k+1-m}(\zeta-t)^m}-\frac{1}{(\zeta-t)^{k+1}} &= \frac{1}{(\zeta-t)^m}\left\{\frac{1}{(\zeta-\tau)^{k+1-m}}-\frac{1}{(\zeta-t)^{k+1-m}}\right\}\\
&= \frac{1}{(\zeta-t)^m}\left\{\frac{(\zeta-t)^{k+1-m}-(\zeta-\tau)^{k+1-m}}{(\zeta-\tau)^{k+1-m}(\zeta-t)^{k+1-m}}\right\}\\
&= \frac{1}{(\zeta-t)^m}\left\{\frac{(\tau-t)\sum\limits_{p=0}^{k-m}(\zeta-t)^{k-m-p}(\zeta-\tau)^p}{(\zeta-\tau)^{k+1-m}(\zeta-t)^{k+1-m}}\right\},
\end{aligned}$$

resulta que

$$\begin{aligned}
|L'(t,\tau)| &\leq \int\limits_{\Gamma_3}\frac{|R_0(t,\zeta)|}{|\zeta-t|^m}\left\{|\tau-t|\frac{\sum\limits_{p=0}^{k-m}|\zeta-t|^{k-m-p}|\zeta-\tau|^p}{|\zeta-\tau|^{k+1-m}|\zeta-t|^{k+1-m}}\right\}|d\zeta|\\
&\leq c|\tau-t|\sum_{p=0}^{k-m}\int\limits_{\Gamma_3}\frac{|\zeta-t|^{k-m-p-1+\alpha}}{|\zeta-\tau|^{k+1--p}}|d\zeta|.
\end{aligned}$$

Usando otra vez el hecho de que en Γ_3 es $|\zeta-t|\leq c|\zeta-\tau|$ queda finalmente que

$$|L'(t,\tau)| \leq c|\tau-t|\int\limits_{\Gamma_3}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-\tau|^{2-\alpha}},$$

lo cual satisface la estimación deseada en virtud del Lema 2.1.1-(c) y con esto termina la demostración. □

Lema 2.1.7. *Sea* $f\in\mathcal{L}ip(k+\alpha,\Gamma)$ *y* $G_i^{(l)}[f](t)$ *definidos por*

$$G_i^{(l)}(t) := \sum_{p=0}^{l_1}\frac{-(m+p-i)!}{\pi\mathbf{i}}\binom{m-1}{i}\binom{l_1}{p}\int\limits_{\Gamma}\frac{R_{(i+l_1-p,l_2)}(t,\zeta)}{(\zeta-t)^{m+1+p-i}}d\zeta. \tag{2.32}$$

Entonces

$$G_m[f](\tau,t) := \sum_{i=0}^{m-1}\left\{G_i^{(0)}(\tau)-\sum_{|l|\leq k-m}\frac{G_i^{(l)}(t)}{l!}(\tau-t)^{l_1}(\overline{\tau-t})^{l_2}\right\}$$

satisface $|G_m(\tau,t)|\leq c|\tau-t|^{k-m+\alpha}$ *para todo* $i=\overline{0,m-1}$.

Demostración. Será suficiente probar este lema para $i = 0$. Sea $m = k - n$ para n arbitrario. Entonces

$$
\begin{aligned}
I(t,\tau) := G^{(0)}(\tau) - G^{(0)}(t) - \sum_{0<|l|\leq k-m} \frac{G_0^{(l)}(t)}{l!}(\tau - t)^{l_1}(\overline{\tau - t})^{l_2} \\
= -\frac{m!}{\pi \mathbf{i}}\Bigg\{ \int\limits_\Gamma \frac{R_0(\tau,\zeta)d\zeta}{(\zeta-\tau)^{m+1}} - \int\limits_\Gamma \frac{R_0(t,\zeta)d\zeta}{(\zeta - t)^{m+1}} - \\
- \sum_{0<|l|\leq k-m}\left(\sum_{p=0}^{l_1}(m+p)\dots(m+1)\binom{l_1}{p}\int\limits_\Gamma \frac{R_{(l_1-p,l_2)}(t,\zeta)}{(\zeta-t)^{m+1+p}}d\zeta\right)\frac{(\tau-t)^{l_1}(\overline{\tau-t})^{l_2}}{l!}\Bigg\}. \quad (2.33)
\end{aligned}
$$

El análisis de (2.33) se dividirá en cada tramo de curva Γ_1, Γ_2 y Γ_3. El análisis en Γ_3 se pospondrá para el final. Comenzando con el primer sumando en el tramo Γ_1, se usa (1.10)

$$
\begin{aligned}
\left|\int\limits_{\Gamma_1}\frac{R_0(\tau,\zeta)d\zeta}{(\zeta-\tau)^{m+1}}\right| &= \left|\int\limits_{\Gamma_1}\frac{R_0(\tau,t) + \sum\limits_{|l|\leq k-m} R_l(t,\zeta)/l!(\tau-t)^{l_1}(\overline{\tau-t})^{l_2}}{(\zeta-\tau)^{m+1}}\right| \\
&\leq |R_0(\tau,t)|\left|\int\limits_{\Gamma_1}\frac{d\zeta}{(\zeta-\tau)^{m+1}}\right| + c\sum_{|l|\leq k-m}\left|\int\limits_{\Gamma_1}\frac{R_l(t,\zeta)d\zeta}{(\zeta-\tau)^{m+1}}\right||\tau-t|^{|l|}.
\end{aligned}
$$

En Γ_1 se cumple $|\zeta - \tau| \geq \frac{|\tau - t|}{2}$ y $|\zeta-\tau| \geq |\zeta - t|$, lo que unido al Lema 2.1.1-(b) implica

$$
\begin{aligned}
\left|\int\limits_{\Gamma_1}\frac{R_0(\tau,\zeta)d\zeta}{(\zeta-\tau)^{m+1}}\right| &\leq |\tau-t|^{k+\alpha}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-\tau|^{m+1}} + c\sum_{|l|\leq k-m}\left(\int\limits_{\Gamma_1}\frac{|\zeta-t|^{k-|l|+\alpha}|d\zeta|}{|\zeta-\tau|^{m+1}}\right)|\tau-t|^{|l|} \\
&\leq c|\tau-t|^{k-m+\alpha} + c\sum_{|l|\leq k-m}|\tau-t|^{k-|l|-m}\left(\int\limits_{\Gamma_1}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-t|^{1-\alpha}}\right)|\tau-t|^{|l|} \leq c|\tau-t|^{k-m+\alpha}.
\end{aligned}
$$

Analizando este mismo sumando en Γ_2 se obtiene

$$
\left|\int\limits_{\Gamma_2}\frac{R_0(\tau,\zeta)d\zeta}{(\zeta-\tau)^{m+1}}\right| \leq |\tau-t|^{k-m}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-\tau|^{1-\alpha}} \leq c|\tau-t|^{k-m+\alpha}.
$$

Dada la simetría de los dos primeros sumandos de (2.33), bastará acotar el tercer y último sumando en los tramos indicados. Observe que ello se reduce a probar que

$$\left|\int\limits_{\Gamma_i} \frac{R_{(l_1-p,l_2)}(t,\zeta)}{(\zeta-t)^{m+1+p}}d\zeta\right| \leq c|\tau-t|^{k-|l|-m+\alpha},\ i=1,2.$$

Primeramente, en Γ_1

$$\left|\int\limits_{\Gamma_1} \frac{R_{(l_1-p,l_2)}(t,\zeta)}{(\zeta-t)^{m+1+p}}d\zeta\right| \leq c|\tau-t|^{k-|l|-m}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-t|^{1-\alpha}} \leq c|\tau-t|^{k-|l|-m+\alpha}.$$

Seguidamente, en Γ_2 se usa (1.10) para obtener que

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{\Gamma_2} \frac{R_{(l_1-p,l_2)}(t,\zeta)}{(\zeta-t)^{m+1+p}}d\zeta\right| &\leq \left|\int\limits_{\Gamma_2} \frac{R_{(l_1-p,l_2)}(t,\tau)}{(\zeta-t)^{m+1+p}}d\zeta\right| + \\ &+\left|\int\limits_{\Gamma_2} \frac{\sum\limits_{|s|\leq k+p-|l|}\frac{R_{(l_1-p+s_1,l_2+s_2)}(\tau,\zeta)}{s!}(t-\tau)^{s_1}(\overline{t-\tau})^{s_2}}{(\zeta-t)^{m+1+p}}d\zeta\right|.\end{aligned}$$

Luego, del Lema 2.1.3 se infiere que el primer sumando está acotado por $c|t-\tau|^{k-|l|-m+\alpha}$. Por otro lado, como en Γ_2 es $|\zeta-t|\geq r$ y $|\zeta-\tau|\leq r$ resulta

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{\Gamma_2} \frac{R_{(l_1-p+s_1,l_2+s_2)}(\tau,\zeta)}{(\zeta-t)^{m+1+p}}d\zeta\right| &\leq c\int\limits_{\Gamma_2}\frac{|\tau-\zeta|^{k+p-|l|-|s|+\alpha}}{|\zeta-t|^{m+1+p}}d\zeta \\ &\leq c\frac{|t-\tau|^{k+p-|l|-|s|+\alpha}}{|t-\tau|^{m+1+p}}\int\limits_{\Gamma_2}|d\zeta| \leq c|t-\tau|^{k-m-|l|-|s|+\alpha},\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad se ha usado el Lema 2.1.1-(a). De aquí que

$$\left|\int\limits_{\Gamma_2} \frac{\sum\limits_{|s|\leq k+p-|l|}\frac{R_{(l_1-p+s_1,l_2+s_2)}(\tau,\zeta)}{s!}(t-\tau)^{s_1}(\overline{t-\tau})^{s_2}}{(\zeta-t)^{m+1+p}}d\zeta\right| \leq c|t-\tau|^{k-m-|l|+\alpha}.$$

Por consiguiente, tanto en Γ_1 como en Γ_2 se tiene la estimación buscada. Por último se examinará (2.33) en Γ_3. Observe a continuación que se escribe $A(t,\tau)\sim B(t,\tau)$

para indicar que $|A(t,\tau)| \leq c|B(t,\tau)|$.

$$\begin{aligned}
I(t,\tau) \sim \int\limits_{\Gamma_3} \frac{R_0(\tau,\zeta)d\zeta}{(\zeta-\tau)^{m+1}} - \int\limits_{\Gamma_3} \frac{R_0(t,\zeta)d\zeta}{(\zeta-t)^{m+1}} - \\
- \sum_{0<|l|\leq k-m} \left(\int\limits_{\Gamma_3} \frac{R_{(l_1,l_2)}(t,\zeta)}{(\zeta-t)^{m+1}} d\zeta \right) \frac{(\tau-t)^{l_1}(\overline{\tau-t})^{l_2}}{l!} - \\
- \sum_{0<|l|\leq k-m} \left(\sum_{p=1}^{l_1} (m+p)\dots(m+1) \binom{l_1}{p} \int\limits_{\Gamma_3} \frac{R_{(l_1-p,l_2)}(t,\zeta)}{(\zeta-t)^{m+1+p}} d\zeta \right) \frac{(\tau-t)^{l_1}(\overline{\tau-t})^{l_2}}{l!}.
\end{aligned}$$

Usando la identidad

$$\frac{1}{(\zeta-\tau)^{m+1}} = \sum_{p=1}^{m+1} \frac{\tau-t}{(\zeta-\tau)^{m+2-p}(\zeta-t)^p} + \frac{1}{(\zeta-t)^{m+1}}$$

en el primer sumando resulta

$$\begin{aligned}
I(t,\tau) \sim (\tau-t) \sum_{i_1=1}^{m+1} \int\limits_{\Gamma_3} \frac{R_0(\tau,\zeta)}{(\zeta-\tau)^{m+2-i_1}(\zeta-t)^{i_1}} d\zeta + \\
+ \int\limits_{\Gamma_3} \frac{R_0(\tau,\zeta) - R_0(t,\zeta) - \sum\limits_{0<|l|\leq k-m} \dfrac{R_l(t,\zeta)}{l!}(\tau-t)^{l_1}(\overline{\tau-t})^{l_2}}{(\zeta-t)^{m+1}} d\zeta - \\
- \sum_{0<|l|\leq k-m} \left(\sum_{p=1}^{l_1} (m+p)\dots(m+1) \binom{l_1}{p} \int\limits_{\Gamma_3} \frac{R_{(l_1-p,l_2)}(t,\zeta)}{(\zeta-t)^{m+1+p}} d\zeta \right) \frac{(\tau-t)^{l_1}(\overline{\tau-t})^{l_2}}{l!}. \quad (2.34)
\end{aligned}$$

Aplicando ahora el Lema 2.1.6-(a) al segundo sumando de (2.34) resulta que el mismo es modularmente menor o igual que $c|t-\tau|^{k+\alpha-m}$, por lo que bastará continuar el análisis con el primer y tercer términos restantes. Abusando de la notación, se hace el cambio de variable $l_1 = l_1 + 1$ en el tercero (observe que esto es posible pues $|l| > 0$). Entonces,

$$\begin{aligned}
I(t,\tau) \sim (\tau-t) \sum_{i_1=1}^{m+1} \int\limits_{\Gamma_3} \frac{R_0(\tau,\zeta)}{(\zeta-\tau)^{m+2-i_1}(\zeta-t)^{i_1}} d\zeta - \\
- \sum_{|l|\leq k-(m+1)} \left(\sum_{p=1}^{l_1+1} (m+p)\dots(m+1) \binom{l_1+1}{p} \int\limits_{\Gamma_3} \frac{R_{(l_1+1-p,l_2)}(t,\zeta)}{(\zeta-t)^{m+1+p}} d\zeta \right) \frac{(\tau-t)^{l_1+1}(\overline{\tau-t})^{l_2}}{(l_1+1)!\, l_2!}.
\end{aligned}$$

Separando la suma que corre en p en otras dos, una para $p = 1$ y otra que corre a partir de $p = 2$ resulta

$$I(t,\tau) \sim (\tau - t)\sum_{i_1=1}^{m+1}\int_{\Gamma_3}\frac{R_0(\tau,\zeta)}{(\zeta-\tau)^{m+2-i_1}(\zeta-t)^{i_1}}d\zeta -$$

$$-(\tau-t)\sum_{|l|\leq k-(m+1)}(m+1)\binom{l_1+1}{1}\left(\int_{\Gamma_3}\frac{R_{(l_1,l_2)}(t,\zeta)}{(\zeta-t)^{m+2}}d\zeta\right)\frac{(\tau-t)^{l_1}(\overline{\tau-t})^{l_2}}{(l_1+1)!\,l_2!} -$$

$$-\sum_{\substack{|l|\leq k-(m+1)\\ l_1\geq 1}}\left(\sum_{p=2}^{l_1+1}(m+p)\dots(m+1)\binom{l_1+1}{p}\int_{\Gamma_3}\frac{R_{(l_1+1-p,l_2)}(t,\zeta)}{(\zeta-t)^{m+1+p}}d\zeta\right)\frac{(\tau-t)^{l_1+1}(\overline{\tau-t})^{l_2}}{(l_1+1)!\,l_2!}.$$

Usando la identidad

$$\frac{1}{(\zeta-\tau)^{m-n}(\zeta-t)^n} = \sum_{r=1}^{m-n}\frac{\tau-t}{(\zeta-\tau)^{m-n+1-r}(\zeta-t)^{n+r}} + \frac{1}{(\zeta-t)^m}$$

en el primer sumando anterior y el Lema 2.1.6-(b) en el segundo, se puede agrupar todo como sigue

$$I(t,\tau) \sim (\tau-t)^2\sum_{i_1=1}^{m+1}\sum_{i_2=1}^{m+2-i_1}\int_{\Gamma_3}\frac{R_0(\tau,\zeta)}{(\zeta-\tau)^{m+3-i_1-i_2}(\zeta-t)^{i_1+i_2}}d\zeta +$$

$$+(\tau-t)\sum_{i_1=1}^{m+1}\int_{\Gamma_3}\frac{R_0(\tau,\zeta) - \sum\limits_{|l|\leq k-(m+1)}\dfrac{R_l(t,\zeta)}{l!}(\tau-t)^{l_1}(\overline{\tau-t})^{l_2}}{(\zeta-t)^{m+2}}d\zeta -$$

$$-\sum_{\substack{|l|\leq k-(m+1)\\ l_1\geq 1}}\left(\sum_{p=2}^{l_1+1}(m+p)\dots(m+1)\binom{l_1+1}{p}\int_{\Gamma_3}\frac{R_{(l_1+1-p,l_2)}(t,\zeta)}{(\zeta-t)^{m+1+p}}d\zeta\right)\frac{(\tau-t)^{l_1+1}(\overline{\tau-t})^{l_2}}{(l_1+1)!\,l_2!}.$$

En esta expresión resultante se aplica otra vez el Lema 2.1.6-(a) al segundo sumando, quedando que el mismo es modularmente menor o igual que $c|t-\tau|^{k+\alpha-m}$, por lo que bastará continuar el análisis con el primer y tercer términos restantes. Realizando de nuevo el cambio de variable $l_1 = l_1 + 1$ en el tercer término y repitiendo el proceso mostrado anteriormente hasta la iteración $n-$ésima, se obtiene finalmente que

$$I(t,\tau) \sim (\tau - t)^n \sum_{i_1=1}^{m+1} \cdots \sum_{i_n=1}^{m+n-i_1-\ldots-i_{n-1}} \int_{\Gamma_3} \frac{R_0(\tau,\zeta)}{(\zeta-\tau)^{m+n+1-i_1-\ldots-i_n}(\zeta-t)^{i_1+\ldots+i_n}} d\zeta -$$
$$- \sum_{|l|\leq k-(m+n)} \left(\sum_{p=n}^{l_1+n} \frac{(m+p)\ldots(m+1)}{p!} \int_{\Gamma_3} \frac{R_{(l_1+n-p,l_2)}(t,\zeta)}{(\zeta-t)^{m+1+p}} d\zeta \right) \frac{(\tau-t)^{l_1+n}(\overline{\tau-t})^{l_2}}{l!},$$

o más simplificado,

$$I(t,\tau) \sim (\tau - t)^n \sum_{i_1=1}^{m+1} \cdots \sum_{i_n=1}^{m+n-i_1-\ldots-i_{n-1}} \int_{\Gamma_3} \frac{R_0(\tau,\zeta)}{(\zeta-\tau)^{m+n+1-i_1-\ldots-i_n}(\zeta-t)^{i_1+\ldots+i_n}} d\zeta -$$
$$-(\tau-t)^n \left(\frac{(m+n)\ldots(m+1)}{n!} \int_{\Gamma_3} \frac{R_{(0,l_2)}(t,\zeta)}{(\zeta-t)^{k+1}} d\zeta \right).$$

Al aplicar el Lema 2.1.6-(b) en el segundo sumando y agrupar con el primero se obtiene

$$I(t,\tau) \sim (\tau - t)^n \sum_{i_1=1}^{m+1} \cdots \sum_{i_n=1}^{m+n-i_1-\ldots-i_{n-1}} \left\{ \int_{\Gamma_3} \frac{R_0(\tau,\zeta)}{(\zeta-\tau)^{m+n+1-i_1-\ldots-i_n}(\zeta-t)^{i_1+\ldots+i_n}} d\zeta \right.$$
$$\left. - \int_{\Gamma_3} \frac{R_{(0,l_2)}(t,\zeta)}{(\zeta-t)^{k+1}} d\zeta \right\}.$$

Esto indica, en virtud del Lema 2.1.6-(c), que $|I(t,\tau)| \leq c|\tau - t|^{k-m+\alpha}$. □

Teorema 2.1.2 (**Teorema de Plemelj-Privalov para la clase de Lipschitz de exponente arbitrario**). *Sea $f \in Lip(k+\alpha,\Gamma)$ y $\mathcal{S}_k$ el operador singular generalizado definido anteriormente. Entonces se cumple que $\mathcal{S}_k f \in Lip(k+\alpha,\Gamma)$. Es decir, el operador integral singular generalizado conserva invariante la clase de Lipschitz de orden superior.*

Demostración. Denótese por $\widehat{f}$ la función dada por $\mathcal{S}_k f$ y defínanse

$$\widehat{f}^{(j)}(t) := \frac{j!}{\pi \mathbf{i}} \int_\Gamma \frac{\sum_{p=j_2}^{k} \binom{p}{j_2} (\overline{t-\zeta})^{p-j_2} \frac{f^{(0,p)}(\zeta)}{p!}}{(\zeta-t)^{j_1+1}} d\zeta, \tag{2.35}$$

$$R_j[\widehat{f}](t,\tau) := \widehat{f}^{(j)}(t) - \sum_{|l|\leq k-|j|} \frac{\widehat{f}^{(j+l)}(\tau)}{l!} (t-\tau)^{l_1} (\overline{t-\tau})^{l_2}, |j| \leq k. \tag{2.36}$$

La acotación de las funciones $\widehat{f}^{(j)}$ se realizará en la sección siguiente, por lo que la demostración se limitará a verificar que los restos en (2.36) satisfacen la acotación correspondiente. Se probará, por inducción en k, que

$$|R_j[\widehat{f}](t,\tau)| \leq M|t-\tau|^{k+\alpha-|j|}, \ \forall\, |j| \leq k. \tag{2.37}$$

Para $k = 1$ y $f \in Lip(1+\alpha,\Gamma)$ esto se cumple en virtud del Teorema 2.1.1 (paso inicial). Suponga que se cumple hasta $\gamma = k-1+\alpha$ que si $f \in Lip(\gamma,\Gamma)$, entonces los R_j definidos por (2.36) cumplen (2.37). Sea ahora $f \in Lip(\gamma,\Gamma)$, con $\gamma = k+\alpha$. Para organizar la demostración, se seguirán los siguientes pasos:

(A) Probar que $|R_j[\widehat{f}](t,\tau)| \leq c|t-\tau|^{\gamma}, \ |j| = 0.$

(B) Probar que $|R_{(j_1,0)}[\widehat{f}](t,\tau)| \leq c|t-\tau|^{\gamma-j_1}, \ j_1 \geq 1.$

Note que si se cumplen (A) y (B), se podrá fácilmente estimar $|R_j[\widehat{f}](t,\tau)|$ para un j arbitrario, $0 \leq |j| \leq k$ con $j_2 \geq 1$. En efecto, una mirada más cercana de (2.35) y (2.36) revela que $\widehat{f}^{(0,j_2)} = \widehat{f^{(0,j_2)}}$ así como $R_{(j_1,j_2)}[\widehat{f}](t,\tau) = R_{(j_1,0)}[\widehat{f}^{(0,j_2)}](t,\tau)$, que combinadas conducen a la relación $R_{(j_1,j_2)}[\widehat{f}](t,\tau) = R_{(j_1,0)}[\widehat{f^{(0,j_2)}}](t,\tau)$. Luego, como $f^{(0,j_2)} \in \mathcal{L}ip(k-j_2+\alpha,\Gamma)$ con $j_2 \geq 1$, la hipótesis de la inducción conduce a la estimación deseada. Esto es

$$|R_{(j_1,j_2)}[\widehat{f}](t,\tau)| = |R_{(j_1,0)}[\widehat{f^{(0,j_2)}}](t,\tau)| \leq c|t-\tau|^{k-|j|+\alpha}.$$

Prueba de (A). Observando que $(\overline{t-\tau}+\overline{\tau-\zeta})^p = \sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}(\overline{t-\tau})^j(\overline{\tau-\zeta})^{p-j}$, se podrá rescribir $\widehat{f}(t)$ como

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{\pi\mathbf{i}}\int_\Gamma \frac{\sum_{p=0}^{k}\binom{p}{0}(\overline{\tau-\zeta})^p\dfrac{f^{(0,p)}(\zeta)}{p!}d\zeta}{\zeta-t} + \frac{\overline{t-\tau}}{\pi\mathbf{i}}\int_\Gamma \frac{\sum_{p=1}^{k}\binom{p}{1}(\overline{\tau-\zeta})^{p-1}\dfrac{f^{(0,p)}(\zeta)}{p!}d\zeta}{\zeta-t}$$
$$+\frac{(\overline{t-\tau})^2}{\pi\mathbf{i}}\int_\Gamma \frac{\sum_{p=2}^{k}\binom{p}{2}(\overline{\tau-\zeta})^{p-2}\dfrac{f^{(0,p)}(\zeta)}{p!}d\zeta}{\zeta-t} + \ldots + \frac{(\overline{t-\tau})^k}{\pi\mathbf{i}}\int_\Gamma \frac{\dfrac{f^{(0,k)}(\zeta)}{k!}}{\zeta-t}d\zeta.$$

O bien, $\widehat{f}(t) = \widehat{J}_0(t,\tau) + \widehat{J}_1(t,\tau) + \ldots + \widehat{J}_k(t,\tau)$, donde

$$\widehat{J}_n(t,\tau) = \frac{(\overline{t-\tau})^n}{\pi\mathbf{i}} \int_\Gamma \frac{\sum_{p=n}^{k} \binom{p}{n} (\overline{\tau-\zeta})^{p-n} \dfrac{f^{(0,p)}(\zeta)}{p!} d\zeta}{\zeta - t}, n = \overline{0,k}.$$

Teniendo en mente además que

$$R_0[\widehat{f}](t,\tau) \quad = \quad \widehat{f}(t) - \widehat{f}(\tau) - \widehat{f}^{(1,0)}(\tau)(t-\tau) - \ldots - \frac{\widehat{f}^{(0,k)}}{k!}(\overline{t-\tau})^k \tag{2.38}$$

se irá agrupando a continuación convenientemente.

Primero se halla

$$\begin{aligned}
\widehat{J}_0(t,\tau) - \widehat{f}(\tau) &= \frac{1}{\pi\mathbf{i}} \int_\Gamma \left(\frac{1}{\zeta - t} - \frac{1}{\zeta - \tau} \right) \left(\sum_{p=0}^{k} \binom{p}{0} (\overline{\tau-\zeta})^p \frac{f^{(0,p)}(\zeta)}{p!} \right) d\zeta \\
&= \frac{t-\tau}{\pi\mathbf{i}} \int_\Gamma \frac{\sum_{p=0}^{k} \binom{p}{0} (\overline{\tau-\zeta})^p \dfrac{f^{(0,p)}(\zeta)}{p!}}{(\zeta-t)(\zeta-\tau)} d\zeta := \widehat{J}_0^1(t,\tau).
\end{aligned}$$

Seguidamente se define $\widehat{J}_0^2(t,\tau) := \widehat{J}_0^1(t,\tau) - \widehat{f}^{(1,0)}(\tau)(t-\tau)$.

Así

$$\begin{aligned}
\widehat{J}_0^2(t,\tau) &= \frac{t-\tau}{\pi\mathbf{i}} \int_\Gamma \left(\frac{1}{(\zeta-t)(\zeta-\tau)} - \frac{1}{(\zeta-\tau)^2} \right) \left(\sum_{p=0}^{k} \binom{p}{0} (\overline{\tau-\zeta})^p \frac{f^{(0,p)}(\zeta)}{p!} \right) d\zeta \\
&= \frac{(t-\tau)^2}{\pi\mathbf{i}} \int_\Gamma \frac{\sum_{p=0}^{k} \binom{p}{0} (\overline{\tau-\zeta})^p \dfrac{f^{(0,p)}(\zeta)}{p!}}{(\zeta-t)(\zeta-\tau)^2} d\zeta.
\end{aligned}$$

Así sucesivamente, si $\widehat{J}_0^{k+1}(t,\tau) = \widehat{J}_0^k(t,\tau) - \dfrac{1}{k!}\widehat{f}^{(k,0)}(\tau)(t-\tau)^k$, se tiene

$$\widehat{J}_0^{k+1}(t,\tau) = \frac{(t-\tau)^{k+1}}{\pi\mathbf{i}} \int_\Gamma \frac{\sum_{p=0}^{k} \binom{p}{0} (\overline{\tau-\zeta})^p \dfrac{f^{(0,p)}(\zeta)}{p!}}{(\zeta-t)(\zeta-\tau)^{k+1}} d\zeta. \tag{2.39}$$

En segundo lugar se halla $\widehat{J}_1^1(t,\tau) := \widehat{J}_1(t,\tau) - \widehat{f}^{(0,1)}(\tau)(\overline{t-\tau})$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\overline{t-\tau}}{\pi\mathbf{i}} \int_\Gamma \left(\frac{1}{\zeta - t} - \frac{1}{\zeta-\tau}\right)\left(\sum_{p=1}^{k} \binom{p}{1} (\overline{\tau-\zeta})^{p-1} \frac{f^{(0,p)}(\zeta)}{p!}\right) d\zeta \\
&= \frac{(t-\tau)(\overline{t-\tau})}{\pi\mathbf{i}} \int_\Gamma \frac{\sum_{p=1}^{k} \binom{p}{1} (\overline{\tau-\zeta})^{p-1} \frac{f^{(0,p)}(\zeta)}{p!}}{(\zeta-t)(\zeta-\tau)} d\zeta.
\end{aligned}
$$

Luego, se define $\widehat{J}_1^2(t,\tau) := \widehat{J}_1^1(t,\tau) - \widehat{f}^{(1,1)}(\tau)(t-\tau)(\overline{t-\tau})$ y resulta

$$
\widehat{J}_1^2(t,\tau) = \frac{(t-\tau)^2(\overline{t-\tau})}{\pi\mathbf{i}} \int_\Gamma \frac{\sum_{p=1}^{k} \binom{p}{1} (\overline{\tau-\zeta})^{p-1} \frac{f^{(0,p)}(\zeta)}{p!}}{(\zeta-t)(\zeta-\tau)^2} d\zeta.
$$

Así sucesivamente, si $\widehat{J}_1^k(t,\tau) := \widehat{J}_1^k(t,\tau) - \dfrac{1}{k!}\widehat{f}^{(k,1)}(\tau)(t-\tau)^k(\overline{t-\tau})$, quedará

$$
\widehat{J}_1^k(t,\tau) = \frac{(t-\tau)^k(\overline{t-\tau})}{\pi\mathbf{i}} \int_\Gamma \frac{\sum_{p=1}^{k} \binom{p}{1} (\overline{\tau-\zeta})^{p-1} \frac{f^{(0,p)}(\zeta)}{p!}}{(\zeta-t)(\zeta-\tau)^k} d\zeta. \tag{2.40}
$$

Continuando este proceso hasta $\widehat{J}_k^1(t,\tau) := \widehat{J}_k(t,\tau) - \dfrac{1}{k!}\widehat{f}^{(0,k)}(\tau)(\overline{t-\tau})^k$, se obtiene

$$
\begin{aligned}
\widehat{J}_k^1(t,\tau) &= (\overline{t-\tau})^k \left(\frac{1}{\pi\mathbf{i}} \int_\Gamma \frac{f^{(0,k)}(\zeta)/k!}{\zeta-t} d\zeta - \frac{1}{\pi\mathbf{i}} \int_\Gamma \frac{f^{(0,k)}(\zeta)/k!}{\zeta-\tau} d\zeta\right) \\
&= \frac{(t-\tau)(\overline{t-\tau})^k}{\pi\mathbf{i}} \int_\Gamma \frac{f^{(0,k)}(\zeta)/k!}{(\zeta-t)(\zeta-\tau)} d\zeta. \qquad (2.41)
\end{aligned}
$$

Finalmente, las expresiones (2.39)-(2.41) resultantes permiten reescribir (2.38) como $R_0[\widehat{f}](t,\tau) = \sum\limits_{m=0}^{k} \widehat{J}_m^{k+1-m}(t,\tau)$, donde

$$
\begin{aligned}
\widehat{J}_m^{k+1-m}(t,\tau) &:= \frac{(t-\tau)^{k+1-m}(\overline{t-\tau})^m}{\pi\mathbf{i}} \int_\Gamma \frac{\sum_{p=m}^{k} \binom{p}{m} (\overline{\tau-\zeta})^{p-m} \frac{f^{(0,p)}(\zeta)}{p!}}{(\zeta-t)(\zeta-\tau)^{k+1-m}} d\zeta \\
&= \frac{(t-\tau)^{k+1-m}(\overline{t-\tau})^m}{m!\pi\mathbf{i}} \int_\Gamma \frac{\sum\limits_{l_2\le k-m} (\overline{\tau-\zeta})^{l_2} \frac{f^{(0,l_2+m)}(\zeta)}{l_2!}}{(\zeta-t)(\zeta-\tau)^{k+1-m}} d\zeta. \qquad (2.42)
\end{aligned}
$$

De aquí que sea suficiente estimar $|\widehat{J}_m^{k+1-m}(t,\tau)|$ para cada $m = \overline{0,k}$ y comprobar que está acotado por $c|t-\tau|^{k+\alpha}$. Observe que si se aplica este mismo procedimiento a la función $\widehat{F} := \widehat{f^{(n,0)}}$ resulta que

$$R_0[\widehat{F}](t,\tau)=\sum_{m=0}^{k-n}\frac{(t-\tau)^{k-n+1-m}(\overline{t-\tau})^m}{m!\pi\mathbf{i}}\int_\Gamma\frac{\sum\limits_{l_2\leq k-n-m}(\overline{\tau-\zeta})^{l_2}\frac{f^{(n,l_2+m)}(\zeta)}{l_2!}}{(\zeta-t)(\zeta-\tau)^{k-n+1-m}}d\zeta. \quad (2.43)$$

Despejando el desarrollo (1.10) para $j=(0,m)$ en la expresión (2.42) se arriba a

$$\widehat{R}_0(t,\tau)=\sum_{m=0}^{k}\frac{(t-\tau)^{k+1-m}(\overline{t-\tau})^m}{m!\pi\mathbf{i}}\int_\Gamma\frac{-\sum\limits_{\substack{|l|\leq k-m\\ l_1\neq 0}}(-1)^{l_1}(\overline{\tau-\zeta})^{l_2}\frac{f^{(l_1,l_2+m)}(\zeta)}{l!}}{(\zeta-t)(\zeta-\tau)^{k+1-m-l_1}}d\zeta -$$
$$-\sum_{m=0}^{k}\frac{(t-\tau)^{k+1-m}(\overline{t-\tau})^m}{m!\pi\mathbf{i}}\int_\Gamma\frac{R_{(0,m)}[f](\tau,\zeta)}{(\zeta-t)(\zeta-\tau)^{k+1-m}}d\zeta.$$

El segundo sumando en la expresión resultante será modularmente menor o igual que $c|\tau-t|^{k+\alpha}$ en virtud del Lema 2.1.5, por lo tanto todo se reduce a estimar

$$J(t,\tau):=\sum_{m=0}^{k}\frac{(t-\tau)^{k+1-m}(\overline{t-\tau})^m}{m!\pi\mathbf{i}}\int_\Gamma\frac{\sum\limits_{\substack{|l|\leq k-m\\ l_1\neq 0}}(-1)^{l_1+1}(\overline{\tau-\zeta})^{l_2}\frac{f^{(l_1,l_2+m)}(\zeta)}{l!}}{(\zeta-t)(\zeta-\tau)^{k+1-m-l_1}}d\zeta.$$

Desarrollando esta suma en el índice m primeramente, cada término resultante será a su vez una suma en $|l|$ que se puede desglosar fijando l_1.

De este modo se podrán agrupar todos los sumandos en la matriz diagonal

$$A=\begin{pmatrix} a_{(0,1)} & \dots & \dots & \dots & a_{(0,k-1)} & a_{(0,k)}\\ a_{(1,1)} & \dots & \dots & \dots & a_{(1,k-1)} & 0\\ a_{(2,1)} & \dots & \dots & a_{(2,k-2)} & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{(k-1,1)} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0\end{pmatrix}_{k\times k}$$

donde

$$a_{(m,n)} = \frac{(t-\tau)^{k+1-m}(\overline{t-\tau})^m}{m!\pi\mathbf{i}} \int_\Gamma \frac{\sum\limits_{\substack{|l|\le k-m\\ l_1=n}} (-1)^{l_1+1}(\overline{\tau-\zeta})^{l_2}\frac{f^{(l_1,l_2+m)}(\zeta)}{l!}}{(\zeta-t)(\zeta-\tau)^{k+1-m-l_1}}d\zeta.$$

Observe que para $m=k$, la suma en cuestión es igual a cero.

Seguidamente se procede a sumar convenientemente por columnas, de lo cual queda

$$J(t,\tau) = \sum_{n=1}^{k}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\sum_{m=0}^{k-n}\frac{(t-\tau)^{k+1-m}(\overline{t-\tau})^m}{m!\pi\mathbf{i}}\int_\Gamma \frac{\sum\limits_{l_2\le k-m-n}(\overline{\tau-\zeta})^{l_2}\frac{f^{(n,l_2+m)}(\zeta)}{l_2!}d\zeta}{(\zeta-t)(\zeta-\tau)^{k+1-m-n}}.$$

Nótese entonces que se puede reescribir $J(t,\tau) = \sum\limits_{n=1}^{k}(-1)^{n+1}\frac{(t-\tau)^n}{n!}J_n'(t,\tau)$, donde

$$J_n'(t,\tau) = \sum_{m=0}^{k-n}\frac{(t-\tau)^{k+1-m-n}(\overline{t-\tau})^m}{m!\pi\mathbf{i}}\int_\Gamma \frac{\sum\limits_{l_2\le k-m-n}(\overline{\tau-\zeta})^{l_2}f^{(n,l_2+m)}(\zeta)/l_2!}{(\zeta-t)(\zeta-\tau)^{k+1-m-n}}d\zeta.$$

Luego, como se ve claramente de (2.43), $J_n'(t,\tau) = R_0[\widehat{f^{(n,0)}}](t,\tau)$. Por tanto, de la hipótesis de inducción se desprende que $\widehat{f^{(n,0)}} \in Lip(k-n+\alpha,\Gamma)$ para cada $n=\overline{1,k}$, y de aquí $|J_n'(t,\tau)| \le c|\tau-t|^{k-n+\alpha}$ para cada $n=1,\dots,k$. Consecuentemente, $|J(t,\tau)| \le c|\tau-t|^{k+\alpha}$ como se quería probar.

Por último se prueba (B).

Primeramente, es válido observar que en este caso no se puede proceder como en el precedente ya que aquí $\widehat{f}^{(j_1,0)} \neq [\widehat{f^{(j_1,0)}}]$. Por tanto, se comienza por simplificar $\widehat{f}^{(j_1,0)}$ para luego hallar una fórmula de $R_{(j_1,0)}[\widehat{f}]$ y proceder con su acotación directamente.

$$\begin{aligned}
\widehat{f}^{(j_1,0)}(t) &= \frac{j_1!}{\pi\mathbf{i}}\int\limits_{\Gamma}\frac{\sum\limits_{l_2\le k}\overline{t-\zeta}^{\,l_2}f^{(0,l_2)}(\zeta)/l_2!}{(\zeta-t)^{j_1+1}}d\zeta\\
&= \frac{j_1!}{\pi\mathbf{i}}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(t)-\sum\limits_{\substack{|l|\le k\\ l_1\ge 1}}\frac{f^{(l)}(\zeta)}{l!}(t-\zeta)^{l_1}(\overline{t-\zeta})^{l_2}-R_0(t,\zeta)}{(\zeta-t)^{j_1+1}}d\zeta\\
&= \frac{j_1!}{\pi\mathbf{i}}\int\limits_{\Gamma}\frac{\sum\limits_{\substack{|l|\le k\\ l_1\ge 1}}-\frac{f^{(l)}(\zeta)}{l!}(t-\zeta)^{l_1}(\overline{t-\zeta})^{l_2}}{(\zeta-t)^{j_1+1}}d\zeta-\frac{j_1!}{\pi\mathbf{i}}\int\limits_{\Gamma}\frac{R_0(t,\zeta)}{(\zeta-t)^{j_1+1}}d\zeta\ (j_1\ge 1).
\end{aligned}$$

Denotando el primer sumando[1] anterior por J_0 y haciendo $L_1 := l_1-1$ y $L_2 := l_2$ se simplifica

$$J_0 = \frac{j_1!}{\pi\mathbf{i}}\int\limits_{\Gamma}\frac{\sum\limits_{|L|\le k-1}\frac{[f^{(1,0)}]^{(L)}(\zeta)}{(L_1+1)!L_2!}(t-\zeta)^{L_1}(\overline{t-\zeta})^{L_2}}{(\zeta-t)^{j_1}}d\zeta.$$

Separando la suma en $|l|$ en otras dos, una para $l_1=0$ y otra para $l_1\ge 1$ resulta

$$J_0 = \frac{j_1!}{\pi\mathbf{i}}\int\limits_{\Gamma}\frac{\sum\limits_{l_2\le k-1}\frac{[f^{(1,0)}]^{(0,l_2)}(\zeta)}{l_2!}(\overline{t-\zeta})^{l_2}+\sum\limits_{\substack{|l|\le k-1\\ l_1\ge 1}}\frac{[f^{(1,0)}]^{(l)}(\zeta)}{(l_1+1)!l_2!}(t-\zeta)^{l_1}(\overline{t-\zeta})^{l_2}}{(\zeta-t)^{j_1}}d\zeta.$$

Como $j_1! = j_1(j_1-1)! = (j_1-1)(j_1-1)!+(j_1-1)!$, se puede escribir

$$\begin{aligned}
J_0 &= \frac{(j_1-1)!}{\pi\mathbf{i}}\int\limits_{\Gamma}\frac{\sum\limits_{l_2\le k-1}\frac{[f^{(1,0)}]^{(0,l_2)}(\zeta)}{l_2!}(\overline{t-\zeta})^{l_2}}{(\zeta-t)^{j_1}}d\zeta+\\
&\quad+\frac{(j_1-1)!}{\pi\mathbf{i}}\int\limits_{\Gamma}\frac{(j_1-1)\sum\limits_{l_2\le k-1}\frac{[f^{(1,0)}]^{(0,l_2)}(\zeta)}{l_2!}(\overline{t-\zeta})^{l_2}}{(\zeta-t)^{j_1}}d\zeta+\\
&\quad+\frac{(j_1-1)!}{\pi\mathbf{i}}\int\limits_{\Gamma}\frac{j_1\sum\limits_{\substack{|l|\le k-1\\ l_1\ge 1}}\frac{[f^{(1,0)}]^{(l)}(\zeta)}{(l_1+1)!l_2!}(t-\zeta)^{l_1}(\overline{t-\zeta})^{l_2}}{(\zeta-t)^{j_1}}d\zeta.
\end{aligned}$$

[1] El segundo sumando será retomado al final.

El primer sumando resultante es exactamente igual a $\widehat{[f^{(1,0)}]}^{(j_1-1,0)}(t)$ y a él se volverá al final. Denótese a los dos restantes por J_0'. Entonces, usando el desarrollo (1.10) en el primero y agrupando con el segundo se tiene que

$$J_0' := \frac{(j_1-1)!}{\pi\mathbf{i}} \int_\Gamma \frac{\sum\limits_{\substack{|l|\le k-1\\ l_1\ge 1}} c_1(l_1)\frac{[f^{(1,0)}]^{(l)}(\zeta)}{l_2!}(t-\zeta)^{l_1}(\overline{t-\zeta})^{l_2}}{(\zeta-t)^{j_1}} d\zeta - \\ -\frac{(j_1-1)(j_1-1)!}{\pi\mathbf{i}} \int_\Gamma \frac{R_{(1,0)}(t,\zeta)}{(\zeta-t)^{j_1}} d\zeta,$$

donde $c_1(l_1) = \dfrac{j_1}{(l_1+1)!} - \dfrac{j_1-1}{l_1!}$. Denotando por J_1 el primer sumando anterior[2] resulta

$$\begin{aligned} J_1 &:= \frac{(j_1-1)!}{\pi\mathbf{i}} \int_\Gamma \frac{\sum\limits_{|l|\le k-2} -c_1(l_1+1)\frac{[f^{(2,0)}]^{(l)}(\zeta)}{l_2!}(t-\zeta)^{l_1}(\overline{t-\zeta})^{l_2}}{(\zeta-t)^{j_1-1}} d\zeta \\ &= \frac{(j_1-1)!}{\pi\mathbf{i}} \int_\Gamma \frac{\sum\limits_{l_2\le k-2} -c_1(l_1+1)|_{l_1=0}\frac{[f^{(2,0)}]^{(0,l_2)}(\zeta)}{l_2!}(\overline{t-\zeta})^{l_2}}{(\zeta-t)^{j_1-1}} d\zeta + \\ &\quad + \frac{(j_1-1)!}{\pi\mathbf{i}} \int_\Gamma \frac{\sum\limits_{\substack{|l|\le k-2\\ l_1\ge 1}} -c_1(l_1+1)\frac{[f^{(2,0)}]^{(l)}(\zeta)}{l_2!}(t-\zeta)^{l_1}(\overline{t-\zeta})^{l_2}}{(\zeta-t)^{j_1-1}} d\zeta. \end{aligned}$$

Aplicando nuevamente (1.10) a la primera sumatoria y agrupando con la segunda se tiene que

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{(j_1-1)!}{\pi\mathbf{i}} \int_\Gamma \frac{\sum\limits_{\substack{|l|\le k-2\\ l_1\ge 1}} c_2(l_1)\frac{[f^{(2,0)}]^{(l)}(\zeta)}{l_2!}(t-\zeta)^{l_1}(\overline{t-\zeta})^{l_2}}{(\zeta-t)^{j_1-1}} d\zeta \\ &\quad + \frac{c_1(l_1+1)|_{l_1=0}(j_1-1)!}{\pi\mathbf{i}} \int_\Gamma \frac{R_{(2,0)}[f](t,\zeta)}{(\zeta-t)^{j_1-1}} d\zeta, \end{aligned}$$

[2]El segundo sumando será retomado al final.

donde $c_2(l_1) = \dfrac{c_1(l_1+1)|_{l_1=0}}{l_1!} - c_1(l_1+1)$.

Repitiendo este procedimiento y definiendo $c_{-1}(1) := -j_1$, $c_0(1) := 1-j_1$ y en general

$$\begin{aligned} c_1(l_1) &:= \frac{1+l_1(1-j_1)}{(l_1+1)!} \\ c_n(l_1) &:= \frac{c_{n-1}(l_1+1)|_{l_1=0}}{l_1!} - c_{n-1}(l_1+1) = \frac{c_{n-1}(1)}{l_1!} - c_{n-1}(l_1+1), n \geq 2, \end{aligned}$$

en el paso j_1-ésimo se obtendrá

$$\begin{aligned} J_{j_1-2} &= \frac{(j_1-1)!}{\pi\mathbf{i}} \int\limits_\Gamma \frac{\sum\limits_{\substack{|l|\leq k-(j_1-1) \\ l_1\geq 1}} c_{j_1-1}(l_1) \dfrac{[f^{(j_1,0)}]^{(l)}(\zeta)}{l_2!}(t-\zeta)^{l_1}(\overline{t-\zeta})^{l_2}}{(\zeta-t)^2} d\zeta \\ &\quad + \frac{c_{j_1-2}(1)(j_1-1)!}{\pi\mathbf{i}} \int\limits_\Gamma \frac{R_{(j_1-1,0)}(t,\zeta)}{(\zeta-t)^2} d\zeta. \end{aligned}$$

Del Corolario 2.1.1 sigue que $c_{j_1-1}(1) = 0$, por tanto la primera suma anterior será un polinomio en t. Luego, retomando los términos que fueron obtenidos a lo largo del procedimiento se escribirá finalmente

$$\widehat{f}^{(j_1,0)} = \widehat{[f^{(1,0)}]}^{(j_1-1,0)} + (j_1-1)! \sum_{n=-1}^{j_1-2} \frac{c_n(1)}{\pi\mathbf{i}} \int\limits_\Gamma \frac{R_{(n+1,0)}[f](t,\zeta)}{(\zeta-t)^{j_1+1-(n+1)}} d\zeta + \mathbf{P}_{j_1-1}[f], \quad (2.44)$$

donde

$$\mathbf{P}_{j_1-1}[f](t) = \frac{(j_1-1)!}{\pi\mathbf{i}} \int\limits_\Gamma \frac{\sum\limits_{\substack{|s|\leq k-(j_1-1) \\ s_1\geq 2}} c_{j_1-1}(s_1) \dfrac{[f^{(j_1,0)}]^{(s)}(\zeta)}{s_2!}(t-\zeta)^{s_1}(\overline{t-\zeta})^{s_2}}{(\zeta-t)^2} d\zeta.$$

De aquí claramente

$$\begin{aligned} [\widehat{f}^{(j_1,0)}]^{(l)}(t) = \widehat{[f^{(1,0)}]}^{(j_1+l_1-1,l_2)}(t) + (j_1+l_1-1)! \sum_{n=-1}^{j_1+l_1-2} \frac{c_n(1)}{\pi\mathbf{i}} \int\limits_\Gamma \frac{R_{(n+1,0)}[f^{(0,l_2)}](t,\zeta)}{(\zeta-t)^{j_1+l_1+1-(n+1)}} d\zeta \\ + \mathbf{P}_{j_1+l_1-1}[f^{(0,l_2)}](t). \end{aligned}$$

Llegado a este punto, se está en condiciones de escribir una fórmula para el resto asociado. Esto es

$$\begin{aligned}
\widehat{R}_{(j_1,0)}(\tau,t) = [\widehat{f^{(1,0)}}]^{(j_1-1,0)}(\tau) - \sum_{|l|\le k-j_1} \frac{[\widehat{f^{(1,0)}}]^{(j_1+l_1-1,l_2)}(\tau)}{l!}(\tau-t)^{l_1}(\overline{\tau-t})^{l_2} + \\
+\mathbf{P}_{j_1-1}[f](\tau) - \sum_{|l|\le k-j_1} \frac{\mathbf{P}_{j_1+l_1-1}[f^{(0,l_2)}](t)}{l!}(\tau-t)^{l_1}(\overline{\tau-t})^{l_2} + \\
+(j_1-1)!\sum_{n=-1}^{j_1-2}\frac{c_n(1)}{\pi\mathbf{i}}\int_\Gamma \frac{R_{(n+1,0)}[f](t,\zeta)}{(\zeta-t)^{j_1+1-(n+1)}}d\zeta - \\
-\sum_{|l|\le k-j_1}(j_1+l_1-1)!\sum_{n=-1}^{j_1+l_1-2}\frac{c_n(1)}{\pi\mathbf{i}}\int_\Gamma \frac{R_{(n+1,0)}[f^{(0,l_2)}](t,\zeta)}{(\zeta-t)^{j_1+l_1+1-(n+1)}}d\zeta\frac{(\tau-t)^{l_1}(\overline{\tau-t})^{l_2}}{l!}.
\end{aligned}$$

La diferencia dada por los dos primeros términos anteriores es precisamente el resto $R_{(j_1-1,0)}[\widehat{f^{(1,0)}}](\tau,t)$, por tanto, como $f^{(1,0)} \in \mathcal{L}ip(k-1+\alpha,\Gamma)$, del paso de inducción sigue que $|R_{(j_1-1,0)}[\widehat{f^{(1,0)}}](\tau,t)| \le c|\tau-t|^{k-j_1+\alpha}$, es decir, la diferencia en cuestión satisface esta misma estimación. Por su parte, la diferencia dada por los términos tercero y cuarto, coincide con el resto $R_{(j_1-1,0)}\big(\mathbf{P}_{j_1-1}[f]\big)(\tau,t)$, que por ser $\mathbf{P}_{j_1-1}[f]$ un polinomio, será de cualquier clase de Lipschitz, por lo cual satisfará la cota deseada, es decir, $|R_{(j_1-1,0)}[\mathbf{P}_{j_1-1}[f]](\tau,t)| \le c|\tau-t|^{k-j_1+\alpha}$. Bastará entonces encontrar dicha cota para la diferencia dada por los términos quinto y sexto, la cual se denotará por $T_{j_1}(t,\tau)$. Para ello se verificará que $T_{j_1}(t,\tau) = G_{j_1}(t,\tau)$, donde G_{j_1} está definido en el Lema 2.1.7. De aquí se desprenderá, en virtud de la aserción de dicho lema, que $|T_{j_1}(t,\tau)| \le c|\tau-t|^{k-j_1+\alpha}$ y con ello terminará la demostración.

Escribiendo

$$\begin{aligned}
T_{j_1}(t,\tau) = (j_1-1)!\sum_{i=0}^{j_1-1}\frac{c_{i-1}(1)}{\pi\mathbf{i}}\int_\Gamma \frac{R_{(i,0)}[f](t,\zeta)}{(\zeta-t)^{j_1+1-i}}d\zeta - \\
-\sum_{|l|\le k-j_1}\left\{(j_1+l_1-1)!\sum_{i=0}^{j_1+l_1-1}\frac{c_{i-1}(1)}{\pi\mathbf{i}}\int_\Gamma \frac{R_{(i,0)}[f^{(0,l_2)}](t,\zeta)}{(\zeta-t)^{j_1+l_1+1-i}}d\zeta\right\}\frac{(\tau-t)^{l_1}(\overline{\tau-t})^{l_2}}{l!}
\end{aligned}$$

se observa que el primer término es exactamente $\sum\limits_{i=0}^{j_1-1} G_i^{(0)}$, por lo que bastará probar que la expresión entre llaves coincide con

$$\sum_{i=0}^{j_1-1} G_i^{(l)} = \sum_{i=0}^{j_1-1}\left(\sum_{p=0}^{l_1} \frac{-(j_1+p-i)!}{\pi\mathbf{i}}\binom{j_1-1}{i}\binom{l_1}{p}\int \frac{R_{(i+l_1-p,l_2)}(t,\zeta)}{(\zeta-t)^{j_1+1+p-i}}d\zeta\right).$$

Cada sumando se ubica ahora en la siguiente matriz rectangular $j_1 \times (l_1+1)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{(0,0)} & \cdots & a_{(0,l_1-(j_1-1))} & \cdots & a_{(0,l_1-1)} & a_{(0,l_1)} \\ a_{(1,0)} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{(1,l_1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(j_1-2,0)} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(j_1-1,0)} & a_{(j_1-1,1)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{(j_1-1,l_1)} \end{pmatrix} \tag{2.45}$$

donde

$$a_{(i,p)} = \frac{-(j_1+p-i)!}{\pi\mathbf{i}}\binom{j_1-1}{i}\binom{l_1}{p}\int \frac{R_{(i+l_1-p,l_2)}(t,\zeta)}{(\zeta-t)^{j_1+1+p-i}}d\zeta.$$

Comenzando por la esquina superior derecha con el elemento $a_{(0,l_1)}$ de (2.45) se obtiene el primer sumando. Luego se agrupa la “diagonal” que abarca las posiciones $(1,l_1)$ y $(0,l_1-1)$ y se forma el segundo sumando. Así se continúa este razonamiento hasta agrupar la diagonal que va desde $a_{(j_1-1,l_1)}$ hasta $a_{(0,l_1-(j_1-1))}$, con la cual se obtiene el sumando j_1-ésimo. Análogamente se repite este procedimiento pero ahora comenzando por la esquina inferior izquierda, luego se agrupa la “diagonal” que abarca las posiciones $a_{(j_1-1,1)}$ y $a_{(j_1-2,0)}$ y así sucesivamente hasta obtener el l_1-ésimo sumando. Quedará entonces

$$\sum_{i=0}^{j_1-1} G_i^{(l)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{j_1-1} - \left[\binom{j_1-1}{i}\binom{l_1}{l_1} + \ldots + \binom{j_1-1}{0}\binom{l_1}{l_1-i}\right]\frac{(j_1+l_1-i)!}{\pi\mathbf{i}}\int_\Gamma \frac{R_{(i,l_2)}(t,\zeta)d\zeta}{(\zeta-t)^{j_1+l_1+1-i}}$$

$$+ \sum_{i=0}^{l_1-1} - \left[\binom{j_1-1}{j_1-1}\binom{l_1}{i} + \ldots + \binom{j_1-1}{j_1-1-i}\binom{l_1}{0}\right]\frac{(i+1)!}{\pi\mathbf{i}}\int_\Gamma \frac{R_{(j_1+l_1-1-i,l_2)}(t,\zeta)d\zeta}{(\zeta-t)^{i+2}}.$$

Si se usa la identidad $\binom{m}{m-n} = \binom{m}{n}$ en la primera expresión entre corchetes se tendrá que

$$\binom{j_1-1}{i}\binom{l_1}{l_1}+\binom{j_1-1}{i-1}\binom{l_1}{l_1-1}+\ldots+\binom{j_1-1}{0}\binom{l_1}{l_1-i}=$$
$$=\sum_{r=0}^{i}\binom{j_1-1}{i-r}\binom{l_1}{r}=\binom{j_1+l_1-1}{i},$$

donde la última igualdad se cumple en virtud de la Fórmula de Vandermonde. De este modo dicho sumando se reescribe por

$$\sum_{i=0}^{j_1-1}-(j_1+l_1-1)!\frac{j_1+l_1-i}{i!\pi\mathbf{i}}\int_{\Gamma}\frac{R_{(i,l_2)}(t,\zeta)d\zeta}{(\zeta-t)^{j_1+l_1+1-i}}. \tag{2.46}$$

Análogamente, se aplica esta identidad a la segunda expresión entre corchetes y resulta

$$\sum_{i=0}^{l_1-1}-\frac{(j_1+l_1-1)!(i+1)}{(j_1+l_1-1-i)!\pi\mathbf{i}}\int_{\Gamma}\frac{R_{(j_1+l_1-1-i,l_2)}(t,\zeta)d\zeta}{(\zeta-t)^{i+2}},$$

que luego del cambio de variable $r=j_1+l_1-1-i$ es equivalente a

$$\sum_{r=j_1}^{j_1+l_1-1}-\frac{(j_1+l_1-1)!(j_1+l_1-r)}{r!\pi\mathbf{i}}\int_{\Gamma}\frac{R_{(r,l_2)}(t,\zeta)d\zeta}{(\zeta-t)^{j_1+l_1+1-r}}. \tag{2.47}$$

Combinando (2.46) y (2.47) resulta finalmente que

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{j_1-1}G_i^{(l)} &= \sum_{r=0}^{j_1+l_1-1}-\frac{(j_1+l_1-1)!(j_1+l_1-r)}{r!\pi\mathbf{i}}\int_{\Gamma}\frac{R_{(r,l_2)}(t,\zeta)d\zeta}{(\zeta-t)^{j_1+l_1+1-r}}\\ &= (j_1+l_1-1)!\sum_{i=0}^{j_1+l_1-1}\frac{c_{i-1}(1)}{\pi\mathbf{i}}\int_{\Gamma}\frac{R_{(i,0)}[f^{(0,l_2)}](t,\zeta)}{(\zeta-t)^{j_1+l_1+1-i}}d\zeta.\end{aligned}$$

□

2.2 Estimación de la norma del operador

Lema 2.2.1. *Sea* $f \in \mathcal{L}ip(k+\alpha,\Gamma)$ *y* $\{f^{(j)},\ 0 \leq |j| \leq k\}$ *la colección de funciones asociadas a* $f^{(0)}$*. Entonces, para cada* $(j^*) \in \{(j) : 0 \leq |j| \leq k\}$ *se cumple que*

$$\|f\|_{\mathcal{L}ip} = \|f^{(j^*)}\|_{\mathcal{L}ip}. \tag{2.48}$$

Demostración. Se parte de que

$$\begin{aligned} \|f^{(j^*)}\|_{\mathcal{L}ip} &= \min_{0\leq |l| \leq k-|j^*|} \{M : |(f^{(j^*)})^{(l)}| \leq M,\ |R_l[f^{(j^*)}](t,\zeta)| \leq M|t-\zeta|^{k-|j^*|+\alpha-|l|}\} \\ &= \min_{0\leq |j^*+l|\leq k} \{M : |f^{(j^*+l)}| \leq M,\ |R_{(j^*+l)}[f](t,\zeta)| \leq M|t-\zeta|^{k-|j^*+l|+\alpha}\}. \end{aligned}$$

Como este último conjunto está contenido en

$$\{M : |f^{(j)}| \leq M,\ |R_j[f](t,\zeta)| \leq M|t-\zeta|^{k-|j|+\alpha};\ 0 \leq |j| \leq k\},$$

su ínfimo será mayor o igual que el de este último. Es decir, $\|f\|_{\mathcal{L}ip} \leq \|f^{(j^*)}\|_{\mathcal{L}ip}$. Consecuentemente, bastará comprobar la desigualdad inversa. Para ello observe que $\|f\|_{\mathcal{L}ip} = \sup\limits_{0\leq|j|\leq k} \{\|f^{(j)}\|_\infty, \|f^{(j)}\|_\alpha\}$, donde $\|f^{(j)}\|_\infty = \sup\limits_{t\in\Gamma} |f^{(j)}(t)|$ y $\|f^{(j)}\|_\alpha = \sup\limits_{\substack{t\neq\zeta \\ t,\zeta\in\Gamma}} \frac{|R_j[f](t,\zeta)|}{|t-\zeta|^{k-|j|+\alpha}}$ es una forma equivalente para expresar la norma. Como

$$\sup_{0\leq|j^*+l|\leq k} \{\|f^{(j^*+l)}\|_\infty\} = \sup_{\substack{0\leq|j^*+l|\leq k \\ t\in\Gamma}} |f^{(j^*+l)}(t)| \leq \sup_{\substack{0\leq|j|\leq k \\ t\in\Gamma}} |f^{(j)}(t)| = \sup_{0\leq|j|\leq k} \{\|f^{(j)}\|_\infty\}$$

y

$$\sup_{0\leq|j^*+l|\leq k} \{\|f^{(j^*+l)}\|_\alpha\} \quad = \quad \sup_{\substack{0\leq|j^*+l|\leq k \\ t\neq\zeta\in\Gamma}} \frac{|R_{(j^*+l)}[f](t,\zeta)|}{|t-\zeta|^{k-|j^*+l|+\alpha}} \leq \sup_{0\leq|j|\leq k} \{\|f^{(j)}\|_\alpha\},$$

se concluye que $\|f^{(j^*)}\|_{\mathcal{L}ip} \leq \sup\limits_{0\leq|j|\leq k} \{\|f^{(j)}\|_\infty, \|f^{(j)}\|_\alpha\} = \|f\|_{\mathcal{L}ip}$. □

Teorema 2.2.1. *El operador singular* $\mathcal{S}_k f : \mathcal{L}ip(k+\alpha,\Gamma) \to \mathcal{L}ip(k+\alpha,\Gamma)$ *es acotado. Es decir, existe* $c > 0$ *tal que* $\|\mathcal{S}_k f\|_{\mathcal{L}ip} \leq c\|f\|_{\mathcal{L}ip}$.

Demostración. Se probará primero que $|\widehat{f}(t)| \leq c\|f\|_{\mathcal{L}ip}$ para cada $t \in \Gamma$. Para ello se usa (1.10) y se escribe

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_k f(t) &= \frac{1}{\pi\mathbf{i}} \int_\Gamma \frac{\sum_{n=0}^k f^{(0,n)}(\zeta)(\overline{t-\zeta})^n}{n!(\zeta - t)} d\zeta \\
&= \frac{f(t)}{\pi\mathbf{i}} \int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - t} + \frac{1}{\pi\mathbf{i}} \int_\Gamma \frac{\sum\limits_{\substack{0<|l|\leq k \\ l_1 \geq 1}} \frac{f^{(l)}}{l!}(\zeta)(t-\zeta)^{l_1}(\overline{t-\zeta})^{l_2} + R_0(t,\zeta)}{\zeta - t} d\zeta.
\end{aligned}$$

Usando que $|f^{(j)}(t)| \leq \|f\|_{\mathcal{L}ip}$ y $|R_j[f](t,\zeta)| \leq \|f\|_{\mathcal{L}ip}|\zeta - t|^{k+\alpha-|j|}$ por definición así como el hecho de que $\int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - t} = \pi\mathbf{i}$ para toda curva cerrada y suave Γ, resulta que

$$\begin{aligned}
|\mathcal{S}_k f(t)| &\leq c|f(t)| \left| \int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - t} \right| + c \sum_{\substack{0<|l|\leq k \\ l_1 \geq 1}} \int_\Gamma |f^{(l)}(\zeta)||t-\zeta|^{|l|-1} d\zeta + c \int_\Gamma \frac{|R_0(t,\zeta)|}{|\zeta - t|} d\zeta \\
&\leq c\|f\|_{\mathcal{L}ip}, \qquad (2.49)
\end{aligned}$$

donde c es una constante que solo depende del diámetro de la curva. A continuación se probará que $|\widehat{f}^{(j)}(t)| \leq c\|f\|_{\mathcal{L}ip}$ para cada $0 \leq |j| \leq k$. Como se observó anteriormente, $\widehat{f}^{(0,j_2)} = \widehat{f^{(0,j_2)}}$. Luego, de lo que ya se ha probado sigue que $|\widehat{f^{(0,j_2)}}(t)| \leq c\|f^{(0,j_2)}\|_{\mathcal{L}ip}$. De aquí y de (2.48) se concluye que $|\widehat{f}^{(0,j_2)}(t)| \leq c\|f\|_{\mathcal{L}ip}$. Entonces será suficiente verificar $|\widehat{f}^{(j)}| \leq c\|f\|_{\mathcal{L}ip}$ para los índices $(j_1, 0)$ con $1 \leq j_1 \leq k$.

Según la fórmula para $\widehat{f}^{(j_1,0)}$, bastará probar que cada uno de los tres sumandos en (2.44) es menor o igual que $c\|f\|_{\mathcal{L}ip}$, donde c solo dependa del diámetro de la curva. Se comienza con el segundo, para el cual se divide el análisis en Γ_1, Γ_2 y Γ_3. En virtud del Lema 2.1.1-(b)

$$\left| \int\limits_{\Gamma_1} \frac{R_{(n+1,0)}[f](t,\zeta)}{(\zeta - t)^{j_1+1-(n+1)}} d\zeta \right| \leq c\|f\|_{\mathcal{L}ip} \int\limits_{\Gamma_1} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - t|^{1-\alpha}} \leq c\|f\|_{\mathcal{L}ip}.$$

Por otro lado, usando (1.10) y el Lema 2.1.3,

$$\Big|\int\limits_{\Gamma_2}\frac{R_{(n+1,0)}(t,\zeta)}{(\zeta-t)^{j_1+1-(n+1)}}d\zeta\Big|\leq$$

$$\Big|\int\limits_{\Gamma_2}\frac{R_{(n+1,0)}(t,\tau)}{(\zeta-t)^{j_1+1-(n+1)}}d\zeta\Big|+\Big|\int\limits_{\Gamma_2}\frac{\sum\limits_{|l|\leq k-(n+1)}R_{(n+1+l_1,l_2)}(\tau,\zeta)/l!(t-\tau)^{l_1}(\overline{t-\tau})^{l_2}}{(\zeta-t)^{j_1+1-(n+1)}}d\zeta\Big|$$

$$\leq c|t-\tau|^{k-j_1+\alpha}+\sum_{|l|\leq k-(n+1)}c|t-\tau|^{|l|}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{\|f\|_{\mathcal{L}ip}|\tau-\zeta|^{k-(n+1)-|l|+\alpha}}{|\zeta-t|^{j_1+1-(n+1)}}|d\zeta|.$$

Como en Γ_2 es $|\zeta-t|\geq r$ y $|\zeta-\tau|\leq r$ se tiene que

$$\int\limits_{\Gamma_2}\frac{\|f\|_{\mathcal{L}ip}|\tau-\zeta|^{k-(n+1)-|l|+\alpha}}{|\zeta-t|^{j_1+1-(n+1)}}|d\zeta|\leq\|f\|_{\mathcal{L}ip}\frac{|t-\tau|^{k-(n+1)-|l|+\alpha}}{|t-\tau|^{j_1+1-(n+1)}}\int\limits_{\Gamma_2}|d\zeta|\leq c\|f\|_{\mathcal{L}ip}.$$

Por último,

$$\Big|\int\limits_{\Gamma_3}\frac{R_{(n+1,0)}(t,\zeta)}{(\zeta-t)^{j_1+1-(n+1)}}d\zeta\Big|\leq\int\limits_{\Gamma_3}\frac{\|f\|_{\mathcal{L}ip}|\zeta-t|^{k-j_1}}{|\zeta-t|^{1-\alpha}}|d\zeta|.$$

Si $|\zeta-t|\leq|\zeta-\tau|$, entonces $\dfrac{|\zeta-t|^{k-j_1}}{|\zeta-t|^{1-\alpha}}\leq\dfrac{|\zeta-\tau|^{k-j_1}}{|\zeta-t|^{1-\alpha}}$. Y si $|\zeta-t|\geq|\zeta-\tau|$, entonces $\dfrac{|\zeta-t|^{k-j_1}}{|\zeta-t|^{1-\alpha}}\leq\dfrac{|\zeta-t|^{k-j_1}}{|\zeta-\tau|^{1-\alpha}}$. Por tanto, en cualquier caso

$$\begin{aligned}\Big|\int\limits_{\Gamma_3}\frac{R_{(n+1,0)}(t,\zeta)}{(\zeta-t)^{j_1+1-(n+1)}}d\zeta\Big| &\leq c\|f\|_{\mathcal{L}ip}\Big\{\int\limits_{\Gamma_3}\frac{|\zeta-\tau|^{k-j_1}}{|\zeta-t|^{1-\alpha}}|d\zeta|+\int\limits_{\Gamma_3}\frac{|\zeta-t|^{k-j_1}}{|\zeta-\tau|^{1-\alpha}}|d\zeta|\Big\}\\ &\leq c\|f\|_{\mathcal{L}ip}\Big\{\int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma_1}\frac{|\zeta-\tau|^{k-j_1}}{|\zeta-t|^{1-\alpha}}|d\zeta|+\int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma_2}\frac{|\zeta-t|^{k-j_1}}{|\zeta-\tau|^{1-\alpha}}|d\zeta|\Big\}.\end{aligned}$$

De aquí bastará probar que una de las integrales entre llaves está acotada (la otra se tiene por simetría).

Como $|\zeta-t|\geq r$ para $\zeta\in\Gamma\setminus\Gamma_1$, se tendrá que $|\zeta-\tau|\leq|\zeta-t|+|t-\tau|\leq 3|\zeta-t|$, por tanto

$$\int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma_1} \frac{|\zeta-\tau|^{k-j_1}}{|\zeta-t|^{1-\alpha}}|d\zeta| \leq \int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma_1} \frac{|\zeta-t|^{k-j_1}}{|\zeta-t|^{1-\alpha}}|d\zeta| = \int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma_1} \frac{|\zeta-t|^{k+1-j_1}}{|\zeta-t|^{2-\alpha}}|d\zeta|$$
$$\leq \mathtt{d}(\Gamma)^{k+1-j_1} \int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma_1} \frac{|d\zeta|}{|\zeta-t|^{2-\alpha}} \leq c,$$

donde c solo depende de Γ. Note que en la última desigualdad se usa el Lema 2.1.1-(c). Esto conduce finalmente a que

$$\left|(j_1-1)!\sum_{n=-1}^{j_1-2}\frac{c_n(1)}{\pi\mathbf{i}}\int\limits_{\Gamma}\frac{R_{(n+1,0)}[f](t,\zeta)}{(\zeta-t)^{j_1+1-(n+1)}}d\zeta\right| \leq c\|f\|_{\mathcal{L}ip}. \tag{2.50}$$

La estimación del tercer sumando se obtiene directamente del Lema 2.1.1-(a) (nótese su uso también en el análisis previo),

$$\left|\frac{(j_1-1)!}{\pi\mathbf{i}}\int\limits_{\Gamma}\frac{\sum\limits_{\substack{|s|\leq k-(j_1-1)\\ s_1\geq 2}} c_{j_1-1}(s_1)\dfrac{[f^{(j_1,0)}]^{(s)}(\zeta)}{s_2!}(t-\zeta)^{s_1}(\overline{t-\zeta})^{s_2}}{(\zeta-t)^2}d\zeta\right| \leq c\|f\|_{\mathcal{L}ip}. \tag{2.51}$$

Resta probar que $|[\widehat{f^{(1,0)}}]^{(j_1-1,0)}| \leq c\|f\|_{\mathcal{L}ip}$.

La prueba se hará por inducción en k. Si $k=1$, entonces la condición $1\leq j_1\leq k$ se reduce al único caso en que $j_1=1$ y de (2.49) se cumple que

$$|[\widehat{f^{(1,0)}}]^{(j_1-1,0)}| = |\widehat{f^{(1,0)}}| \leq c\|f^{(1,0)}\|_{\mathcal{L}ip} = c\|f\|_{\mathcal{L}ip}.$$

Asuma ahora que esto es cierto hasta $N=k$. O sea, que si $f\in\mathcal{L}ip(N+\alpha,\Gamma)$, entonces $|[\widehat{f^{(1,0)}}]^{(j_1-1,0)}| \leq c\|f\|_{\mathcal{L}ip}$, $\forall 1\leq j_1\leq N$. Sea ahora $N=k+1$ y $f\in\mathcal{L}ip(N+\alpha,\Gamma)$. Si se denota $F=f^{(1,0)}$ entonces claramente $F\in\mathcal{L}ip(k+\alpha,\Gamma)$. Luego, si $j_1=1$ se infiere de (2.48) y (2.49) que $|\widehat{F}^{(j_1-1,0)}| = |\widehat{F}| \leq c\|f^{(1,0)}\|_{\mathcal{L}ip} \leq c\|f\|_{\mathcal{L}ip}$, por lo que será suficiente asumir que $2\leq j_1\leq k+1$.

Si se define $J_1 = j_1 - 1$, se tendrá que $1 \leq J_1 \leq k$ y según (2.44) será válida fórmula

$$\widehat{F}^{(J_1,0)}(t) = [\widehat{F^{(1,0)}}](t)^{(J_1-1,0)} + (J_1-1)! \sum_{n=-1}^{J_1-2} \frac{c_n(1)}{\pi \mathbf{i}} \int_{\Gamma} \frac{R_{(n+1,0)}[F](t,\zeta)}{(\zeta - t)^{J_1+1-(n+1)}} d\zeta + \\ + \mathbf{P}_{J_1-1}[F](t), \ \forall \, 1 \leq J_1 \leq k.$$

Usando ahora la hipótesis de inducción, $|[\widehat{F^{(1,0)}}]^{(J_1-1,0)}| \leq c\|F\|_{\mathcal{L}ip}$ para cada $1 \leq J_1 \leq k$, y por (2.48) sigue que $|[\widehat{F^{(1,0)}}]^{(J_1-1,0)}| \leq c\|f\|_{\mathcal{L}ip}$. Por otro lado, en virtud de las acotaciones (2.50) y (2.51) halladas anteriormente, se obtiene la misma cota para el segundo y tercer sumando en la expresión anterior. De aquí resulta que $|\widehat{F}^{(J_1,0)}(t)| \leq c\|f\|_{\mathcal{L}ip}$, o sea, $|[\widehat{f^{(1,0)}}]^{(j_1-1,0)}| \leq c\|f\|_{\mathcal{L}ip}$ para cada $2 \leq j_1 \leq k+1$ como se quería probar. $\square$

Conclusiones del capítulo

El principal aporte de este capítulo fue el establecimiento de un Teorema de Plemelj-Privalov (Teorema 2.1.2) para la clase de Lipschitz de exponente arbitrario bajo la acción del operador integral singular generalizado definido en el Capítulo 1. Para concebir el mismo fue necesario demostrar una serie de resultados previos (Lemas 2.1.3, 2.1.4, 2.1.5, 2.1.6, 2.1.7, Proposición 2.1.1 y Corolario 2.1.1) que contribuyeron a simplificar la prueba del resultado principal. Como herramienta predominante en la mayoría de las pruebas desarrolladas se destaca el uso de estimaciones que utilizan delicadamente la geometría de la curva, las propiedades de las funciones de la clase de Lipschitz de orden superior, así como de la inducción completa. Además, conexiones con la Teoría Combinatoria emergieron inesperadamente al usar la Fórmula de Vandermonde.

3. TEOREMA DE PLEMELJ-PRIVALOV MULTIDIMENSIONAL GENERALIZADO

CAPÍTULO 3

Teorema de Plemelj-Privalov multidimensional generalizado

Como se mencionaba en la Introducción, el Teorema de Plemelj-Privalov también ha sido abordado en el Análisis de Clifford para funciones de la clase de Hölder (usual y generalizada) y un operador singular asociado a la teoría de funciones monogénicas. Afortunadamente, en el contexto más general que se analiza existe una Fórmula de Cauchy de orden superior que permite representar a una función $(k+1)$-monogénica en el dominio acotado de $\mathbb{R}^m$ a través de sus valores y los de sus derivadas en la frontera. En virtud de la misma, en este capítulo se define un operador singular que generaliza al operador singular usual con núcleo de Cauchy de la teoría de funciones monogénicas y se demuestra la validez del Teorema de Plemelj-Privalov cuando se considera la clase de funciones de Lipschitz de exponente arbitrario.

3.1 La transformada de Cauchy y el operador singular

Para subconjuntos $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ acotados y funciones de clase $\mathbf{C}^{k+1}(\Omega \cup \Gamma)$, la Fórmula de Borel-Pompeiu [22] de orden superior está dada por

$$f(\underline{x}) = \sum_{s=0}^{k} \int_{\Gamma} (-1)^s E_s(\underline{y}-\underline{x})\eta(\underline{y})\partial_{\underline{y}}^s f(\underline{y})d\underline{y} + \int_{\Omega} (-1)^{k+1} E_k(\underline{y}-\underline{x})\partial_{\underline{y}}^{k+1} f(\underline{y})d\underline{y}, \ \underline{x} \in \Omega,$$

donde los E_s satisfacen la regla recursiva $\partial_{\underline{x}} E_{s+1}(\underline{x}) = E_s(\underline{x})$ para $\underline{x} \neq 0$, lo cual es consistente con las definiciones de E_0 y E_1 introducidas en el Capítulo 1. De hecho, esta fórmula sigue siendo válida bajo la condición más general de que f sea de clase $\mathbf{C}^k(\Omega \cup \Gamma) \cap \mathbf{C}^{k+1}(\Omega)$ y $\int\limits_{\Omega} \|\partial_{\underline{y}}^{k+1} f(\underline{y})\| d\underline{y} < +\infty$.

Claramente, si f es monogénica de orden $k+1$, resulta la siguiente fórmula de representación de tipo Cauchy

$$f(\underline{x}) = \sum_{s=0}^{k} \int\limits_{\Gamma} (-1)^s E_s(\underline{y} - \underline{x}) \eta(\underline{y}) \partial_{\underline{y}}^s \tilde{f}(\underline{y}) d\underline{y}, \ \underline{x} \in \Omega.$$

En contraste con la fórmula de representación usual, en este caso se precisa conocer los valores de la función y sus derivadas parciales en la frontera Γ. Auxiliándose en este punto del Teorema de Whitney (aplicado componente a componente), se puede establecer la siguiente definición de transformada de Cauchy polimonogénica para una función $f \in \mathcal{L}ip(k+\alpha, \Gamma)$ (note que en este caso sí está bien definida la idea de derivada de la función sobre el cerrado Γ)

$$\mathcal{C}_k f(\underline{x}) = \sum_{s=0}^{k} \int\limits_{\Gamma} (-1)^s E_s(\underline{y} - \underline{x}) \eta(\underline{y}) \partial_{\underline{y}}^s \tilde{f}(\underline{y}) d\underline{y},$$

donde $\tilde{f}$ denota la extensión de Whitney (con valores en $\mathbb{R}_{0,m}$) de f.

Como el núcleo E_0 es fuertemente singular y $\tilde{f}|_{\Gamma}$ es de Hölder, de las Fórmulas de Plemelj-Sojotski se tiene que la función $\int\limits_{\Gamma} (-1)^s E_0(\underline{y} - \underline{x}) \eta(\underline{y}) \tilde{f}(\underline{y}) d\underline{y}$ experimenta un salto a través de la frontera. Por otro lado, los núcleos E_s son débilmente singulares para $s > 0$, por lo que las funciones $\int\limits_{\Gamma} (-1)^s E_s(\underline{y} - \underline{x}) \eta(\underline{y}) \partial_{\underline{y}}^s \tilde{f}(\underline{y}) d\underline{y}$, $s > 0$, se comportan como funciones continuas a través la frontera. De aquí que también se cumplan las Fórmulas de Plemelj-Sojotski para la transformada $\mathcal{C}_k$. Con estas fórmulas en mente, puede darse una definición para el operador singular como

$\mathbb{S}_k f(\underline{x}) = \mathcal{C}_k^+ f(\underline{x}) + \mathcal{C}_k^- f(\underline{x})$. Detalladamente,

$$\mathbb{S}_k f(\underline{x}) = 2 \sum_{s=0}^{k} \int_{\Gamma} (-1)^s E_s(\underline{y} - \underline{x}) \eta(\underline{y}) \partial_{\underline{y}}^s \tilde{f}(\underline{y}) d\underline{y}, \; \underline{x} \in \Gamma.$$

Finalmente, obsérvese que tanto la definición de transformada de Cauchy como la de operador singular se encuentran en correspondencia con las introducidas en el Capítulo 1 para funciones de Hölder ya que $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$ y $\mathbb{S}_0 = \mathbb{S}$.

3.1.1 Invariancia de la clase de Lipschitz de primer orden

El principal objetivo de esta sección es probar la invariancia de la clase de Lipschitz de exponente arbitrario para el caso más sencillo de considerar $f \in \mathcal{L}ip(1+\alpha, \Gamma)$ [29]. Primeramente, se hace observar que a través de la norma en $\mathbb{R}_{0,m}$, las condiciones (1.1) y (1.2) toman la forma

$$R_j(\underline{x}, \underline{y}) = f^{(j)}(\underline{x}) - \sum_{|l| \leq k-|j|} \frac{f^{(j+l)}(\underline{y})}{l!} (\underline{x} - \underline{y})^l, \; x, y \in \mathbf{E} \tag{3.1}$$

y

$$\|f^{(j)}(\underline{x})\| \leq M, \; \|R_j(\underline{x}, \underline{y})\| \leq M |\underline{x} - \underline{y}|^{k+\alpha-|j|}, \; x, y \in \mathbf{E}, |j| \leq k, \tag{3.2}$$

donde las funciones $f^{(j)}$ y $R_j(\underline{x}, \underline{y})$ toman ahora valores en $\mathbb{R}_{0,m}$.

Análogamente, $\mathcal{L}ip(k + \alpha, \mathbf{E})$ es un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$ con la norma

$$\|f\|_{k+\alpha, \mathbf{E}} = \sup_{0 \leq |j| \leq k} \left\{ \sup_{\underline{x} \in \mathbf{E}} \|f^{(j)}(\underline{x})\|, \sup_{\substack{\underline{x}, \underline{y} \in \mathbf{E} \\ \underline{x} \neq \underline{y}}} \frac{\|R_j(\underline{x}, \underline{y})\|}{|\underline{x} - \underline{y}|^{k+\alpha-|j|}} \right\}. \tag{3.3}$$

El siguiente resultado auxiliar establece que toda función de Lipschitz de primer orden en el espacio euclídeo multidimensional sigue siendo de esta clase en cualquier subconjunto compacto suyo.

Lema 3.1.1. *Sea $F \in \mathcal{L}ip(1 + \alpha, \mathbb{R}^m)$ y $\mathbf{E} \subset \mathbb{R}^m$ compacto. Entonces $f = F|_{\mathbf{E}}$*

pertenece a $\mathcal{L}ip(1+\alpha, \mathbf{E})$ *y satisface*

$$\|f\|_{1+\alpha,\mathbf{E}} \leq \sup_{0\leq|j|\leq 1} \big\{m\|\partial^{(j)}F\|_{\alpha,\mathbb{R}^m}, \sup_{\underline{x}\in\mathbf{E}} \|f(\underline{x})\|\big\}.$$

Demostración. Que $f \in \mathcal{L}ip(1+\alpha, \mathbf{E})$ es evidente si se toma $f^j = F^j|_{\mathbf{E}} = \partial^{(j)}F\big|_{\mathbf{E}}$. Además, para $|j| = 1$,

$$\sup_{\underline{x}\in\mathbf{E}} \|f^j(\underline{x})\| \leq \sup_{\underline{x}\in\mathbb{R}^m} \|F^j(\underline{x})\| \leq \|\partial^{(j)}F\|_{\alpha,\mathbb{R}^m}$$

y

$$\frac{\|R_j(\underline{x},\underline{y})\|}{|\underline{x}-\underline{y}|^\alpha} = \frac{\|\partial^{(j)}F(\underline{x}) - \partial^{(j)}F(\underline{y})\|}{|\underline{x}-\underline{y}|^\alpha} \leq \|\partial^{(j)}F\|_{\alpha,\mathbb{R}^m}.$$

Por otro lado, si $|j| = 0$,

$$R_j(\underline{x},\underline{y}) = F(\underline{x}) - F(\underline{y}) - \sum_{|l|=1} \partial^{(l)}F(\underline{y})(\underline{x}-\underline{y})^l.$$

Aplicando el TVM a la función diferenciable F (por ser de Lipschitz en todo el espacio) se tiene que

$$F(\underline{x}) - F(\underline{y}) = \sum_{|l|=1} \partial^{(l)}F(\underline{y}^*)(\underline{x}-\underline{y})^l,$$

donde $\underline{y}^*$ es un punto en el segmento que une $\underline{x}$ con $\underline{y}$. Consecuentemente

$$\|R_j(\underline{x},\underline{y})\| \leq \sum_{|l|=1} \|\partial^l F(\underline{y}^*) - \partial^l F(\underline{y})\||\underline{x}-\underline{y}| \leq m \sup_{|l|=1} \|\partial^l F\|_{\alpha,\mathbb{R}^m}|\underline{x}-\underline{y}|^{1+\alpha}.$$

Teniendo en cuenta ahora (3.3) se deduce la estimación deseada. □

Antes de dar paso al resultado fundamental de esta sección, es necesario presentar el hecho siguiente.

Lema 3.1.2. *Sea* G *una función real con derivadas parciales continuas en* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$*. Entonces*

$$\partial_{x_i}G = -\frac{1}{2}[(\partial_{\underline{x}}G)e_i + e_i(\partial_{\underline{x}}G)].$$

Demostración. Se tiene que

$$\begin{aligned}(\partial_{\underline{x}}G)e_i &= \big(\sum_{j=1}^{m} e_j\partial_{x_j}G\big)e_i = \sum_{j=1}^{m} e_je_i\partial_{x_j}G = \sum_{j=i}^{m} e_je_i\partial_{x_j}G + \sum_{j\neq i}^{m} e_je_i\partial_{x_j}G \\ &= -\partial_{x_j}G + \sum_{j\neq i}^{m} e_je_i\partial_{x_j}G.\end{aligned}$$

De forma análoga resulta que $e_i(\partial_{\underline{x}}G) = -\partial_{x_j}G + \sum\limits_{j\neq i}^{m} e_ie_j\partial_{x_j}G$. Luego, sumando ambas igualdades se tendrá

$$\begin{aligned}(\partial_{\underline{x}}G)e_i + e_i(\partial_{\underline{x}}G) &= -2\partial_{x_j}G + \sum_{j\neq i}^{m} e_je_i\partial_{x_j}G + \sum_{j\neq i}^{m} e_ie_j\partial_{x_j}G \\ &= -2\partial_{x_j}G + \sum_{j\neq i}^{m}(e_je_i + e_ie_j)\partial_{x_j}G.\end{aligned}$$

Claramente, como $e_je_i = -e_ie_j$, la suma que figura en el miembro derecho de la igualdad anterior se anula y resulta la validez de la fórmula en cuestión. □

Una vez establecidos los resultados auxiliares, se está en condiciones de demostrar la inclusión fundamental que garantizará la invariancia de la clase de Lipschitz de primer orden.

Teorema 3.1.1.

$$\mathcal{C}_1\big(\mathcal{L}ip(1+\alpha,\Gamma)\big) \subset \mathcal{L}ip(1+\alpha,\Gamma\cup\Omega).$$

Demostración. Sea $f \in \mathcal{L}ip(1+\alpha,\Gamma)$ y $\tilde{f}$ su extensión de Whitney. Por $\mathcal{W}$ se denotará la descomposición de Whitney de Ω por cubos diádicos Q. El Teorema 1.1.1 garantiza que $\tilde{f} \in \mathbf{C}^2(\Omega)\cap\mathbf{C}^1(\Omega\cup\Gamma)$.

Además, del inciso (iii) se concluye que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \|\partial^2_{\underline{y}}\tilde{f}(\underline{y})\|d\underline{y} &= \sum_{Q\in\mathcal{W}}\int_Q \|\partial^2_{\underline{y}}\tilde{f}(\underline{y})\|d\underline{y} \le c\sum_{Q\in\mathcal{W}}\int_Q (\mathrm{dist}(\underline{y},\Gamma))^{(\alpha-1)}d\underline{y} \le \\ &\le c\sum_{Q\in\mathcal{W}}|Q|^{(\alpha-1)}|Q|^m = c\sum_{Q\in\mathcal{W}}|Q|^{m-1+\alpha}.\end{aligned}$$

Como fue probado en [9, Lema 2.2] en un contexto geométrico más general, la última suma está acotada por $c\alpha^{-1}\,\mathtt{m}(\Gamma)$, donde c solo depende de m y Γ. Luego, como se hizo notar anteriormente, será válido también usar la fórmula de Borel-Pompeiu. De aquí que se pueda reescribir $\mathcal{C}_1 f$ como

$$\mathcal{C}_1 f(\underline{x}) = \tilde{f}(\underline{x}) - \int\limits_{\Omega} E_1(\underline{y}-\underline{x})\partial_{\underline{y}}^2 \tilde{f}(\underline{y})d\underline{y}, \ \ \underline{x} \in \Omega. \tag{3.4}$$

Se quiere probar entonces que el miembro derecho de (3.4) puede extenderse a todo $\mathbb{R}^m$ como una función de clase $\mathbf{C}^1$. Claramente $\tilde{f} \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}^m)$ por Teorema 1.1.1. Por otra lado, como $\big|E_1(\underline{y}-\underline{x})\big| \leq c|\underline{y}-\underline{x}|^{2-m}$, es permisible la diferenciación bajo el signo integral. Usando el hecho de que E_1 es real y el Lemma 3.1.2 resulta

$$\begin{aligned}
\partial_{x_i}\int\limits_{\Omega} E_1(\underline{y}-\underline{x})\partial_{\underline{y}}^2\tilde{f}(\underline{y})d\underline{y} &= \int\limits_{\Omega} \partial_{x_i}E_1(\underline{y}-\underline{x})\partial_{\underline{y}}^2\tilde{f}(\underline{y})d\underline{y} \\
= \ \ -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} &\big(\partial_{\underline{x}}E_1(\underline{y}-\underline{x})e_i + e_i\partial_{\underline{x}}E_1(\underline{y}-\underline{x})\big)\partial_{\underline{y}}^2\tilde{f}(\underline{y})d\underline{y} \\
= \ \ -\frac{1}{2}\Big[\int\limits_{\Omega} &E_0(\underline{y}-\underline{x})\partial_{\underline{y}}^2 e_i\tilde{f}(\underline{y})d\underline{y} + e_i\int\limits_{\Omega} E_0(\underline{y}-\underline{x})\partial_{\underline{y}}^2\tilde{f}(\underline{y})d\underline{y}\Big].
\end{aligned}$$

Por tanto basta comprobar que ambos sumandos en el miembro derecho de la anterior igualdad se comportan como una función continua en $\mathbb{R}^m$. Evidentemente, será suficiente probar que esto se cumple para el segundo sumando

$$F(\underline{x}) := \int\limits_{\Omega} E_0(\underline{y}-\underline{x})\partial_{\underline{y}}^2\tilde{f}(\underline{y})d\underline{y}.$$

Aplicando la Fórmula de Borel-Pompeiu para la función $g = \partial_{\underline{x}} f \in \mathbf{C}^1$ queda

$$F(\underline{x}) = \int\limits_{\Omega} E_0(\underline{y}-\underline{x})\partial_{\underline{y}} g(\underline{y})d\underline{y} = \begin{cases} \displaystyle\int\limits_{\Gamma} E_0(\underline{y}-\underline{x})\eta(\underline{y})g(\underline{y})d\underline{y} - g(\underline{x}), & \underline{x} \in \Omega_+ \\ \displaystyle\int\limits_{\Gamma} E_0(\underline{y}-\underline{x})\eta(\underline{y})g(\underline{y})d\underline{y}, & \underline{x} \in \Omega_-, \end{cases}$$

donde nuevamente se ha usado que

$$\int_{\Omega} \|\partial_{\underline{y}} g(\underline{y})\| d\underline{y} = \int_{\Omega} \|\partial_{\underline{y}}^2 f(\underline{y})\| d\underline{y} < +\infty.$$

Como $g \in \mathbf{C}^{0,\alpha}(\Gamma)$, la continuidad hasta la frontera de la transformada de Cauchy

$$\mathcal{C}g(\underline{x}) = \int_{\Gamma} E_0(\underline{y} - \underline{x})\eta(\underline{y})g(\underline{y})d\underline{y}, \ \underline{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \Gamma$$

está garantizada por el clásico resultado de Iftimie [40]. Además, de las fórmulas de Plemelj-Sojotski se deduce la continuidad de F en $\mathbb{R}^m$. De hecho se tiene más, $F \in \mathbf{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^m)$, que es claro por el resultado de Iftimie. En resumen, se ha probado que $\mathcal{C}_1 f$ puede ser extendida desde Ω a una función en $\mathcal{L}ip(1+\alpha, \mathbb{R}^m)$, lo que unido al Lema 3.1.1 implica que $\mathcal{C}_1 f \in \mathcal{L}ip(1+\alpha, \Omega \cup \Gamma)$ como se deseaba. $\square$

Como una consecuencia inmediata de lo anterior se tiene que en efecto, si $f \in \mathcal{L}ip(1+\alpha, \Gamma)$ entonces $\mathbb{S}_1 f \in \mathcal{L}ip(1+\alpha, \Gamma)$. Para ello basta usar las Fórmulas de Plemelj-Sojotski, de donde es claro que $\mathbb{S}_1 f(\underline{x}) = -f(\underline{x}) + 2 \lim\limits_{\substack{\underline{y} \to \underline{x} \\ \underline{x} \in \Omega^+}} \mathcal{C}f(\underline{y})$.

3.1.2 Invariancia de la clase de Lipschitz de orden superior

Un estudio detallado de la demostración realizada en la sección anterior muestra el uso esencial de la propiedad de ser E_1 una función real, idea que no puede ser generalizada para el caso general. Por ello, en esta sección se utiliza otra técnica basada en acotaciones directas que probarán la invariancia de la clase de Lipschitz de cualquier orden bajo el operador $\mathbb{S}_k$.

Se comenzará con la introducción de unas funciones que intervendrán posteriormente en la demostración del resultado principal de este capítulo [27]. Para $\underline{x} \neq 0$, $s \geq 1$ se definen

$$E_{s-1}(\underline{x}) = \begin{cases} c(m,s)\dfrac{\underline{x}}{|\underline{x}|^{m-s+1}} & \text{si } m \text{ impar y } s \text{ impar} \\ & \text{o si } m \text{ par, } s \text{ impar y } s < m, \\ c(m,s)\dfrac{1}{|\underline{x}|^{m-s}} & \text{si } m \text{ impar y } s \text{ par} \\ & \text{o si } m \text{ par, } s \text{ par y } s < m, \\ c(m,s)\underline{x}^{m-s}\big(\log|\underline{x}| + A(m,s)\big) & \text{si } m \text{ par y } s \geq m \end{cases} \tag{3.5}$$

y

$$E^{(j)}_{s-1}(\underline{x}) = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} \displaystyle\sum_{n-par}^{|j|+1} \frac{P_n(\underline{x})}{|\underline{x}|^{m-s+|j|+n}} & \text{si } |j| \text{ impar} \\ \displaystyle\sum_{n-impar}^{|j|+1} \frac{P_n(\underline{x})}{|\underline{x}|^{m-s+|j|+n}} & \text{si } |j| \text{ par} \end{array}\right\} & \begin{array}{l} m \text{ impar, } s \text{ impar} \\ \text{o} \\ m \text{ par, } s \text{ impar, } s < m \end{array} \\ \left.\begin{array}{ll} \displaystyle\sum_{n-impar}^{|j|} \frac{P_n(\underline{x})}{|\underline{x}|^{m-s+|j|+n}} & \text{si } |j| \text{ impar} \\ \displaystyle\sum_{n-par}^{|j|} \frac{P_n(\underline{x})}{|\underline{x}|^{m-s+|j|+n}} & \text{si } |j| \text{ par} \end{array}\right\} & \begin{array}{l} m \text{ impar, } s \text{ par} \\ \text{o} \\ m \text{ par, } s \text{ par, } s < m \end{array} \\ \left.\begin{array}{ll} \displaystyle\sum_{n-impar}^{2(s-m)+q} \frac{P_n(\underline{x})}{|\underline{x}|^{q+n}} & \text{si } q \text{ impar} \\ \displaystyle\sum_{n-par}^{2(s-m)+q} \frac{P_n(\underline{x})}{|\underline{x}|^{q+n}} & \text{si } q \text{ par} \end{array}\right\} & \begin{array}{l} m \text{ par, } s \geq m \\ |j| = s - m + q \end{array} \\ \left.\begin{array}{l} P_{s-m-|j|}(\underline{x})\big(\log|\underline{x}| + A(m,s)\big) \\ \displaystyle + \sum_{2\leq n-par}^{s-m+|j|} \frac{P_{s-m-|j|+n}(\underline{x})}{|\underline{x}|^n} \end{array}\right\} & \begin{array}{l} m \text{ par, } s \geq m \\ |j| \leq s - m. \end{array} \end{cases} \tag{3.6}$$

Proposición 3.1.1. *La función $E_s(\underline{x})$ es continuamente diferenciable hasta cualquier orden siempre que $\underline{x} \neq 0$. Además, $E^{(j)}_s(\underline{x}) = \partial^{(j)}_{\underline{x}} E_s(\underline{x})$, $\underline{x} \neq 0$.*

Demostración. Para el primer caso de (3.5), o sea, para m impar y s impar o para

m par, s impar y $s < m$ se tiene

$$\begin{aligned}
\partial_{x_{i_1}} E_{s-1}(\underline{x}) &= \frac{P_0(\underline{x})}{|\underline{x}|^{m-s+1}} + \frac{P_2(\underline{x})}{|\underline{x}|^{m-s+3}} \\
\partial_{x_{i_2}} \partial_{x_{i_1}} E_{s-1}(\underline{x}) &= \frac{P_1(\underline{x})}{|\underline{x}|^{m-s+3}} + \frac{P_3(\underline{x})}{|\underline{x}|^{m-s+5}} \\
\partial_{x_{i_3}} \ldots \partial_{x_{i_1}} E_{s-1}(\underline{x}) &= \frac{P_0(\underline{x})}{|\underline{\zeta} - \underline{x}|^{m-s+3}} + \frac{P_2(\underline{x})}{|\underline{x}|^{m-s+5}} + \frac{P_4(\underline{x})}{|\underline{x}|^{m-s+7}},
\end{aligned}$$

donde $P_n(\underline{x})$ denota aquí y en lo que sigue, un polinomio homogéneo de grado n. Así sucesivamente se intuye la fórmula

$$\partial_{x_{i_{|j|}}} \ldots \partial_{x_{i_1}} E_{s-1}(\underline{x}) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n-par}^{|j|+1} \frac{P_n(\underline{x})}{|\underline{x}|^{m-s+|j|+n}} & \text{si } |j| \text{ impar,} \\ \\ \displaystyle\sum_{n-impar}^{|j|+1} \frac{P_n(\underline{x})}{|\underline{x}|^{m-s+|j|+n}} & \text{si } |j| \text{ par.} \end{cases} \tag{3.7}$$

Supóngala válida hasta $|j|$. Sea $N = |j| + 1$, entonces por la hipótesis de inducción, $\partial_{x_{i_N}} \ldots \partial_{x_{i_1}} E_{s-1}(\underline{x}) = \partial_{x_{i_{|j|+1}}} \big(\partial_{x_{i_{|j|}}} \ldots \partial_{x_{i_1}} E_{s-1}(\underline{x})\big)$ se calcula fácilmente

$$\partial_{x_{i_{|j|+1}}} \ldots \partial_{x_{i_1}} E_{s-1}(\underline{x}) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n-par}^{|j|+2} \frac{P_n(\underline{x})}{|\underline{x}|^{m-s+|j|+1+n}} & \text{si } |j|+1 \text{ impar,} \\ \\ \displaystyle\sum_{n-impar}^{|j|+2} \frac{P_n(\underline{x})}{|\underline{x}|^{m-s+|j|+1+n}} & \text{si } |j|+1 \text{ par} \end{cases}$$

con lo que se demuestra (3.7). En el segundo caso de (3.5), o sea, cuando m es impar y s par o cuando m es par, s par y $s < m$ se tiene

$$\begin{aligned}
\partial_{x_{i_1}} E_{s-1}(\underline{x}) &= \frac{P_1(\underline{x})}{|\underline{x}|^{m-s+2}} \\
\partial_{x_{i_2}} \partial_{x_{i_1}} E_{s-1}(\underline{x}) &= \frac{P_0(\underline{x})}{|\underline{x}|^{m-s+2}} + \frac{P_2(\underline{x})}{|\underline{x}|^{m-s+4}} \\
\partial_{x_{i_3}} \ldots \partial_{x_{i_1}} E_{s-1}(\underline{x}) &= \frac{P_1(\underline{x})}{|\underline{x}|^{m-s+4}} + \frac{P_3(\underline{x})}{|\underline{x}|^{m-s+6}},
\end{aligned}$$

y así sucesivamente

$$\partial_{x_{i_{|j|}}} \dots \partial_{x_{i_1}} E_{s-1}(\underline{x}) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n-impar}^{|j|} \frac{P_n(\underline{x})}{|\underline{x}|^{m-s+|j|+n}} & \text{si } |j| \text{ impar,} \\ \\ \displaystyle\sum_{n-par}^{|j|} \frac{P_n(\underline{x})}{|\underline{x}|^{m-s+|j|+n}} & \text{si } |j| \text{ par.} \end{cases} \tag{3.8}$$

De manera análoga al caso anterior, esta fórmula se puede probar por inducción completa. Por último se verá el tercer caso de (3.5), que es cuando m es par y $s \geq m$. Para simplificar la notación, sea $N = s - m$. Así,

$$\begin{aligned} \partial_{x_{i_1}} E_{s-1}(\underline{x}) &= P_{N-1}(\underline{x})\big(\log|\underline{x}| + A(m,s)\big) + \frac{P_{N+1}(\underline{x})}{|\underline{x}|^2} \\ \partial_{x_{i_2}}\partial_{x_{i_1}} E_{s-1}(\underline{x}) &= P_{N-2}(\underline{x})\big(\log|\underline{x}| + A(m,s)\big) + \\ &\quad + \frac{P_N(\underline{x})}{|\underline{x}|^2} + \frac{P_{N+2}(\underline{x})}{|\underline{x}|^4} \\ \partial_{x_{i_3}} \dots \partial_{x_{i_1}} E_{s-1}(\underline{x}) &= P_{N-3}(\underline{x})\big(\log|\underline{x}| + A(m,s)\big) + \frac{P_{N-1}(\underline{x})}{|\underline{x}|^2} + \\ &\quad + \frac{P_{N+1}(\underline{x})}{|\underline{x}|^4} + \frac{P_{N+3}(\underline{x})}{|\underline{x}|^6}. \end{aligned}$$

En la derivación $|j|-$ésima, siempre que $|j| \leq N$, quedará

$$\begin{aligned} \partial_{x_{i_{|j|}}} \dots \partial_{x_{i_1}} E_{s-1}(\underline{x}) = P_{N-|j|}(\underline{x})\big(\log|\underline{x}| + A(m,s)\big) + \\ + \sum_{2 \leq n-par}^{N+|j|} \frac{P_{N-|j|+n}(\underline{x})}{|\underline{x}|^n}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

De donde sigue que,

$$\begin{aligned} \partial_{x_{i_{N+1}}} E_{s-1}(\underline{x}) &= \sum_{n-impar}^{2N+1} \frac{P_n(\underline{x})}{|\underline{x}|^{n+1}} \\ \partial_{x_{i_{N+2}}}\partial_{x_{i_{N+1}}} E_{s-1}(\underline{x}) &= \sum_{n-par}^{2N+2} \frac{P_n(\underline{x})}{|\underline{x}|^{n+2}} \\ \partial_{x_{i_{N+3}}} \dots \partial_{x_{i_{N+1}}} E_{s-1}(\underline{x}) &= \sum_{n-impar}^{2N+3} \frac{P_n(\underline{x})}{|\underline{x}|^{n+3}}. \end{aligned}$$

Y así sucesivamente, se arriba a la fórmula

$$\partial_{x_{i_{N+|j|}}} E_{s-1}(\underline{x}) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n-impar}^{2N+|j|} \frac{P_n(\underline{x})}{|\underline{x}|^{|j|+n}} & \text{si } |j| \text{ impar,} \\ \\ \displaystyle\sum_{n-par}^{2N+|j|} \frac{P_n(\underline{x})}{|\underline{x}|^{|j|+n}} & \text{si } |j| \text{ par,} \end{cases} \tag{3.10}$$

para cada $|j| \geq 1$. Nuevamente, esta fórmula puede probarse por inducción completa sobre $|j|$. Combinando las fórmulas (3.7)-(3.10) se verifica la afirmación. $\square$

Note que la Definición 3.5 es consistente con la ofrecida previamente.

Teorema 3.1.2. *Sea $f \in \mathcal{L}ip(k+\alpha,\Gamma)$. Entonces $\mathbb{S}_k(\mathcal{L}ip(k+\alpha,\Gamma)) \subset \mathcal{L}ip(k+\alpha,\Gamma)$.*

Demostración. La relación 1.1 se puede escribir compactamente por $f(\underline{y}) = P(\underline{y},\underline{\zeta}) + R(\underline{y},\underline{\zeta})$, donde $P(\underline{y},\underline{\zeta}) = \displaystyle\sum_{|l|\leq k} \frac{f^{(l)}(\underline{\zeta})}{l!}(\underline{y}-\underline{\zeta})^l$ es un polinomio en $\underline{y}$ de grado k, por lo que será una función $(k+1)$-monogénica en $\mathbb{R}^m$. Luego sus valores límites se calculan fácilmente, $\mathcal{C}_k^+[P(.,\underline{\zeta})](\underline{\zeta}) = P(\underline{\zeta},\underline{\zeta}) = f(\underline{\zeta})$ y $\mathcal{C}_k^-[P(.,\underline{\zeta})](\underline{\zeta}) = 0$. Consecuentemente se tendrá que $\mathbb{S}_k f(\underline{\zeta}) = \mathbb{S}_k[f - P(.,\underline{\zeta})](\underline{\zeta}) + \mathbb{S}_k[P(.,\underline{\zeta})](\underline{\zeta})$, o sea, $\mathbb{S}_k f(\underline{\zeta}) = \mathbb{S}_k[R(.,\underline{\zeta})](\underline{\zeta}) + f(\underline{\zeta})$. De aquí que resulte suficiente verificar que dada $f \in \mathcal{L}ip(k+\alpha,\Gamma)$ se cumple

$$\widehat{f}(\underline{x}) = \sum_{s=0}^{k} \int_\Gamma (-1)^s E_s(\underline{\zeta}-\underline{x})\eta(\underline{\zeta})\partial_{\underline{\zeta}}^s R(\underline{\zeta},\underline{y})d\underline{\zeta} \in \mathcal{L}ip(k+\alpha,\Gamma).$$

Para ello se considerarán las funciones

$$\widehat{f}^{(j)}(\underline{x}) = \sum_{s=0}^{k} \int_\Gamma (-1)^s E_s^{(j)}(\underline{\zeta}-\underline{x})\eta(\underline{\zeta})\partial_{\underline{\zeta}}^s R(\underline{\zeta},\underline{y})d\underline{\zeta},$$

donde los $E_s^{(j)}(\underline{\zeta}-\underline{x})$ están dados por (3.6). Seguidamente se probará que $\widehat{f}$ es de clase $\mathcal{L}ip(k+\alpha,\Gamma)$ junto con las $\widehat{f}^{(j)}, |j| \leq k$. Para ello se deberá probar en primer lugar que dichas funciones están acotadas. Nótese que estas integrales singulares serán convergentes (y por tanto acotadas) si y solo si la integral sobre $\Gamma_1 = B_r(\underline{x})$

tiende a cero. En efecto, como consecuencia de la Proposición 3.1.1, se tiene que $|E_s^{(j)}(\underline{x})| \leq \frac{c}{|\underline{x}|^{m-s-1+|j|}}$. Luego, si $\underline{\zeta} \in \Gamma_1$ la relación $|\underline{\zeta} - \underline{x}| \leq r$ implica

$$\begin{aligned} \Big\| \int_{\Gamma_1} E_s^{(j)}(\underline{\zeta} - \underline{x})\eta(\underline{\zeta})\partial_{\underline{\zeta}}^s R(\underline{\zeta}, \underline{x}) d\underline{\zeta} \Big\| &\leq c|\underline{y} - \underline{x}|^{k-|j|} \int_{\Gamma_1} \frac{d\underline{\zeta}}{|\underline{\zeta} - \underline{x}|^{m-1-\alpha}} \\ &\leq c|\underline{y} - \underline{x}|^{k-|j|+\alpha}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

que claramente tiende a cero cuando $r \to 0$. Resta entonces estimar el valor absoluto de la diferencia

$$R_j[\widehat{f}](\underline{x}, \underline{y}) := \widehat{f}^{(j)}(\underline{x}) - \widehat{f}^{(j)}(\underline{y}) - \sum_{0<|l|\leq k-|j|} \frac{\widehat{f}^{(j+l)}(\underline{y})}{l!}(\underline{x} - \underline{y})^l.$$

Es decir,

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{k}(-1)^s \Big\{ \int_{\Gamma} E_s^{(j)}(\underline{\zeta} - \underline{x})\eta(\underline{\zeta})\partial_{\underline{\zeta}}^s R(\underline{\zeta}, \underline{x}) d\underline{\zeta} - \int_{\Gamma} E_s^{(j)}(\underline{\zeta} - \underline{y})\eta(\underline{\zeta})\partial_{\underline{\zeta}}^s R(\underline{\zeta}, \underline{y}) d\underline{\zeta} \\ - \sum_{0<|l|\leq k-|j|} \Big(\int_{\Gamma} E_s^{(j+l)}(\underline{\zeta} - \underline{y})\eta(\underline{\zeta})\partial_{\underline{\zeta}}^s R(\underline{\zeta}, \underline{y}) d\underline{\zeta} \Big) \frac{(\underline{x} - \underline{y})^l}{l!} \Big\}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

La integración se dividirá en los subconjuntos disjuntos $\Gamma_1 = B_r(\underline{x})$, $\Gamma_2 = B_r(\underline{y})$ y $\Gamma_3 = \Gamma \setminus \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ (véase la Figura 3.1.1).

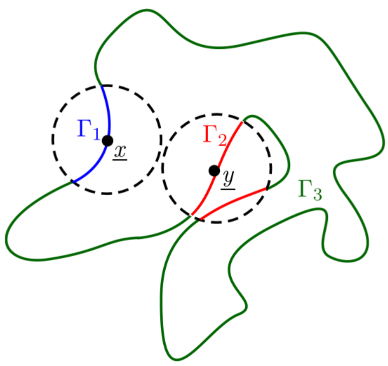

Figura 3.1.1: División de Γ.

De (3.11) se sigue que la primera integral de (3.12) satisface que su norma es menor o igual que $c|\underline{y} - \underline{x}|^{k-|j|+\alpha}$. Por otro lado, si $\underline{\zeta} \in \Gamma_2$, las relaciones $|\underline{\zeta} - \underline{x}| \leq |\underline{\zeta} - \underline{y}| +$

$|\underline{y}-\underline{x}| \leq 3r$ y $|\underline{\zeta}-\underline{x}| \geq r$ implican

$$\Big\| \int_{\Gamma_2} E_s^{(j)}(\underline{\zeta}-\underline{x})\eta(\underline{\zeta})\partial_{\underline{\zeta}}^s R(\underline{\zeta},\underline{x})d\underline{\zeta}\Big\| \leq c\frac{|\underline{y}-\underline{x}|^{k+\alpha}}{|\underline{y}-\underline{x}|^{m-1+|j|}}\int_{\Gamma_2} d\underline{\zeta} \leq c|\underline{y}-\underline{x}|^{k-|j|+\alpha}.$$

De modo análogo se acotan los otros dos sumandos, por lo que será suficiente encontrar esta estimación sobre Γ_3.

$$\begin{aligned} I_3(\underline{x},\underline{y}) &= \sum_{s=0}^{k}(-1)^s\Big\{\int_{\Gamma_3} E_s^{(j)}(\underline{\zeta}-\underline{x})\eta(\underline{\zeta})\partial_{\underline{\zeta}}^s R(\underline{\zeta},\underline{x})d\underline{\zeta} - \int_{\Gamma_3} E_s^{(j)}(\underline{\zeta}-\underline{y})\eta(\underline{\zeta})\partial_{\underline{\zeta}}^s R(\underline{\zeta},\underline{y})d\underline{\zeta} \\ &\quad - \sum_{0<|l|\leq k-|j|}\Big(\int_{\Gamma_3} E_s^{(j+l)}(\underline{\zeta}-\underline{y})\eta(\underline{\zeta})\partial_{\underline{\zeta}}^s R(\underline{\zeta},\underline{y})d\underline{\zeta}\Big)\frac{(\underline{x}-\underline{y})^l}{l!}\Big\}. \end{aligned}$$

Usando la identidad $R_0(\underline{\zeta},\underline{x}) = R_0(\underline{\zeta},\underline{y}) - \sum_{|l|\leq k}\frac{R_l(\underline{x},\underline{y})}{l!}(\underline{\zeta}-\underline{x})^l$, se tendrá

$$\begin{aligned} I_3(\underline{x},\underline{y}) &= \sum_{s=0}^{k}(-1)^s\Big\{\int_{\Gamma_3} E_s^{(j)}(\underline{\zeta}-\underline{x})\eta(\underline{\zeta})\partial_{\underline{\zeta}}^s R(\underline{\zeta},\underline{y})d\underline{\zeta} - \\ &- \sum_{|l|\leq k}\Big(\int_{\Gamma_3} E_s^{(j)}(\underline{\zeta}-\underline{x})\eta(\underline{\zeta})\partial_{\underline{\zeta}}^s(\underline{\zeta}-\underline{x})^l d\underline{\zeta}\Big)\frac{R_l(\underline{x},\underline{y})}{l!} - \int_{\Gamma_3} E_s^{(j)}(\underline{\zeta}-\underline{y})\eta(\underline{\zeta})\partial_{\underline{\zeta}}^s R(\underline{\zeta},\underline{y})d\underline{\zeta} \\ &- \sum_{0<|l|\leq k-|j|}\Big(\int_{\Gamma_3} E_s^{(j+l)}(\underline{\zeta}-\underline{y})\eta(\underline{\zeta})\partial_{\underline{\zeta}}^s R(\underline{\zeta},\underline{y})d\underline{\zeta}\Big)\frac{(\underline{x}-\underline{y})^l}{l!}\Big\}. \end{aligned}$$

Al agrupar queda

$$\begin{aligned} I_3(\underline{x},\underline{y}) &= \sum_{s=0}^{k}(-1)^s\int_{\Gamma_3}\Big\{E_s^{(j)}(\underline{\zeta}-\underline{x}) - E_s^{(j)}(\underline{\zeta}-\underline{y}) - \\ &\quad - \sum_{0<|l|\leq k-|j|} E_s^{(j+l)}(\underline{\zeta}-\underline{y})\frac{(\underline{x}-\underline{y})^l}{l!}\Big\}\eta(\underline{\zeta})\partial_{\underline{\zeta}}^s R(\underline{\zeta},\underline{y})d\underline{\zeta} - \\ &\quad - \sum_{|l|\leq k}\Big(\sum_{s=0}^{k}\int_{\Gamma_3} E_s^{(j)}(\underline{\zeta}-\underline{x})\eta(\underline{\zeta})\partial_{\underline{\zeta}}^s(\underline{\zeta}-\underline{x})^l d\underline{\zeta}\Big)\frac{R_l(\underline{x},\underline{y})}{l!}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Denótese por I_3^1 los dos primeros términos de (3.13), y por I_3^2 el último. Se comenzará por analizar I_3^2 y luego I_3^1. Para estimar $\left\|I_3^2\right\|$ será suficiente probar que

$$\left\|I_3^{2^*}\right\| := \left\|\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\int_{\Gamma_3} E_s^{(j)}(\underline{\zeta}-\underline{x})\eta(\underline{\zeta})\partial_{\underline{\zeta}}^s(\underline{\zeta}-\underline{x})^l d\underline{\zeta}\right\| \leq c|\underline{x}-\underline{y}|^{|l|-|j|}, \tag{3.14}$$

para lo cual se usará inducción completa en $|j|$. Si $|j|=0$ claramente

$$\int_{\Gamma_3} E_s^{(j)}(\underline{\zeta}-\underline{x})\eta(\underline{\zeta})\partial_{\underline{\zeta}}^s(\underline{\zeta}-\underline{x})^l d\underline{\zeta} \;=\; \int_{\Gamma_3} E_s(\underline{\zeta}-\underline{x})\eta(\underline{\zeta})\partial_{\underline{\zeta}}^s(\underline{\zeta}-\underline{x})^l d\underline{\zeta}.$$

Ahora, en $\Omega^* := \Omega_+ \setminus B_r(\underline{x}) \cup B_r(\underline{y})$, la función $h(\underline{\zeta}) = (\underline{\zeta}-\underline{x})^l$ es $(k+1)-$monogénica (véase Figura 3.1.2).

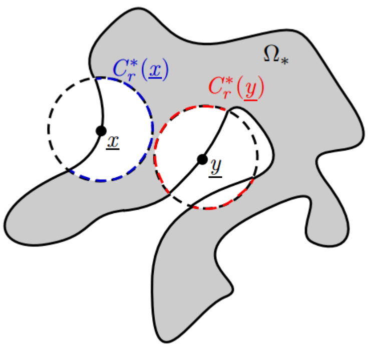

Figura 3.1.2: Región Ω^*.

Luego, de la Fórmula de Cauchy ($\underline{x} \in \overline{\Omega}_*^{\,c}$)

$$\sum_{s=0}^{k}\int_{\partial\Omega_*}(-1)^s E_s(\underline{\zeta}-\underline{x})\eta(\underline{\zeta})\partial_{\underline{\zeta}}^s h(\underline{\zeta})d\underline{\zeta} = \begin{cases} h(\underline{x}), & \underline{x}\in\Omega_* \\ 0, & \underline{x}\in\overline{\Omega}_*^{\,c}. \end{cases}$$

se obtiene

$$\sum_{s=0}^{k}\int_{\Gamma_3}(-1)^s E_s(\underline{\zeta}-\underline{x})\eta(\underline{\zeta})\partial_{\underline{\zeta}}^s(\underline{\zeta}-\underline{x})^l d\underline{\zeta} = -\sum_{s=0}^{k}\int_{C_*}(-1)^s E_s(\underline{\zeta}-\underline{x})\eta(\underline{\zeta})\partial_{\underline{\zeta}}^s(\underline{\zeta}-\underline{x})^l d\underline{\zeta},$$

donde $C_* = C_r^*(\underline{x}) \cup C_r^*(\underline{y})$. Entonces,

$$\Big\| \int\limits_{C_r^*(\underline{x})} E_s(\underline{\zeta}-\underline{x})\eta(\underline{\zeta})\partial_{\underline{\zeta}}^s(\underline{\zeta}-\underline{x})^l d\underline{\zeta}\Big\| \;\leq\; c \int\limits_{C_r^*(\underline{x})} \frac{|\underline{\zeta}-\underline{x}|^{|l|-s}}{|\underline{\zeta}-\underline{x}|^{m-1-s}} d\underline{\zeta} \leq c|\underline{y}-\underline{x}|^{|l|}.$$

Como además $|\underline{\zeta}-\underline{x}| \geq r$ para $\underline{\zeta} \in C_r^*(\underline{y})$ y $|\underline{\zeta}-\underline{x}| \leq |\underline{\zeta}-\underline{y}| + |\underline{y}-\underline{x}| = 3r$,

$$\Big\| \int\limits_{C_r^*(\underline{y})} E_s(\underline{\zeta}-\underline{x})\eta(\underline{\zeta})\partial_{\underline{\zeta}}^s(\underline{\zeta}-\underline{x})^l d\underline{\zeta}\Big\| \;\leq\; c \int\limits_{C_r^*(\underline{y})} \frac{|\underline{y}-\underline{x}|^{|l|-s}}{|\underline{y}-\underline{x}|^{m-1-s}} d\underline{\zeta} \leq c|\underline{y}-\underline{x}|^{|l|} \quad (3.15)$$

con lo que resulta la validez de (3.14) para $|j| = 0$ (inicio de la inducción). Supóngase entonces que se cumple la desigualdad (3.14) hasta $|j| = p$. Sea ahora $|j| = p+1$. De la fórmula:

$$\partial_{\underline{x}}^{(j)}[FG] = \sum_{(i)\leq(j)} \binom{j}{i} [\partial_{\underline{x}}^{(i)} F][\partial_{\underline{x}}^{(j)-(i)} G],$$

se tendrá que

$$\begin{aligned} I_3^{2^*} \;=\; & \sum_{s=0}^{k}(-1)^s \int\limits_{\Gamma_3} \partial_{\underline{x}}^{(j)}[E_s(\underline{\zeta}-\underline{x})\eta(\underline{\zeta})\partial_{\underline{\zeta}}^s(\underline{\zeta}-\underline{x})^l] d\underline{\zeta} - \\ & - \sum_{s=0}^{k}(-1)^s \sum_{\substack{(i)\leq(j)\\ i\neq j}} \binom{j}{i} \int\limits_{\Gamma_3} \partial_{\underline{x}}^{(i)} E_s(\underline{\zeta}-\underline{x})\eta(\underline{\zeta})\partial_{\underline{x}}^{(j)-(i)}[\partial_{\underline{\zeta}}^s(\underline{\zeta}-\underline{x})^l] d\underline{\zeta}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Utilizando en el segundo sumando anterior que

$$\partial_{\underline{x}}^{(j)}(\underline{\zeta}-\underline{x})^l = \begin{cases} c(l,j)(\underline{\zeta}-\underline{x})^L & \text{si } (j) \geq (l) \\ 0 & \text{si } (j) \leq (l) \wedge n \neq l, \end{cases} \quad (3.17)$$

donde $c(l,j) = (-1)^{|j|} l_m(l_m-1)\ldots(l_m-j_m+1)\ldots l_1(l_1-1)\ldots(l_1-j_1+1)$ y $L = l-j$, resulta

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=0}^{k}(-1)^s \sum_{\substack{(i)\leq(j)\\ i\neq j}} \binom{j}{i} \int_{\Gamma_3} \partial_{\underline{x}}^{(i)} E_s(\underline{\zeta}-\underline{x})\eta(\underline{\zeta})\partial_{\underline{x}}^{(j)-(i)}[\partial_{\underline{\zeta}}^{s}(\underline{\zeta}-\underline{x})^l]d\underline{\zeta}\\
&= \sum_{s=0}^{k}(-1)^s \sum_{\substack{(i)\leq(j)\\ i\neq j}} \binom{j}{i} \int_{\Gamma_3} \partial_{\underline{x}}^{(i)} E_s(\underline{\zeta}-\underline{x})\eta(\underline{\zeta})\partial_{\underline{\zeta}}^{s}[\partial_{\underline{x}}^{(j)-(i)}(\underline{\zeta}-\underline{x})^l]d\underline{\zeta}\\
&= \sum_{\substack{(i)\leq(j)\\ i\neq j}} \binom{j}{i} c(i,j,l)\Big(\sum_{s=0}^{k}(-1)^s \int_{\Gamma_3} \partial_{\underline{x}}^{(i)} E_s(\underline{\zeta}-\underline{x})\eta(\underline{\zeta})\partial_{\underline{\zeta}}^{s}(\underline{\zeta}-\underline{x})^L d\underline{\zeta}\Big).
\end{aligned}$$

Luego, como $(i) \leq (j)$, $|j| = |j|+1$ y $n \neq i$, será $|i| \leq |j|$ y por hipótesis de inducción queda estimado por $c|\underline{x}-\underline{y}|^{|L|}$ dicho sumando, o sea, por $c|\underline{x}-\underline{y}|^{|l|-|j|}$. Para el primer sumando de (3.16) se hace uso nuevamente de la Fórmula de Cauchy,

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=0}^{k}\int_{\Gamma_3}(-1)^s \partial_{\underline{x}}^{(j)}[E_s(\underline{\zeta}-\underline{x})\eta(\underline{\zeta})\partial_{\underline{\zeta}}^{s}(\underline{\zeta}-\underline{x})^l]d\underline{\zeta}\\
&= \partial_{\underline{x}}^{(j)}\sum_{s=0}^{k}(-1)^s \int_{\Gamma_3} E_s(\underline{\zeta}-\underline{x})\eta(\underline{\zeta})\partial_{\underline{\zeta}}^{s}(\underline{\zeta}-\underline{x})^l d\underline{\zeta}\\
&= -\partial_{\underline{x}}^{(j)}\sum_{s=0}^{k}(-1)^s \int_{C^*} E_s(\underline{\zeta}-\underline{x})\eta(\underline{\zeta})\partial_{\underline{\zeta}}^{s}(\underline{\zeta}-\underline{x})^l d\underline{\zeta}\\
&= -\sum_{s=0}^{k}(-1)^s \int_{C^*} \partial_{\underline{x}}^{(j)}[E_s(\underline{\zeta}-\underline{x})\eta(\underline{\zeta})\partial_{\underline{\zeta}}^{s}(\underline{\zeta}-\underline{x})^l]d\underline{\zeta}
\end{aligned}$$

donde $C_* = C_r^*(\underline{x}) \cup C_r^*(\underline{y})$. Al usar otra vez la fórmula para la derivada multiíndice del producto resulta

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=0}^{k}(-1)^s \int_{C^*} \partial_{\underline{x}}^{(j)}[E_s(\underline{\zeta}-\underline{x})\eta(\underline{\zeta})\partial_{\underline{\zeta}}^{s}(\underline{\zeta}-\underline{x})^l]d\underline{\zeta}\\
=\;& \sum_{s=0}^{k}(-1)^s \sum_{(i)\leq(j)} \binom{j}{i} \int_{C^*} \partial_{\underline{x}}^{(i)}[E_s(\underline{\zeta}-\underline{x})\eta(\underline{\zeta})]\partial_{\underline{x}}^{(j)-(i)}[\partial_{\underline{\zeta}}^{s}(\underline{\zeta}-\underline{x})^l]d\underline{\zeta}\\
=\;& c(i,j,l)\sum_{s=0}^{k}(-1)^s \sum_{(i)\leq(j)} \binom{j}{i} \int_{C^*} \partial_{\underline{x}}^{(i)} E_s(\underline{\zeta}-\underline{x})\eta(\underline{\zeta})\partial_{\underline{\zeta}}^{s}(\underline{\zeta}-\underline{x})^L d\underline{\zeta}.
\end{aligned}$$

Se estima la integral en $C_r^*(\underline{x})$

$$\begin{aligned}\Big|\int_{C_r^*(\underline{x})} \partial_{\underline{x}}^{(i)} E_s(\underline{\zeta}-\underline{x})\eta(\underline{\zeta})\partial_{\underline{\zeta}}^{s}(\underline{\zeta}-\underline{x})^L d\underline{\zeta}\Big| &\leq c\int_{C_r^*(\underline{x})} \frac{|\underline{\zeta}-\underline{x}|^{|L|-s}}{|\underline{\zeta}-\underline{x}|^{m-1-s+|i|}} d\underline{\zeta} \\ &\leq c|\underline{x}-\underline{y}|^{|l|-|j|}.\end{aligned}$$

Análogamente $\Big\|\int_{C_r^*(\underline{y})} \partial_{\underline{x}}^{(j)} E_s(\underline{\zeta}-\underline{x})\eta(\underline{\zeta})\partial_{\underline{\zeta}}^{s}(\underline{\zeta}-\underline{x})^l d\underline{\zeta}\Big\| \leq c|\underline{x}-\underline{y}|^{|l|-|j|}$, con lo que queda probada la hipótesis $|I_3^{2^*}| \leq c|\underline{x}-\underline{y}|^{|l|-|j|}$. Resta verificar tal cota para $\left\|I_3^1\right\|$. En este caso, la integración sobre Γ_3 de

$$\begin{aligned} I_3^1(\underline{x},\underline{y}) &= \sum_{s=0}^{k}(-1)^s \int_{\Gamma_3} \Big\{\partial_{\underline{x}}^{(j)} E_s(\underline{\zeta}-\underline{x}) - \partial_{\underline{y}}^{(j)} E_s(\underline{\zeta}-\underline{y}) - \\ &\quad - \sum_{0<|l|\leq k-|j|} \partial_{\underline{y}}^{(j+l)} E_s(\underline{\zeta}-\underline{y})\frac{(\underline{x}-\underline{y})^l}{l!}\Big\}\eta(\underline{\zeta})\partial_{\underline{\zeta}}^{s} R(\underline{\zeta},\underline{y})d\underline{\zeta}\end{aligned}$$

se dividirá a su vez en tres subconjuntos disjuntos. Para ello se traza una bola de radio $3r$ y otra de radio $4r$ con centro en $\underline{x}$. Denótese por Γ_3^1 el tramo de Γ_3 comprendido en la bola $B_{3r}(\underline{x})$, por Γ_3^2 el comprendido en el anillo $3r \leq |\underline{z}-\underline{x}| \leq 4r$ y por Γ_3^3 el tramo restante (véase la Figura 3.1.3).

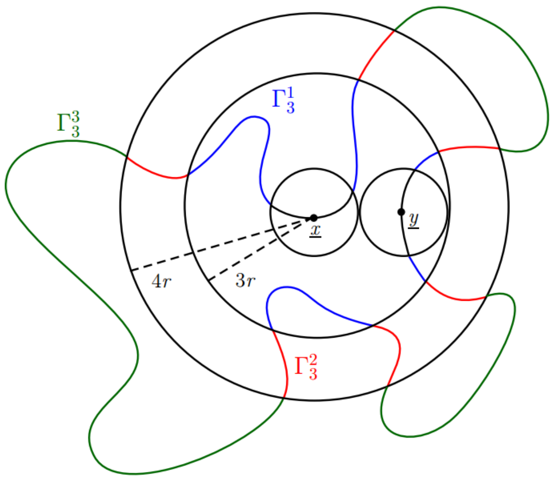

Figura 3.1.3: División de Γ_3.

Para $\underline{\zeta} \in \Gamma_3^1$ se verifica $r \leq |\underline{\zeta} - \underline{x}| \leq 3r$ y $r \leq |\underline{\zeta} - \underline{y}| \leq 5r$, por tanto

$$\Big\| \int\limits_{\Gamma_3^1} \Big\{ \partial_{\underline{x}}^{(j)} E_s(\underline{\zeta} - \underline{x}) - \partial_{\underline{y}}^{(j)} E_s(\underline{\zeta} - \underline{y}) -$$

$$- \sum_{0<|l|\leq k-|j|} \partial_{\underline{y}}^{(j+l)} E_s(\underline{\zeta} - \underline{y}) \frac{(\underline{x} - \underline{y})^l}{l!} \Big\} \eta(\underline{\zeta}) \partial_{\underline{\zeta}}^s R(\underline{\zeta}, \underline{y}) d\underline{\zeta} \Big\| \leq c |\underline{y} - \underline{x}|^{k+\alpha-|j|}.$$

De forma análoga, verificando que en Γ_3^2 las desigualdades $3r \leq |\underline{\zeta} - \underline{x}| \leq 4r$ y $r \leq |\underline{\zeta} - \underline{y}| \leq 6r$ son válidas, se obtiene la misma estimación. Consecuentemente, resta analizar la integración en Γ_3^3. Para ello se hace uso del siguiente resultado del Análisis Matemático, para más detalles el lector puede remitirse a [45, p.17].

Teorema 3.1.3. *Sea $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definida y continuamente diferenciable hasta el orden $\kappa \geq 1$ en cierto dominio G. Entonces, para cada y que esté en un δ-entorno V_δ de x, o sea, tal que $|x - y| \leq \delta$, es válida la fórmula*

$$f(x) - f(y) = \sum_{|l|=1}^{\kappa-1} \frac{1}{|l|!} \partial_y^{(l)} f(y)(x - y)^l + r_{\kappa-1}(x, y),$$

donde

$$r_{\kappa-1}(x, y) = \frac{1}{\kappa!} \partial_y^{(l)} f(y), |l| = \kappa.$$

Además, si existe $M > 0$ tal que para cada $|l| = \kappa$ se cumple $\left| \partial_y^{(l)} f(y) \right| \leq M,$ en V_δ, entonces se verifica la desigualdad

$$|r_{\kappa-1}(x, y)| \leq \frac{M m^\kappa \delta^\kappa}{\kappa!}.$$

Para $\underline{\zeta} \in \Gamma_3^3$ la función $\partial_{\underline{x}}^{(j)} E_s(\underline{\zeta} - \underline{x})$ se comporta como una función en la variable $\underline{x}$ la cual es continuamente diferenciable hasta cualquier orden en cualquier punto de $B_{3r}(\underline{x})$, o sea, es de clase $\mathbf{C}^\infty(B_{3r}(\underline{x}))$. Además, para $\underline{z} \in B_{3r}(\underline{x})$ es claro que $|\underline{\zeta} - \underline{z}| \geq r$ y $|\underline{z} - \underline{x}| \leq 3r$, por tanto $|\underline{\zeta} - \underline{x}| \leq |\underline{\zeta} - \underline{z}| + |\underline{z} - \underline{x}| \leq |\underline{\zeta} - \underline{z}| + 3r \leq 4|\underline{\zeta} - \underline{z}|$, de modo que en este dominio todas sus derivadas de orden $\kappa = k+1-|j|$ verifican

$$M := \max_{\underline{z}\in B_{3r}(\underline{x})} |\partial^{(l)}[\partial_{\underline{x}}^{(j)} E_s(\underline{\zeta}-\underline{z})]| \leq \max_{\underline{z}\in B_{3r}(\underline{x})} \frac{c(m,s)}{|\underline{\zeta}-\underline{z}|^{m-s-1+k}} \leq \frac{c(m,s)}{|\underline{\zeta}-\underline{x}|^{m-s+k}}.$$

Luego, en virtud del Teorema 3.1.3, el resto

$$r_{\kappa-1} = E_s^{(j)}(\underline{\zeta}-\underline{x}) - E_s^{(j)}(\underline{\zeta}-\underline{y}) - \sum_{0<|l|\leq k-|j|} E_s^{(j+l)}(\underline{\zeta}-\underline{y})\frac{(\underline{x}-\underline{y})^l}{l!}$$

satisfará $|r_{\kappa-1}| \leq c(m,k,|j|)Mr^{\kappa}$, es decir

$$\Big\| E_s^{(j)}(\underline{\zeta}-\underline{x}) - E_s^{(j)}(\underline{\zeta}-\underline{y}) - \sum_{0<|l|\leq k-|j|} E_s^{(j+l)}(\underline{\zeta}-\underline{y})\frac{(\underline{x}-\underline{y})^l}{l!}\Big\| \leq c\frac{|\underline{x}-\underline{y}|^{k+1-|j|}}{|\underline{\zeta}-\underline{x}|^{m-s+k}}.$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned}\Big\|\int_{\Gamma_3^3} \Big\{E_s^{(j)}(\underline{\zeta}-\underline{x}) - E_s^{(j)}(\underline{\zeta}-\underline{y}) - \sum_{0<|l|\leq k-|j|} E_s^{(j+l)}(\underline{\zeta}-\underline{y})\frac{(\underline{x}-\underline{y})^l}{l!}\Big\}\eta(\underline{\zeta})\partial_{\underline{\zeta}}^s R(\underline{\zeta},\underline{y})d\underline{\zeta}\Big\| \\ \leq c|\underline{x}-\underline{y}|^{k+1-|j|}\int_{\Gamma_3^3} \frac{|\underline{\zeta}-\underline{y}|^{k-s+\alpha}}{|\underline{\zeta}-\underline{x}|^{m-s+k}}d\underline{\zeta},\ c = c(m,k,|j|,s).\end{aligned}$$

Pero si $\underline{\zeta}\in\Gamma_3^3$ entonces $|\underline{\zeta}-\underline{x}| \geq 4r$, y como $|\underline{x}-\underline{y}| = 2r$, resulta que

$$|\underline{\zeta}-\underline{y}| \leq |\underline{\zeta}-\underline{x}| + |\underline{x}-\underline{y}| \leq 3/2|\underline{\zeta}-\underline{x}|,$$

por tanto

$$\begin{aligned}\Big\|\int_{\Gamma_3^3} \Big\{E_s^{(j)}(\underline{\zeta}-\underline{x}) - E_s^{(j)}(\underline{\zeta}-\underline{y}) - \sum_{0<|l|\leq k-|j|} E_s^{(j+l)}(\underline{\zeta}-\underline{y})\frac{(\underline{x}-\underline{y})^l}{l!}\Big\}\eta(\underline{\zeta})\partial_{\underline{\zeta}}^s R(\underline{\zeta},\underline{y})d\underline{\zeta}\Big\| \\ \leq c|\underline{x}-\underline{y}|^{k+1-|j|}\int_{\Gamma_3^3} \frac{d\underline{\zeta}}{|\underline{\zeta}-\underline{x}|^{m-\alpha}} \leq c|\underline{x}-\underline{y}|^{k-|j|}\Big(|\underline{x}-\underline{y}|\int_{\Gamma\setminus\Gamma_1} \frac{d\underline{\zeta}}{|\underline{\zeta}-\underline{x}|^{m-\alpha}}\Big) \\ \leq c|\underline{x}-\underline{y}|^{k-|j|+\alpha}, c = (m,k,|j|,s),\end{aligned}$$

con lo que termina la demostración. $\square$

Conclusiones del capítulo

Es válido observar que la demostración desarrollada en la primera sección de este capítulo, o sea, la del caso particular de $f \in \mathcal{L}ip(1+\alpha, \Gamma)$, usa fuertemente el hecho de que E_1 es una función real. Esta propiedad en general no la satisfacen los otros núcleos E_s, con $s > 1$ (para s par, por ejemplo). Esto hizo que, en principio, no se pudiera extender el procedimiento utilizado al caso general. En la segunda sección se aprecia cómo esta dificultad es esquivada usando una vía más directa similar a la desarrollada en el Capítulo 2. El resultado fundamental obtenido consiste en la demostración de la invariancia de la clase de Lipschitz de orden superior bajo la acción del operador singular aquí definido. En otras palabras, se obtuvo un análogo del Teorema de Plemelj-Privalov asociado a la teoría de funciones polimonogénicas.

Conclusiones

La investigación desarrollada cumplió el objetivo planteado, obteniéndose concretamente los siguientes resultados:

- Definición de dos operadores integrales singulares sobre la clase de Lipschitz de exponente arbitrario asociados a la teoría de funciones polianalíticas y polimonogénicas respectivamente.
- Demostración de la invariancia de la clase de funciones de Lipschitz bajo la acción de ambos operadores.
- Estimación de la norma de los operadores asociados a la teoría de funciones polianalíticas y bimonogénicas.

Recomendaciones

Para dar continuidad y aplicar los resultados obtenidos se recomienda:

- Investigar si los operadores singulares aquí definidos son una involución, es decir, si $\mathcal{S}_k^2 = I$ donde I es el operador identidad (actuando sobre la clase de Lipschitz de orden superior).

- Estudiar la compacidad del conmutador $\mathcal{S}_k M - M\mathcal{S}_k$ asociado a los operadores estudiados, donde M denota a un operador de multiplicación.

- Establecer analogías a las fórmulas de Hilbert y de Poincaré-Beltrami sobre el círculo y la bola unitaria para los operadores estudiados en el contexto de las funciones polianalíticas y polimonogénicas.

- Explorar posibilidades de aplicación, especialmente en la teoría de funciones biarmónicas, que aparecen de manera especial en tópicos de la Teoría de la Elasticidad Lineal.

Referencias Bibliográficas

[1] L. D. Abreu. Sampling and interpolation in Bargmann-Fock spaces of polyanalytic functions. *Appl. Comp. Harm. Anal.*, 29:287–302, 2010. 6, 19

[2] L. D. Abreu, P. Balazs, M. de Gosson, and Z. Mouayn. Discrete coherent states for higher Landau levels. *Ann. Physics*, 363:337–353, 2015. 6, 19

[3] L. D. Abreu and H. G. Feichtinger. Function spaces of polyanalytic functions. *Pre-Publicações do Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra*, 2013. 6, 18

[4] L. D. Abreu and H. G. Feichtinger. Function spaces of polyanalytic functions. Harmonic and complex analysis and its applications. *Trends Math., Birkhäuser-Springer*, :1–38, 2014. 6, 18

[5] R. Abreu Blaya and J. Bory Reyes. Boundary value problems for quaternionic monogenic functions on non-smooth surfaces. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 9(1):1–22, 1999. 5

[6] R. Abreu Blaya and J. Bory Reyes. Invariant subspace for a singular integral operator on Ahlfors David surfaces. *Bull. Belg. Math. Soc.*, 8:673–683, 2001. 5

[7] R. Abreu Blaya and J. Bory Reyes. On the Riemann Hilbert type problems in Clifford analysis. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 11(1):15–26, 2001. 5

[8] R. Abreu Blaya and J. Bory Reyes. Weighted singular integral operators in Clifford analysis. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 25:1429–1440, 2002. 5

[9] R. Abreu Blaya and J. Bory Reyes. Hölder norm estimate for the Hilbert transform in Clifford analysis. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, 41(3):389–398, 2010. 78

[10] R. Abreu Blaya and J. Bory Reyes. The Plemelj-Privalov theorem in Variable Exponent Clifford Analysis. *Georgian Math. J*, 19(3):401–415, 2012. 5

[11] R. Abreu Blaya, J. Bory Reyes, and T. Moreno García. The Plemelj-Privalov theorem in Clifford Analysis. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, :223–226, 2009. 5

[12] R. Abreu Blaya, J. Bory Reyes, and M. Shapiro. On the notion of the Bochner-Martinelli integral for domains with rectifiable boundary. *Complex Anal. Oper. Theory*, 1:143–168, 2007. 5

[13] R. Abreu Blaya, J. Bory Reyes, and M. Shapiro. The Cauchy transform for the Hodge-De Rham system and some of its properties. *Georgian Math. J*, 14(1):1–20, 2007. 5

[14] R. Abreu Blaya, L. De la Cruz Toranzo, T. R. Gómez Santiesteban, Y. Ramírez Leyva, and J. Bory Reyes. Cauchy integral operators involving higher order Lipschitz classes in the poly-analytic function theory. *Bull Braz Math Soc, New Series*, 48: 253, 2017. 20

[15] R. Abreu Blaya, D. Peña Peña, and J. Bory Reyes. Clifford Cauchy type integrals on Ahlfors-David regular surfaces in $\mathbb{R}^{m+1}$. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 13(2):133–156, 2003. 5

[16] L. E. Andersson, T. Elfving, and G. H. Golub. Solution of biharmonic equations with application to radar imaging. *J Comput Appl Math*, 94(2):153–180, 1998. 6, 19

[17] A. A. Babaev and V. V. Salaev. On ananalogue of the Plemelj-Privalov theorem in the case of non smooth curves, and its applications. *Dokl. Akad. Nauk SSSR; English transl. in Soviet Math. Dokl. 6, 1965*, 161:267–269, 1965. 4

[18] M. Balk. On polyanalytic functions. *Akademie Verlag, Berlin*, 1991. 6, 18

[19] M. Balk. Polyanalytic functions and their generalizations. *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr.*, 85:187–246, 1991. 6, 18

[20] M. Balk and M. Zuev. On polyanalytic functions. *IOPscience*, 1969. 6, 19

[21] H. Begehr. Complex analytic methods for partial differential equations: An introductory text. *World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ*, 1994. 6, 19

[22] H. Begehr. Integral representations in Complex, Hypercomplex and Clifford Analysis. *Integral Transforms and Special Functions*, 13, 2002. 73

[23] F. Brackx, R. Delanghe, and F. Sommen. *Clifford Analysis*. Research Notes in Math., 76, Pitman, London., 1982. 5

[24] G. David. Opérateurs intégraux singuliers sur certaines courbes du plan complexe. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 4(17):157–189, 1984. 4

[25] N. A. Davydov. Continuity of an integral of Cauchy type on a closed domain. *Dokl. Akad. Nauk SSSR (Russian)*, 64:759–762, 1949. 3

[26] L. De la Cruz Toranzo, R. Abreu Blaya, and J. Bory Reyes. Singular integral operator involving higher order Lipschitz classes. *Mediterr. J. Math.*, 14:38, 2017. 7, 14, 28

[27] L. De la Cruz Toranzo, R. Abreu Blaya, and J. Bory Reyes. On the Plemelj-Privalov theorem in Clifford analysis involving higher order Lipschitz classes. *J. Math. Anal. Appl. (en revisión)*, 2018. 7, 8, 79

[28] L. De la Cruz Toranzo, R. Abreu Blaya, and J. Bory Reyes. The Plemelj-Privalov theorem in polyanalytic function theory. *J. Math. Anal. Appl.*, 463(2):517–533, 2018. 7, 35

[29] L. De la Cruz Toranzo, A. Moreno García, T. Moreno García, R. Abreu Blaya, and J. Bory Reyes. A bimonogenic Cauchy transform on higher order Lipschitz classes. *Mediterr. J. Math. (https://doi.org/10.1007/s00009-018-1280-z)*, 2019. 7, 8, 75

[30] J. Diebel. Representing attitude: Euler angles, unit quaternions, and rotation vectors. Stanford University, 2006. 5

[31] T. A. Ell, N. Le Bihan, and S. J. Sangwine. *Quaternion Fourier Transforms for Signal and Image Processing*. Digital signal and image processing series, 2014. 5

[32] F. D. Gájov. *Problemas de Contorno*. 1980. 26, 27, 28

[33] O. Gerus, B. Schneider, and M. Shapiro. On boundary properties of α-hyperholomorphic functions in domains of $\mathbb{R}^2$ with the piece-wise Liapunov boundary. *Progress in Analysis: Proceedings of the 3rd International ISAAC Congress, Berlin, Germany*, 1:375–382, 2003. 5

[34] Y. Grigor'ev. Quaternionic functions and their applications in a viscous fluid flow. *Complex Anal. Oper. Theory*, 12:491–508, 2018. 5

[35] K. Gürlebeck, K. Habetha, and W. Sprößig. *Holomorphic functions in the plane and n-dimensional space*. Birkhäuser Verlag AG, 2008. 5, 24

[36] K. Gürlebeck, K. Habetha, and W. Sprößig. *Application of Holomorphic Functions in Two and Higher Dimensions*. Birkhäuser., 2016. 5

[37] E. G. Guseĭnov. The Plemelj-Privalov theorem for generalized Hölder classes. *Russ. Acad. Sci. Sb. Math.*, 75:165, 1993. 4

[38] H. M. Hayrapetyan and A. R. Hayrapetyan. Boundary value problems in weighted spaces of polyanalytic functions in half-plane. *J. Contemp. Math. Anal.*, 47(1):1–15, 2012. 6, 18

[39] E. Hitzer and S. J. Sangwine, editors. *Quaternion and Clifford Fourier Transforms and Wavelets*. Trends in Mathematics, 2013. 5

[40] V. Iftimie. Fonctions hypercomplexes. *Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la R. S. Roumanie 9, 279-332*, 1965. 79

[41] V. V. Ivanov. Some properties of Cauchy type singular integrals and their applications. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 121(5):793–794, 1958. 4

[42] N. K. Karapetyants and A. Ginzburg. Fractional integrodifferentiation in Hölder classes of arbitrary order. *Georgian Math. J*, 2(2):141–150, 1995. 5

[43] V. Kokilashvili and S. Samko. Boundedness of maximal operators and potential operators on Carleson curves in Lebesgue spaces with variable exponent. *Acta Mathematica Sinica*, 24(11):1775–1800, 2008. 5

[44] G. Kolossov. Sur les problêms d'élasticité a deux dimensions. *C. R. Acad. Sci.*, 146:522–525, 1908. 6, 19

[45] L. Kudriatsev. *Curso de Análisis Matemático 2*. MIR, Moscú, 1984. 90

[46] M. C. Lai and H. C. Liu. Fast direct solver for the biharmonic equation on a disk and its application to incompressible flows. *Appl Math Comput*, 164(3):679–695, 2005. 6, 19

[47] L. G. Magnaradze. On a generalization of the Plemelj-Privalov theorem. *Soobshch. Akad. Nauk Gruzin. SSR*, 8:509–516, 1947. 4

[48] A. I. Markushevich. *Theory of functions of a complex variable*, volume 1. PRENTICE-HALL, INC, 1965. 1

[49] M. Y. Mazlov. The Dirichlet problem for polyanalytic functions. *Sb. Math. (Transl. from Mat. Sb. 200, 2009, no. 10, 59-80)*, 200(10):1473–1493, 2009. 6, 18

[50] E. J. McShane. Extensions of range of functions. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 40(12), 1934. 12

[51] N. Muskhelishvili. *Singular integral equations. Boundary problems of function theory and their application to mathematical physics*. Moscow-Leningrad, 1946; English transl. J. R. M. Radok (ed.), Groningen, 1953. 2, 3

[52] N. Muskhelishvili. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity: Fundamental equations, Plane Theory of elasticity, Torsion and bending (2nd Ed)*. Springer-Science+Business Media, B.V., 1977. 6, 19

[53] J. Plemelj. Ein erganzungssatz zur Cauchy'schen integraldarstellung analytisher funktionen, randwerte betreffend. *Monatsh. für Math. und Phys*, :205–210, 1908. 3

[54] J. Plemelj. Riemannian classes of functions with given monodromy group. *Monatsh. für Math. und Phys*, 19:211–246, 1908. 3

[55] J. Plemelj. Potentialtheoretische Untersuchungen. *Leipzig: B.G. Teubner, Preisschriften der fürstl. Jablonowskischen Gesellschaft in Leipzigries*, 40:XIX+100, 1911. 3

[56] J. Plemelj. *Problems in the sense of Rieman and Klein*, volume 16. Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, John Wiley & Sons, 1964. 3

[57] A. D. Polpitiya. Modeling the dynamics of oculomotor system in three dimensions. *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on decision and control*, 2003. 5

[58] I. Priwaloff. Sur les fonctions conjuguées. *Bull. Soc. Math. France*, 44(2):100–103, 1916. 3

[59] I. Priwaloff. Sur les intégrales du type de Cauchy. *C. R. (Dokl.) Acad. Sci. URSS*, :859–863, 1939. 3

[60] V. V. Salaev. Direct and inverse estimates for a singular Cauchy integral over a closed curve. *Mat. Zametki; English transl. in Math. Notes 19, 1976*, 19:365–380, 1976. 4

[61] V. V. Salaev, E. G. Guseĭnov, and R. K. Seĭfullaev. The Plemelj-Privalov theorem. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 315(4):790–793, 1990; English transl. in Soviet Math. Dokl. 42 (3), 849-852, 1991. 4

[62] T. S. Salimov. An inverse estimate for a Cauchy singular integral over a closed curve. *Studies of Linear Operators and Their Applications, Azerbaidzhan. Gos. Univ. , Baku*, :162–177, 1982. 4

[63] E. M. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions*. 1970. 6, 12, 13, 14, 17

[64] H. Whitney. Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 36:63–89, 1934. 6, 12

[65] A. Zygmund. Sur le module de continuité de la somme de la série de Fourier. *Prace Mat.-Fiz. (Polish; French summary)*, 33:125–132, 1923. 4