Universidad de Holguín
FACULTAD INFORMÁTICA MATEMÁTICA
DPTO. LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

TRABAJO DE DIPLOMA

Sobre las funciones (ϕ, ψ)-inframonogénicas y el sistema generalizado de Lamé-Navier

Tesis presentada en opción al título de Licenciado en Matemáticas

Autor: Daniel Alfonso Santiesteban
Tutor: Dr.Cs. Ricardo Abreu Blaya

Holguín, 2018

Dedicado a...

Todos aquellos que logran apreciar y valorar el esfuerzo de ser matemático

AGRADECIMIENTOS

Agradecer primeramente a Dios por darme la extraordinaria oportunidad de cursar estos cuatro años de estudios constantes y satisfactorios en esta maravillosa universidad, y entablar así excelentes amistades con sus profesores y estudiantes.

También un gran y enorme “gracias“ a mi tutor Dr.Cs. Ricardo Abreu Blaya por aceptarme en su grupo científico de Análisis Complejo, por su profesionalidad, y por su ayuda incondicional. Agradecer además a la profesora Dr.C. Rosa Isabel Urquiza Salgado por su ayuda en la Metodología de la Investigación. También agradecer a la profesora M.Sc. Lianet De la Cruz Toranzo por sus necesarios consejos.

Agradecer, por supuesto, a la gran familia que poseo, que me ha apoyado en todos los momentos, y a los que no están que confiaron siempre en mí.

Y a todos mis profesores y amigos que son inigualables y envidiables de tener.

RESUMEN

Un campo tridimensional en movimiento en un sólido elástico, lineal, isótropo y homogéneo sin fuerzas de volumen es descrito por el sistema de Lamé-Navier. Este trabajo se enmarca dentro del campo de las Matemáticas Puras en la disciplina de Análisis Complejo, en el estudio de soluciones de una generalización del sistema de Lamé-Navier mediante operadores de Dirac. Primeramente se abordan temas preliminares del Análisis de Clifford; necesarios para la comprensión de los resultados siguientes. Posteriormente se desarrolla el estudio de las funciones (ϕ, ψ)-inframonogénicas, donde se arriba a resultados característicos sobre estas funciones y operadores utilizados. Para culminar se trata el estudio del sistema generalizado de Lamé-Navier, llegando a resultados particulares para describir la forma de sus soluciones y se construyen soluciones a partir de una función determinada. Durante el desarrollo de este trabajo se demostró que las soluciones del sistema estudiado bajo ciertas condiciones poseen estructuras específicas. Marca importancia porque revela el uso de las Matemáticas Puras en el ámbito de la Teoría de la Elasticidad. Además, se obtienen resultados preliminares en la búsqueda de una posible fórmula de representación para las funciones (ϕ, ψ)-inframonogénicas, lo cual es relevante en el Análisis de Clifford; y se inicia el estudio de la descomposición de Almansi para esta clase de funciones.

Palabras Clave: Análisis de Clifford, funciones inframonogénicas, sistema de Lamé-Navier, Teoría de la Elásticidad.

ABSTRACT

A three-dimensional displacement field in a homogeneous isotropic linear elastic material without volume force is described by Lamé-Navier system. This work framed in the field of the Pure Mathematics in the discipline of Complex Analysis, in the study of solutions of a generalization of by Lamé-Navier system and in the search of a Cauchy integral formula for (ϕ, ψ)-inframonogenic functions. Firstly necessary topics of Clifford Analysis are approached. Later on, the study of the widespread homogeneous Lamé-Navier system is developed, and it arrived at particular results to describe the form of their solutions. Then solutions are built, of vital importance in how starting from a certain function to arrive to a solution of the system. To be culminated it does arrive to essential results by an appropriate a Cauchy integral formula for (ϕ, ψ)-inframonogenic functions. During the development of this work it was demonstrated that the solutions of the system studied under certain conditions possess specific structures. It also marks singular importance because it reveals the use of the pure mathematics in the environment of the Elasticity Theory. Besides that preliminary results are obtained for a Cauchy integral formula for (ϕ, ψ)-inframonogenic functions, that which is outstanding in Clifford Analysis; and the study of Almansi decomposition begins for this class of functions.
Keywords: Clifford Analysis, inframonogenic functions, Lamé-Navier system, Elasticity Theory.

Índice general

Introducción

Según tesis doctoral [12], Albert Einstein, el cual es considerado como el científico más conocido y popular del siglo XX, expresó: “las Matemáticas Puras son, en su camino, la poesía de las ideas lógicas“, y posee toda la razón, ya han pasado muchos siglos y el inmenso edificio de avances en esta maravillosa ciencia no se detiene, y es que precisamente “los modelos del matemático, al igual que ocurre con los del pintor o con los del poeta, deben ser hermosos; las ideas, al igual que los colores o las palabras, deben encajar de forma armoniosa; la belleza es el primer examen, no existe lugar eterno en el mundo para las matemáticas feas“, como expresara Hardy según publicación referenciada en [2], excelente teórico de números, tutor de tesis del matemático autodidacta indio Ramanujan, el que fue muy conocido por algunas de sus asombrosas fórmulas. Es por ello que se pretende con este trabajo que sea verdaderamente matemático, pues como dijese Jorge Luis Borges en [3], escritor argentino galardonado con el Premio Nobel de Literatura: “nadie puede escribir un libro, para que un libro sea verdaderamente, se necesitan la aurora y el poniente, siglos, armas y el mar que une y separa“.
Al final de la década de 1920 la marcha de las ideas y los descubrimientos llevaron a los físicos a una aceptación general de la teoría relativista del electrón. Sin embargo, Paul Dirac se encontraba disconforme con las ideas prevalecientes del momento y estaba buscando una formulación mejor. En 1928, finalmente encontró una teoría acorde a sus ideas que explicaba la mayoría de los principios de la época. Su teoría resultó ser uno de los grandes logros intelectuales de ese tiempo, de una gran belleza en la matemática aplicada y que no sólo clarificó algunos fenómenos misteriosos sino que predijo la existencia de una

partícula similar al electrón, ¡pero de energía negativa! Esto fue luego comprobado experimentalmente y cambió el modo de entender la naturaleza desde entonces.

En Mecánica Cuántica el estado de una partícula se describe por una función de onda $\vartheta(t,x)$ del espacio de Lorents $\mathbb{R}^{1,3}$. Buncando darle forma a su teoría, Dirac se encontró con el problema de hallar una ecuación de onda $D\vartheta = \lambda\vartheta$ Lorents-invariante que sea compatible con la solución de Klein-Gordon $\Box\vartheta = \lambda\vartheta$ donde $\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$[19]. La causalidad más la invariancia de Lorentz requería que D fuese de primer orden en todas las variables. Lo que Dirac estaba buscando era, básicamente, una factorización del Laplaciano $\Delta = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. Asumiendo que D fuese un operador con coeficientes constantes consideró $D = \sum_{i=0}^{3} \gamma_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $\gamma_i \in \mathbb{C}$. La condición $D^2 = \Box$ implica que para $0 \leq i, j \leq 3$ con $i \neq j$ se tiene:

$$\gamma_i^2 = -1, \gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = 0.$$

Dicho D es el llamado operador de Dirac[10]. Generalizando a dimensión n, hoy se reconoce a estas relaciones como las generadoras del álgebra de Clifford *Cl*(n) de $\mathbb{R}^n$ con la forma cuadrática definida negativa $-\|.\|^2$.

Como una generalización intuitiva de función analítica del plano complejo a altas dimensiones, el Análisis de Clifford se especializa en el estudio de las funciones monogénicas, que son aquellas funciones de $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}_{0,m}$ que pertenecen al núcleo del operador de Dirac clásico:

$$D_{\underline{x}} = \partial_{x_1} e_1 + \partial_{x_2} e_2 + ... + \partial_{x_m} e_m,$$

donde $\mathbb{R}_{0,m}$ representa el Álgebra de Clifford asociativa generada por la base ortonormal de $\mathbb{R}^m$: $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$. Es característico también que $D_{\underline{x}}^2 = -\Delta$, simbolizando un resultado esencial para el estudio de la armonicidad de funciones. Una función f se dice que es armónica si su laplaciano es idénticamente cero, o sea, $\Delta f = 0$; sin embargo, se dice que es inframonogénica si $D_{\underline{x}} f D_{\underline{x}} = 0$. La inframonogenicidad es un concepto específicamente emergido del Análisis de Clifford debido a la no conmutatividad inherente del producto cliffordiano.

El Análisis de Clifford posee sus orígenes en el Análisis Cuaterniónico, este último dio sus primeros pasos cuando en 1843 R. W. Hamilton, en un intento de introducir un análogo tridimensional del sistema de los números complejos, inventó, como es bien conocido, los cuaterniones reales[20]. Luego de su esclarecimiento de la noción de número complejo como un par ordenado de números reales por un lado; y la deducción a partir de este hecho de que las operaciones con números complejos son esencialmente reducidas a operaciones con números reales; y por otro lado, el hecho de que los matemáticos, alrededor del año 1830 se percataron de que el álgebra de los números complejos se suplantaba trabajando con vectores en el plano, Hamilton deseaba probar si un análogo espacial del álgebra de números complejos podría ser trabajado de modo que las operaciones con este fueran suplantadas por vectores. Él estableció que sus nuevos números (los cuales fueron llamados cuaterniones) debían poseer cuatro componentes reales y la propiedad conmutativa de la multiplicación debía ser sacrificada. Posterior a Hamilton esta nueva álgebra fue denotada por $\mathbb{H}$. Luego William Kingdon Clifford, matemático inglés que también escribió sobre Filosofía, junto con Hermann Grassmann fundaron lo que ahora se conoce como álgebra geométrica, siendo un caso especial las Álgebras de Clifford, denominadas así en su honor, y que son usadas contemporáneamente en la Física Matemática. En estas álgebras surgen resultados hermosos que generalizan en algunos casos aquellos que son propios de las funciones de variable compleja, conformando así toda la teoría del Análisis de Clifford.

Un campo tridimensional en movimiento $\vec{u}$ en un sólido elástico, lineal, isótropo y homogéneo sin fuerzas de volumen es descrito por el sistema de Lamé-Navier [4, 6, 15]:

$$\mathcal{L}_{\lambda,\mu}\vec{u} := \mu\Delta\vec{u} + (\mu+\lambda)\textit{grad}(\textit{div}\,\vec{u}) = 0, \tag{1}$$

donde $\mu > 0, \lambda > -\frac{2}{3}\mu$ son los coeficientes de Lamé. El sistema fue introducido por Gabriel Lamé en 1837 en el método de separación de variables para la solución de la ecuación de onda en coordenadas elípticas. Investigaciones recientes, como [15], lograron establecer una estrecha relación de las soluciones de este sistema con las funciones inframonogénicas del Análisis de Clifford. En este trabajo se generalizó este sistema de Lamé-Navier para conjuntos estructurales de $\mathbb{R}_{0,m}^{(1)}$ y se arribaron a diferentes pautas acerca de las características de sus soluciones; además de que se descubrieron primeramente resultados en la búsqueda de una posible fórmula integral de tipo Cauchy para las funciones (ϕ, ψ)-inframonogénicas, una generalización de las funciones inframonogénicas cuando se tienen los conjuntos estructurales ϕ y ψ. Por ello se establecerá como **problema científico** el siguiente: ¿Cómo caracterizar el espacio de soluciones del sistema generalizado de Lamé-Navier?

El **objeto de investigación** será el Análisis de Clifford; y el **campo de acción**: las funciones (ϕ, ψ)-inframonogénicas y el sistema generalizado de Lamé-Navier en Análisis de Clifford.

El principal **objetivo** es describir el espacio de soluciones del sistema generalizado de Lamé-Navier. Su alcance presupone dar respuesta a las **preguntas científicas** siguientes:

– ¿Existirá una fórmula de representación de tipo Cauchy para funciones (ϕ, ψ)-inframonogénicas?

– ¿Mediante funciones ϕ-monogénicas y ψ-monogénicas se podrán construir funciones que sean armónicas y (ϕ, ψ)-inframonogénicas a la vez?

– ¿Para el caso específico $\phi = \psi$, el sistema generalizado de Lamé-Navier preserva los resultados obtenidos para el sistema clásico?

– ¿Bajo qué condiciones las soluciones del sistema generalizado de Lamé-Navier se pueden expresar como la suma de una función (ϕ, ψ)-armónica y una función (ψ, ϕ)-inframonogénica?

– ¿A partir de una función (ϕ, ψ)-armónica o (ϕ, ψ)-inframonogénica se podrán construir soluciones del sistema generalizado de Lamé-Navier?

En aras de obtener respuestas fue necesario realizar las **tareas de investigación** siguientes:

– Revisión bibliográfica sobre fundamentos del Análisis de Clifford y el sistema de Lamé-Navier.

– Definición de diferentes tipos de funciones surgidas debido sus relaciones con los operadores de Dirac.

– Estudio de la Fórmula generalizada de Borel Pompeiu.

– Demostración de resultados característicos para funciones (ϕ, ψ)-inframonogénicas.

– Definición de sistema generalizado de Lamé-Navier.

– Planteamiento de ecuaciones generales con respecto a las soluciones del sistema generalizado de Lamé-Navier.

– Estudio de las soluciones del sistema generalizado de Lamé-Navier bajo ciertas condiciones.

Los **métodos de investigación** utilizados en el desarrollo de este trabajo estuvieron determinados por los objetivos y las tareas de investigación. A nivel teórico se emplearon los métodos: histórico-lógico, análisis y síntesis, inducción y deducción, y a nivel empírico: el experimental y la modelación; todos de gran utilidad en el estudio de fuentes de información y en el procesamiento de los fundamentos científicos.

La problemática investigada y los resultados alcanzados han sido expuestos por el autor en eventos, tales como la XVI Jornada Científica Estudiantil de la Facultad de Matemática e Informática, en la cual la ponencia presentada resultó relevante y el XXIII Fórum Nacional de Estudiantes Universitarios de Ciencias Sociales, Económicas, Naturales, Humanísticas y Exactas.

La estructura del trabajo es la siguiente: el Capítulo 1 introduce la teoría preliminar para enfrentarse al problema en cuestión, tales como la definición de conjunto estructural y determiadas clases de funciones, enunciado de propiedades básicas, y posteriormente para una segunda parte del capítulo se enuncian teoremas conocidos de integración en el Análisis de Clifford, y se muestran algunos operadores de utilidad para el próximo capítulo.

Para el Capítulo 2 se trabaja primeramente en la búsqueda de una posible fórmula de representación de tipo Cauchy para las funciones (ϕ, ψ)-inframonogénicas, se encuentran resultados cruciales y se inicia el estudio de la descomposición de tipo Almansi para dichas funciones. Luego, se lleva a cabo el estudio de las soluciones del sistema generalizado de Lamé-Navier, donde se arriban a resultados acerca de las soluciones de este sistema y la construcción de algunas de ellas.

Capítulo 1

Nociones preliminares

En este capítulo se exponen los fundamentos teóricos que sirven de base a la presente investigación. Cuenta con dos secciones: en la sección 1.1 se abordan los aspectos básicos en el trabajo con Álgebras de Clifford donde se definen los conjuntos estructurales, clases de funciones y se enuncian propiedades, y en la sección 1.2 se tratan elementos esenciales del Análisis de Clifford, así como se enuncian teoremas clásicos y se definen operadores integrales de importancia en los resultados que se obtendrán.

1.1. Aspectos básicos del Análisis de Clifford

Denótase por $e_1, e_2, ..., e_m$ la base ortonormal canónica de $\mathbb{R}^m$, sujeta a las relaciones multiplicativas:

$$e_i^2 = -1, e_i e_j = -e_j e_i, i, j = 1, 2, ..., m, i < j.$$

Luego el espacio euclideano

$$\mathbb{R}^m = \{\underline{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_m e_m, x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., m\}$$

está sumergido en el Álgebra de Clifford $\mathbb{R}_{0,m}$ generada por $e_1, e_2, ..., e_m$ dentro del cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$. Un elemento $a \in \mathbb{R}_{0,m}$ puede ser escrito como $a = \sum_A a_A e_A$, donde a_A son constantes reales y A recorre todos los posibles conjuntos ordenados $A =$

$\{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq m\}$ o $A = \emptyset$, y $e_A = e_{i_1} e_{i_2} ... e_{i_m}, e_0 = e_\emptyset = 1$. En particular, $Sc[a] = a_0$ se refiere a la parte escalar de a. Nótese que cualquier $a \in \mathbb{R}_{0,m}$ se puede escribir de forma única como

$$a = [a]_0 + [a]_1 + ... + [a]_m, \tag{1.1}$$

donde $[.]_k$ denota la proyección de $\mathbb{R}_{0,m}$ en $\mathbb{R}_{0,m}^{(k)}$. Aquí $\mathbb{R}_{0,m}^{(k)}$ denota el subespacio de k-vectores definido por

$$\mathbb{R}_{0,m}^{(k)} = \textit{span}_{\mathbb{R}}(e_A : |A| = k).$$

Es costumbre identificar a $\mathbb{R}$ con $\mathbb{R}_{0,m}^{(0)}$, los conocidos escalares en $\mathbb{R}_{0,m}$, y $\mathbb{R}^m$ con $\mathbb{R}_{0,m}^{(1)} \cong \mathbb{R}^m$, el conjunto de los vectores en $\mathbb{R}_{0,m}$. Los elementos de $\mathbb{R}_{0,m}^{(2)}$ son llamados bivectores, mientras que los elementos de $\mathbb{R}_{0,m}^{(m)}$ son nombrados pseudoescalares.

El producto de dos vectores de Clifford resulta un escalar y un bivector:

$$\underline{x}\underline{y} = -\underline{x} \cdot \underline{y} + \underline{x} \times \underline{y},$$

donde

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$$

y

$$\underline{x} \times \underline{y} = \sum_{j<k} e_j e_k (x_j y_k - x_k y_j).$$

Sea $\psi := \{\psi^1, \psi^2, ..., \psi^m\} \subset \mathbb{R}_{0,m}^{(1)}$. Por cuestión de comodidad se escribirá $-\psi = \overline{\psi} = \left\{\overline{\psi^1}, \overline{\psi^2}, ..., \overline{\psi^m}\right\} = \{-\psi^1, -\psi^2, ..., -\psi^m\}$. En el conjunto $C^1(\Omega, \mathbb{R}_{0,m})$, donde Ω es un abierto de $\mathbb{R}^m$, se definen respectivamente los operadores por la izquierda y por la derecha de Dirac como:

$$D^\psi[f] := \sum_{i=1}^{m} \psi^i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad [f]D^\psi := \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} \psi^i. \tag{1.2}$$

Para el caso en que $\psi = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$, o sea la base canónica, entonces se denotará como $D[f]$ y $[f]D$, respectivamente.

Si Δ_m es el operador de Laplace m-dimensional. Es fácil probar que las igualdades

$$D^\psi D^{\overline{\psi}}[f] = D^{\overline{\psi}} D^\psi [f] = [f] D^\psi D^{\overline{\psi}} = [f] D^{\overline{\psi}} D^\psi = \Delta_m \tag{1.3}$$

son ciertas si solo si

$$\psi^i\overline{\psi^j} + \psi^j\overline{\psi^i} = 2\delta_{i,j}, \quad i,j \in \mathbb{N}_m^0.$$

Note que

$$2\delta_{i,j} = \psi^i\overline{\psi^j} + \overline{\psi^i}\psi^j = \psi^i\overline{\psi^j} + \overline{\psi^i\overline{\psi^j}} = 2[\psi^i\overline{\psi^j}]_0 = 2\psi^i \cdot \psi^j, \tag{1.4}$$

donde la factorización en 1.3 se tiene si solo si ψ representa una base ortonormal de $\mathbb{R}_{0,m}^{(1)}$. Un conjunto ψ con la propiedad 1.4 es llamado *conjunto estructural* [5, 8, 9, 11]. Es evidente que ψ y $\overline{\psi}$ son conjuntos estructurales simultáneamente. Los operadores de Dirac por la izquierda y por la derecha son conectados por las relaciones:

$$D^{\psi}[f] = \overline{[\overline{f}]D^{\overline{\psi}}} = -\overline{[\overline{f}]D^{\psi}}[9] \tag{1.5}$$

Veamos las siguientes definiciones:

Definición 1. *Función ψ-monogénica*
Se dice que la función $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}_{0,m})$ es ψ-monogénica por la izquierda (por la derecha) en el dominio Ω si solo si:

$$D^{\psi}[f] = 0 \ ([f]D^{\psi} = 0), \ en \ \Omega.$$

Sea ahora el conjunto estructural $\phi = \{\phi^1, \phi^2, ..., \phi^m\}$,

Definición 2. *Función (ϕ,ψ)-armónica*
Se dice que la función $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}_{0,m})$ es (ϕ,ψ)-armónica por la izquierda (por la derecha) en el dominio Ω si solo si:

$$D^{\phi}D^{\psi}[f] = 0 \ ([f]D^{\phi}D^{\psi} = 0), \ en \ \Omega.$$

Note que cuando $\psi = \phi$ o $\psi = \overline{\phi}$ entonces f es armónica. Aclaremos que cuando nos referimos a $\psi = \phi$, no es solo a manera de conjunto como tal, sino también de acuerdo al orden que se escojan sus elementos para formar el operador de Dirac. O sea, los conjuntos estructurales de $\mathbb{R}_{0,3}^{(1)}$ $\psi = \{e_1, e_2, e_3\}$ y $\phi = \{e_3, e_2, e_1\}$ no serían iguales en este sentido, debido a que forman operadores de Dirac diferentes: $D^{\psi}[.] = D[.] = \sum_{i=1}^{3} e_i \frac{\partial}{\partial x_i}[.]$ y $D^{\phi}[.] = e_3\frac{\partial}{\partial x_1}[.] + e_2\frac{\partial}{\partial x_2}[.] + e_1\frac{\partial}{\partial x_3}[.]$.

Definición 3. *Función (ϕ, ψ)-inframonogénica*
Se dice que la función $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}_{0,m})$ es (ϕ, ψ)-inframonogénica en el dominio Ω si solo si:

$$D^{\phi}[f]D^{\psi} = 0, \ en\ \Omega.$$

Cuando $\phi = \psi$, o sea $D^{\psi}[f]D^{\psi} = 0$, la función f se llamará ψ-inframonogénica. Para este mismo caso, cuando ψ es la base canónica de $\mathbb{R}^m$ entonces se tiene que la función f es inframonogénica como se conoce. Estudios de las funciones inframonogénicas se encuentran en [1, 11, 14, 15, 16]. Cuando en este trabajo se enfatice en funciones (ϕ, ψ)-armónioca o (ϕ, ψ)-inframonogénicas, se hace referencia cuando $\phi \neq \psi$.
Sea $\mathcal{H}(\Omega)$ el conjunto de las funciones armónicas sobre el abierto Ω; $\mathcal{I}(\Omega)$, el conjunto de las funciones inframonogénicas; $\mathcal{H}_{\phi,\psi}(\Omega)$, el conjunto de las funciones (ϕ, ψ)-armónicas por la izquierda; $\mathcal{I}_{\phi,\psi}(\Omega)$, el conjunto de las funciones (ϕ, ψ)-inframonogénicas, mientras que el conjunto de las funciones ψ-inframonogénicas se denotará como $\mathcal{I}_{\psi}(\Omega)$. Sea $\underline{\mathcal{H}}(\Omega)$, $\underline{\mathcal{I}}(\Omega)$, $\underline{\mathcal{H}}_{\phi,\psi}(\Omega)$, $\underline{\mathcal{I}}_{\phi,\psi}(\Omega)$ y $\underline{\mathcal{I}}_{\psi}(\Omega)$, los subespacios correspondientes de funciones vectoriales o con valores en $\mathbb{R}_{0,m}^{(1)}$.

Proposición 1. *Una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_{0,m}$ es ψ-inframonogénica si solo si sus respectivas componentes k-vectoriales, $0 \leq k \leq m$, $[f]_k$, son funciones ψ-inframonogénicas también.*

Demostración. Debido a que la descomposición canónica presentada en 1.1 es única, entonces como las respectivas componentes k-vectoriales son ψ-inframonogénicas, implica desde luego que f lo sea también. Claramente se tiene

$$D^{\psi} f D^{\psi} = \sum_{k=0}^{m} D^{\psi}[f]_k D^{\psi}.$$

Probaremos que para cada k, $D^{\psi}[f]_k D^{\psi}$ es un k-vector. Se sabe que $[f]_k = \sum_A f_A e_A$ con $|A| = k$. También se aprecia que $\psi^i = \sum_{k=1}^{m} \psi_k^i e_k$, donde $\psi_k^i \in \mathbb{R}$, y

$$D^{\psi} f_A e_A D^{\psi} = \sum_{i,j} \psi_i \frac{\partial^2 f_A}{\partial x_i \partial x_j} e_A \psi_j.$$

Teniendo en cuenta que entonces $\psi^i e_A \psi^j = \sum_{k,l} \psi_k^i \psi_l^j e_k e_A e_l$, es evidente que cuando $k = l$ prevalece un k-vector, o cuando $k \neq l$ y ocurre cualesquiera de estas dos situaciones: $k \in A$, $l \notin A$ ó $l \in A$, $k \notin A$. Pero cuando $k \neq l$ y además tanto l como k pertenecen o no a A, entonces se tiene que $e_k e_A e_l = -e_l e_A e_k$. Esto se aprecia por el hecho siguiente:

$$e_j e_A e_j = \begin{cases} (-1)^{|A|} e_A & \textit{si } j \in A \\ (-1)^{|A|+1} e_A & \textit{si } j \notin A \end{cases},$$

luego,

$$-e_k e_A e_l = \begin{cases} (-1)^{|A|} e_A e_k e_l & \textit{si } k \in A \\ (-1)^{|A|+1} e_A e_k e_l & \textit{si } k \notin A \end{cases},$$

$$-e_l e_A e_k = \begin{cases} (-1)^{|A|} e_A e_l e_k & \textit{si } l \in A \\ (-1)^{|A|+1} e_A e_l e_k & \textit{si } l \notin A \end{cases},$$

claramente se observa que $e_k e_A e_l = -e_l e_A e_k$. Como $\psi^j e_A \psi^i = \sum_{k,l} \psi_k^j \psi_l^i e_k e_A e_l$, además de que $\psi_k^i \psi_l^j = \psi_l^j \psi_k^i$, y que $\partial_{x_i} \partial_{x_j} f_A = \partial_{x_j} \partial_{x_i} f_A$, se anulan dichos términos, teniéndose por tanto un k-vector, y desde luego si f es ψ-inframonogénica lo serán también sus componentes k-vectoriales, así se concluye la demostración. $\square$

Esta propiedad, en general, no se cumple para funciones (ϕ, ψ)-inframonogénicas. Por ejemplo, sea la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{0,2}$ definida en Ω, donde Ω es la bola abierta centrada en cero con radio 1, tal que $g(x) = x_1^3 - \frac{3}{2} e_1 e_2 x_1^2 x_2 - \frac{1}{2} e_1 e_2 x_2^3$. Como se puede observar $g \in C^2(\overline{\Omega})$. Si se tienen los conjutos estructurales $\phi = \{e_1, e_2\}$ y $\psi = \{e_2, e_1\}$, entonces:

$$D^\phi g D^\psi = e_1 \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} e_2 + e_2 \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} e_1 + e_1 \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} e_1 + e_2 \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_1} e_2.$$

Luego se obtiene calculando

$$\begin{aligned} D^\phi g D^\psi &= e_1[6x_1 - 3e_1e_2x_2]e_2 + e_2[-3e_1e_2x_2]e_1 + e_1[-3e_1e_2x_1]e_1 + e_2[-3e_1e_2x_1]e_2 \\ &= 6e_1e_2x_1 - 3x_2 + 3x_2 + 3e_2e_1x_1 + 3e_2e_1x_1 \\ &= 6e_1e_2x_1 + 6e_2e_1x_1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Entonces la función g es (ϕ, ψ)-inframonogénica en Ω. Si se toma $[g]_0(x) = x_1^3$, y se calcula

$$D^{\phi}[g]_0 D^{\psi} = 6e_1e_2x_1 \neq 0 \ \forall x_1 \neq 0,$$

luego $[g]_0$ no es (ϕ, ψ)-inframonogénica en Ω.

1.2. Fórmula de Borel-Pompeiu

Es conocido que la solución fundamental del operador $D_{\underline{x}}$ se obtiene como

$$E_0(\underline{x}) = D_{\underline{x}} E_1(\underline{x}), \tag{1.6}$$

donde

$$E_1(\underline{x}) = \frac{1}{(m-2)\sigma_m |\underline{x}|^{m-2}}, \underline{x} \neq 0 \tag{1.7}$$

es la solución fundamental del laplaciano Δ_m y σ_m es el área superficial de la esfera unitaria en $\mathbb{R}^m$[14].

De aquí que la función

$$E_0(\underline{x}) = -\frac{1}{\sigma_m} \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|^m}, \tag{1.8}$$

se conoce como núcleo de Clifford-Cauchy, y satisface en $\mathbb{R}^m \backslash \{0\}$ la ecuación:

$$D_{\underline{x}} E_0 = E_0 D_{\underline{x}} = 0.$$

Claramente si se tiene un conjunto estructural $\psi = \{\psi^1, \psi^2, ..., \psi^m\}$, sea $\underline{x}_{\psi} := \sum_{i=1}^{m} x_i \psi^i$, y como $-D^{\psi} D^{\psi} = \Delta_m$, entonces el núcleo de Cauchy o sea la solución fundamental de los operadores D^{ψ} por la derecha e izquierda será

$$K_{\psi}(\underline{x}) := -D^{\psi}[E_1(\underline{x})] = -\frac{1}{\sigma_m |\underline{x}|^m} \sum_{i=1}^{m} \psi^i x_i = -\frac{1}{\sigma_m |\underline{x}|^m} \underline{x}_{\psi} = -[E_1(\underline{x})] D^{\psi}. \tag{1.9}$$

Se ha llegado así en investigaciones en [7] y [8] al siguiente teorema:

Teorema 1. FÓRMULA DE BOREL-POMPEIU(CAUCHY-GREEN). *Sea* $f \in C^1(\Omega \cup \Gamma, \mathbb{R}_{0,m})$, *donde el dominio* $\Omega \in \mathbb{R}^m$ *posee frontera suficientemente suave* Γ*, entonces se cumple que*

$$\int_\Gamma K_\psi(\underline{y}-\underline{x})n_\psi(\underline{y})f(\underline{y})dS(\underline{y})-\int_\Omega K_\psi(\underline{y}-\underline{x})D^\psi[f](\underline{y})dV(\underline{y}) = \begin{cases} f(\underline{x}) & si \ \ x \in \Omega \\ 0 & si \ \ x \in \mathbb{R}^m \backslash \Omega \cup \Gamma \end{cases} \tag{1.10}$$

Denotemos las funciones siguientes como

$$(\mathcal{T}^l_\psi \varphi)(\underline{x}) = -\int_\Omega K_\psi(\underline{y}-\underline{x})\varphi(\underline{y})dV(\underline{y}) \tag{1.11}$$

y

$$(\mathcal{C}^l_\psi \varphi)(\underline{x}) = \int_\Gamma K_\psi(\underline{y}-\underline{x})n_\psi(\underline{y})\varphi(\underline{y})dS(\underline{y}), \quad \underline{x} \notin \Gamma. \tag{1.12}$$

Estas funciones son conocidas como transformadas de Teodorescu y de Cauchy[5, 14] de φ, y es claro que según 1.10

$$f(\underline{x}) = \mathcal{C}^l_\psi[f(\underline{x})] + \mathcal{T}^l_\psi[D^\psi f(\underline{x})], \quad \underline{x} \in \Omega. \tag{1.13}$$

Generalizando la transformada de Cauchy para el caso de tener los conjuntos estructurales ψ y ϕ, se obtiene

$$(\mathcal{C}^l_{\phi,\psi} \varphi)(\underline{x}) = \int_\Gamma K_\phi(\underline{y}-\underline{x})n_\psi(\underline{y})\varphi(\underline{y})dS(\underline{y}), \quad \underline{x} \notin \Gamma. \tag{1.14}$$

Llegando así a obtener una Fórmula generalizada de Borel-Pompeiu[8]

Teorema 2. FÓRMULA GENERALIZADA DE BOREL-POMPEIU. *Sea* $f \in C^1(\Omega \cup \Gamma, \mathbb{R}_{0,m})$, *donde el dominio* $\Omega \in \mathbb{R}^m$ *posee frontera suficientemente suave* Γ*, entonces se cumple que*

$$\int_\Gamma K_{\overline{\phi}}(\underline{y}-\underline{x})n_{\overline{\psi}}(\underline{y})f(\underline{y})dS(\underline{y}) - \int_\Omega K_{\overline{\phi}}(\underline{y}-\underline{x})D^{\overline{\psi}}[f](\underline{y})dV(\underline{y}) = \Pi^l_{\phi,\psi}[f](\underline{x}), \quad x \notin \Gamma, \tag{1.15}$$

donde

$$\Pi^l_{\phi,\psi} := D^\phi \mathcal{T}^l_\psi. \tag{1.16}$$

Observación 1. *El operador $\Pi^{l}_{\phi,\psi}$ se conoce como Π-operador. Usando las notaciones ya descritas se llega a que la fórmula generalizada de Borel-Pompeiu puede ser escrita como:*

$$\mathcal{C}^{l}_{\overline{\phi},\overline{\psi}} f(\underline{x}) + \mathcal{T}^{l}_{\overline{\phi}} D^{\overline{\psi}} f(\underline{x}) = \Pi^{l}_{\phi,\psi}[f](\underline{x}), \quad \underline{x} \notin \Gamma. \tag{1.17}$$

En el caso de funciones ψ-monogénicas por la izquierda, la fórmula de Borel-Pompeiu se reduce a una fórmula integral de representación de tipo Cauchy,

$$f(\underline{x}) = \int_{\Gamma} K_{\psi}(\underline{y} - \underline{x}) n_{\psi}(\underline{y}) f(\underline{y}) dS(\underline{y}), \quad \underline{x} \in \Omega. \tag{1.18}$$

Mientras que la fórmula generalizada toma la forma

$$\Pi^{l}_{\phi,\psi}[f](\underline{x}) = \int_{\Gamma} K_{\phi}(\underline{y} - \underline{x}) n_{\psi}(\underline{y}) f(\underline{y}) dS(\underline{y}), \quad \underline{x} \in \Omega. \tag{1.19}$$

Como mismo se definieron las transformadas de Teodorescu y Cauchy por la izquierda 1.11,1.12, también se pueden definir por la derecha, como

$$(\mathcal{T}^{r}_{\psi}\varphi)(\underline{x}) = -\int_{\Omega} \varphi(\underline{y}) K_{\psi}(\underline{y} - \underline{x}) dV(\underline{y})$$

y

$$(\mathcal{C}^{r}_{\psi}\varphi)(\underline{x}) = \int_{\Gamma} \varphi(\underline{y}) n_{\psi}(\underline{y}) K_{\psi}(\underline{y} - \underline{x}) dS(\underline{y}), \;\; \underline{x} \notin \Gamma.$$

Así como la transformada de Cauchy por la derecha para el caso de conjuntos estructurales diferentes será

$$(\mathcal{C}^{r}_{\phi,\psi}\varphi)(\underline{x}) = \int_{\Gamma} \varphi(\underline{y}) n_{\psi}(\underline{y}) K_{\phi}(\underline{y} - \underline{x}) dS(\underline{y}), \;\; \underline{x} \notin \Gamma.$$

1.3. Conclusiones parciales

En este capítulo se expusieron los elementos teóricos que servirán de base para analizar y responder la pregunta científica de esta investigación. Además, se realizó una observación, se definieron clases de funciones y se probó una proposición que se usará posteriormente en distintas demostraciones.

Capítulo 2

Teoremas estructurales para funciones (ϕ, ψ)-inframonogénicas y para las soluciones del sistema generalizado de Lamé-Navier

En este capítulo se exponen los resultados encontrados en la búsqueda de una posible fórmula de representación para funciones (ϕ, ψ)-inframonogénicas. En la primera sección se analizará el caso para funciones ψ-inframonogénicas, donde se encuentra una fórmula de tipo Cauchy. Luego se encuentra una fórmula característica para las funciones (ϕ, ψ)-inframonogénicas. A continuación se exponen propiedades de algunos de los operadores utilizados, y para culminar la sección se inicia el estudio de la descomposición de Almansi para funciones (ϕ, ψ)-inframonogénicas. En la segunda sección se retomará la pregunta central de la investigación sobre una natural generalización del sistema de Lamé-Navier mediante operadores de Dirac. Está dividida de manera general en cuatro partes: la primera de ellas estará dedicada a presentar y justificar la generalización del sistema de Lamé-Navier mediante conjuntos estructurales, y la presentación de un lema crucial para los posteriores resultados. Luego se ofrecerán algunas ecuaciones generales de este sistema generalizado que serán de apoyo para los resultados que se expondrán. Posteriormente se exponen, mediante teoremas, características de las soluciones del sistema generalizado de Lamé-Navier bajo ciertas condiciones. Para culminar se mostrará cómo construir soluciones del sistema mediante otras clases de funciones.

2.1. Teoría de las funciones (ϕ, ψ)-inframonogénicas

Como se había mencionado en la introducción, la inframonogenicidad surge debido a la no conmutatividad del producto cliffordiano. Esto evidentemente también provoca el surgimiento de las funciones (ϕ, ψ)-inframonogénicas. Se ha expresado además que las funciones inframonogénicas son un caso particular de funciones ψ-inframonogénicas, y estas a la vez se incluyen dentro del espacio de las funciones (ϕ, ψ)-inframonogénicas. Pero una propiedad que es común entre funciones f ψ-inframonogénicas y (ϕ, ψ)-inframonogénica, es que son también 3-ψ-monogénicas por la derecha, o sea $fD^\psi D^\psi D^\psi = 0$. Este hecho se debe a que cuando la función f es ψ-inframonogénica, entonces $D^\psi f D^\psi = 0$, luego también $D^\psi D^\psi f D^\psi = 0$, que es equivalente a: $fD^\psi D^\psi D^\psi = 0$. Sin embargo, cuando la función f es (ϕ, ψ)-inframonogénica, es decir, $D^\phi f D^\psi = 0$, también ocurre que $D^\phi D^\phi f D^\psi = 0$, pero entonces: $D^\phi D^\phi f D^\psi = D^\psi D^\psi f D^\psi = fD^\psi D^\psi D^\psi = 0$. Análogamente se demuestra que si la función f es (ϕ, ψ)-inframonogénica entonces también es 3-ϕ-monogénica por la izquierda, o sea, $D^\phi D^\phi D^\phi f = 0$.

Según [17] se tiene que la solución fundamental del operador $D^\phi D^\phi[.]$ es:

$$K_{2,\phi}(\underline{x}) := D^\phi D^\phi[\Theta_m^2],$$

donde Θ_m^2 no es más que la solución fundamental del operador laplaciano iterado dos veces Δ_m^2, el cual se calcula como

$$\Theta_m^2(\underline{x}) = \frac{|\underline{x}|^{2k-m}}{2\sigma_m(2-m)(4-m)}.$$

Calculando se obtiene:

$$K_{2,\phi}(\underline{x}) = \frac{\underline{x}_\phi^2}{(2-m)\sigma|\underline{x}|^m},$$

donde $\underline{x}_\phi = \sum_{i=1}^m \phi^i x_i$ cuando $\underline{x} = \sum_{i=1}^m e_i x_i$.

También se tiene que la solución fundamental del operador $D^\phi D^\phi D^\phi[.]$ es:

$$K_{3,\phi}(\underline{x}) := -D^\phi D^\phi D^\phi[\Theta_m^3],$$

donde Θ_m^3 no es más que la solución fundamental del operador laplaciano iterado tres veces Δ_m^3, el cual se calcula como

$$\Theta_m^3(\underline{x}) = \frac{|\underline{x}|^{6-m}}{8\sigma_m(2-m)(4-m)(6-m)}.$$

Calculando se obtiene:

$$K_{3,\phi}(\underline{x}) = \frac{(\frac{m}{2-m}\underline{x}_\phi + \frac{\sum_{i=1}^m \phi^i \underline{x}_\phi \phi^i}{m-2} + \frac{m}{2-m}\underline{x}_\phi)|\underline{x}|^2 - \underline{x}_\phi^3}{8\sigma_m |\underline{x}|^m}.$$

Un importante resultado de [17] es precisamente que si $f \in C^3(\overline{\Omega}, \mathbb{R}_{0,m})$ se cumple que

$$\begin{aligned} f(x) = &\int_\Gamma K_\phi(\underline{y}-\underline{x}) n_\phi(\underline{y}) f(\underline{y}) dS(\underline{y}) - \int_\Gamma K_{2,\phi}(\underline{y}-\underline{x}) n_\phi(\underline{y}) D^\phi f(\underline{y}) dS(\underline{y}) \\ &+ \int_\Gamma K_{3,\phi}(\underline{y}-\underline{x}) n_\phi(\underline{y}) D^\phi D^\phi f(\underline{y}) dS(\underline{y}) - \int_\Omega K_{3,\phi}(\underline{y}-\underline{x}) D^\phi D^\phi D^\phi f(\underline{y}) dV(\underline{y}). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Como se ha mencionado anteriormente toda función (ϕ,ψ)-inframonogénica es 3-ϕ-monogénica por la izquierda, luego resulta que para un dominio de Jordan $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ de (ϕ,ψ)-inframonogenicidad con frontera suave Γ, entonces:

$$\begin{aligned} f(x) = &\int_\Gamma K_\phi(\underline{y}-\underline{x}) n_\phi(\underline{y}) f(\underline{y}) dS(\underline{y}) - \int_\Gamma K_{2,\phi}(\underline{y}-\underline{x}) n_\phi(\underline{y}) D^\phi f(\underline{y}) dS(\underline{y}) \\ &- \int_\Gamma K_{3,\phi}(\underline{y}-\underline{x}) n_\phi(\underline{y}) \Delta f(\underline{y}) dS(\underline{y}). \end{aligned} \tag{2.2}$$

La fórmula 2.2 no es de representación para funciones (ϕ,ψ)-inframonogénicas, debido a que toda función que se puede representar así no necesariamente debe ser (ϕ,ψ)-inframonogénica.

Antes de ofrecer el primer resultado principal, se definieron primeramente los siguientes operadores para funciones φ y χ, integrables en Γ y Ω respectivamente

$$[\mathcal{C}_\psi^0 \varphi](\underline{x}) = \int_\Gamma K_\psi(\underline{y}-\underline{x}) n_\psi(\underline{y}) \varphi(\underline{y}) (\underline{y}-\underline{x}) dS(\underline{y}) \tag{2.3}$$

$$[\mathcal{C}^1_\psi \varphi](\underline{x}) = \sum_{i=1}^{m} \psi^i \left[\int_\Gamma E_1(\underline{y} - \underline{x}) n_\psi(\underline{y}) \varphi(\underline{y}) dS(\underline{y}) \right] \psi^i \tag{2.4}$$

$$[\mathcal{T}^0_\psi \chi](\underline{x}) = - \int_\Omega K_\psi(\underline{y} - \underline{x}) \chi(\underline{y}) (\underline{y} - \underline{x}) dV(\underline{y}) \tag{2.5}$$

$$[\mathcal{T}^1_\psi \chi](\underline{x}) = - \sum_{i=1}^{m} \psi^i \left[\int_\Omega E_1(\underline{y} - \underline{x}) \chi(\underline{y}) dV(\underline{y}) \right] \psi^i \tag{2.6}$$

$$[\mathcal{C}^0_{\phi,\psi} \varphi](\underline{x}) = \int_\Gamma K_\phi(\underline{y} - \underline{x}) n_\psi(\underline{y}) \varphi(\underline{y}) (\underline{y} - \underline{x}) dS(\underline{y}) \tag{2.7}$$

$$[\mathcal{C}^1_{\phi,\psi} \varphi](\underline{x}) = \sum_{i=1}^{m} \phi^i \left[\int_\Gamma E_1(\underline{y} - \underline{x}) n_\psi(\underline{y}) \varphi(\underline{y}) dS(\underline{y}) \right] \psi^i. \tag{2.8}$$

También a partir de estos se definieron los siguientes dos operadores:

$$\mathcal{C}^{\textit{infra}}_\psi \varphi = \frac{1}{2}[\mathcal{C}^0_\psi \varphi + \mathcal{C}^1_\psi \varphi]$$
$$\mathcal{T}^{\textit{infra}}_\psi \chi = \frac{1}{2}[\mathcal{T}^0_\psi \chi + \mathcal{T}^1_\psi \chi].$$

Estos operadores se definieron con respecto a conjuntos estructurales arbitrarios.

Lema 1. *Las siguientes fórmulas se cumplen*

(1). $[K_\psi(\underline{y} - \underline{x})]\psi^i = -\psi^i [K_\psi(\underline{y} - \underline{x})] + 2[K_\psi(\underline{y} - \underline{x})\psi^i]_0$

(2). $D^\psi_{\underline{y}}[(f(\underline{y}) D^\psi_{\underline{y}})(\underline{y} - \underline{x})] = (D^\psi_{\underline{y}} f(\underline{y}) D^\psi_{\underline{y}})(\underline{y} - \underline{x}) + \sum_{i=1}^m \psi^i [f(\underline{y}) D^\psi_{\underline{y}}]\psi^i.$

Demostración. La prueba de (1) es inmediata. Para probar (2) se procede de la siguiente forma

$$\begin{aligned} D^\psi_{\underline{y}}[(f(\underline{y}) D^\psi_{\underline{y}})(\underline{y} - \underline{x})] &= \sum_{i=1}^{m} \psi^i \frac{\partial}{\partial y_i} [(f(\underline{y}) D^\psi_{\underline{y}})(\underline{y} - \underline{x})] \\ &= \sum_{i=1}^{m} \psi^i i \{ \frac{\partial}{\partial y_i} [f(\underline{y}) D^\psi_{\underline{y}}](\underline{y} - \underline{x}) + (f(\underline{y}) D^\psi_{\underline{y}}) \frac{\partial}{\partial y_i} [\underline{y} - \underline{x}] \} \\ &= (D^\psi_{\underline{y}} f(\underline{y}) D^\psi_{\underline{y}})(\underline{y} - \underline{x}) + \sum_{i=1}^{m} \psi^i [f(\underline{y}) D^\psi_{\underline{y}}]\psi^i. \end{aligned}$$

□

Un resultado importante en este capítulo es el siguiente:

Teorema 3. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un dominio de Jordan con frontera suave Γ y sea $f \in C^2(\Omega \cup \Gamma)$. Entonces se cumple que*

$$f(\underline{x}) = [\mathcal{C}^r_\psi f](\underline{x}) + [\mathcal{C}^{\textit{infra}}_\psi f D^\psi](\underline{x}) + [\mathcal{T}^{\textit{infra}}_\psi D^\psi f D^\psi](\underline{x}). \tag{2.9}$$

Demostración. Sea $\underline{x} \in \Omega$ y tomemos un $\epsilon > 0$ tal que:

$$\overline{B}(\underline{x}, \epsilon) = \{\underline{y} \in \mathbb{R}^m : |\underline{y} - \underline{x}| \leq \epsilon\} \subset \Omega.$$

Sea entonces $\Omega_\epsilon = \Omega \backslash \overline{B}(\underline{x}, \epsilon)$ y sean:

$$\begin{aligned} I^\epsilon &= \int_{\Omega_\epsilon} K_\psi(\underline{y} - \underline{x}) D^\psi_{\underline{y}}[(f(\underline{y}) D^\psi_{\underline{y}})(\underline{y} - \underline{x})] dV(\underline{y}) \\ J^\epsilon &= \int_{\Omega_\epsilon} \sum_{i=1}^m [K_\psi(\underline{y} - \underline{x})] \psi^i (f(\underline{y}) D^\psi_{\underline{y}}) \psi^i dV(\underline{y}). \end{aligned}$$

Una versión de la fórmula de Stokes para funciones $f, g \in C^1(\Omega \cup \Gamma, \mathbb{R}_{0,m})$ es la siguiente:

$$\int_\Gamma g(\underline{x}) \underline{n}_\psi(\underline{x}) f(\underline{x}) dS(\underline{x}) = \int_\Omega ([g(\underline{x})] D^\psi f(\underline{x}) + g(\underline{x}) D^\psi [f(\underline{x})]) dV(\underline{x}).$$

Luego aplicando esta fórmula y según la ψ-monogenicidad de K_ψ se obtiene que

$$I^\epsilon = \int_{\partial\Omega_\epsilon} K_\psi(\underline{y} - \underline{x}) n_\psi(\underline{y}) (f(\underline{y}) D^\psi_{\underline{y}})(\underline{y} - \underline{x}) dS(\underline{y}).$$

Del Lema1 se tiene que

$$\begin{aligned} J^\epsilon &= \int_{\Omega_\epsilon} \sum_{i=1}^m \{-\psi^i [K_\psi(\underline{y} - \underline{x})](f(\underline{y}) D^\psi_{\underline{y}}) \psi^i + 2[K_\psi(\underline{y} - \underline{x}) \psi^i]_0 (f(\underline{y}) D^\psi_{\underline{y}}) \psi^i\} dV(\underline{y}) \\ &= -\sum_{i=1}^m \psi^i \left[\int_{\Omega_\epsilon} [K_\psi(\underline{y} - \underline{x})](f(\underline{y}) D^\psi) dV(\underline{y}\right] \psi^i - 2 \int_{\Omega_\epsilon} (f(\underline{y}) D^\psi_{\underline{y}}) K_\psi(\underline{y} - \underline{x}) dV(\underline{y}). \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula de Clifford-Stoke se llega a que

$$\int_{\Omega_\epsilon} E_1(\underline{y} - \underline{x})(D^\psi_{\underline{y}} f(\underline{y}) D^\psi_{\underline{y}}) dV(\underline{y}) + \int_{\Omega_\epsilon} K_\psi(\underline{y} - \underline{x})(f(\underline{y}) D^\psi_{\underline{y}}) dV(\underline{y})$$

$$= \int_{\partial\Omega_\epsilon} E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}_\psi(\underline{y})(f(\underline{y})D_{\underline{y}}^{\psi} dS(\underline{y}).$$

Entonces

$$J^\epsilon = \sum_{i=1}^{m} \psi^i \left[\int_{\Omega_\epsilon} [E_1(\underline{y}-\underline{x})](D_{\underline{y}}^{\psi} f(\underline{y}) D_{\underline{y}}^{\psi}) dV(\underline{y})\right] \psi^i$$

$$- \sum_{i=1}^{m} \psi^i \left[\int_{\partial\Omega_\epsilon} E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}_\psi(\underline{y})(f(\underline{y})D_{\underline{y}}^{\psi} dS(\underline{y})\right] \psi^i - 2\int_{\Omega_\epsilon} (f(\underline{y})D_{\underline{y}}^{\psi}) K_\psi(\underline{y}-\underline{x}) dV(\underline{y}).$$

Aplicando el Lema1 se tiene que

$$I^\epsilon - J^\epsilon = \int_{\Omega_\epsilon} K_\psi(\underline{y}-\underline{x})(D_{\underline{y}}^{\psi} f D_{\underline{y}}^{\psi})(\underline{y}-\underline{x}) dV(\underline{y}).$$

Luego se obtiene

$$\int_{\Omega_\epsilon} K_\psi(\underline{y}-\underline{x})(D_{\underline{y}}^{\psi} f D_{\underline{y}}^{\psi})(\underline{y}-\underline{x}) dV(\underline{y}) = \int_{\partial\Omega_\epsilon} K_\psi(\underline{y}-\underline{x}) n_\psi(\underline{y})(f(\underline{y}) D_{\underline{y}}^{\psi})(\underline{y}-\underline{x}) dS(\underline{y})$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \psi^i \left[\int_{\partial\Omega_\epsilon} E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}_\psi(\underline{y})(f(\underline{y})D_{\underline{y}}^{\psi} dS(\underline{y})\right] \psi^i$$

$$- \sum_{i=1}^{m} \psi^i \left[\int_{\Omega_\epsilon} [E_1(\underline{y}-\underline{x})](D_{\underline{y}}^{\psi} f(\underline{y}) D_{\underline{y}}^{\psi}) dV(\underline{y})\right] \psi^i + 2\int_{\Omega_\epsilon} (f(\underline{y})D_{\underline{y}}^{\psi}) K_\psi(\underline{y}-\underline{x}) dV(\underline{y}).$$

Descomponiendo las integrales de superficie anteriores como

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon} = \int_\Gamma - \int_{\partial\overline{B}(\underline{x},\epsilon)}.$$

Pasando al límite

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\partial\overline{B}(\underline{x},\epsilon)} K_\psi(\underline{y}-\underline{x}) n_\psi(\underline{y})(f(\underline{y}) D_{\underline{y}}^{\psi})(\underline{y}-\underline{x}) dS(\underline{y}) = 0,$$

como también

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\partial\overline{B}(\underline{x},\epsilon)} E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}_\psi(\underline{y})(f(\underline{y})D_{\underline{y}}^{\psi} dS(\underline{y}) = 0.$$

Consecuentemente se obtiene

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\partial\Omega_\epsilon} K_\psi(\underline{y}-\underline{x}) n_\psi(\underline{y})(f(\underline{y}) D_{\underline{y}}^{\psi})(\underline{y}-\underline{x}) dS(\underline{y}) = \int_\Gamma K_\psi(\underline{y}-\underline{x}) n_\psi(\underline{y})(f(\underline{y}) D_{\underline{y}}^{\psi})(\underline{y}-\underline{x}) dS(\underline{y})$$

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\partial\Omega_\epsilon} E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}_\psi(\underline{y})(f(\underline{y})D_{\underline{y}}^{\psi} dS(\underline{y}) = \int_\Gamma E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}_\psi(\underline{y})(f(\underline{y})D_{\underline{y}}^{\psi} dS(\underline{y}).$$

La integrabilidad de las funciones que aparecen en las integrales de volumen, implica que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Omega_\epsilon} = \int_{\Omega}.$$

Haciendo $\epsilon \to 0$ se obtuvo

$$\int_\Omega K_\psi(\underline{y}-\underline{x})(D^\psi_{\underline{y}} f D^\psi_{\underline{y}})(\underline{y}-\underline{x})dV(\underline{y}) = \int_\Gamma K_\psi(\underline{y}-\underline{x})n_\psi(\underline{y})(f(\underline{y})D^\psi_{\underline{y}})(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y})$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\psi^i\left[\int_\Gamma E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}_\psi(\underline{y})(f(\underline{y})D^\psi_{\underline{y}}dS(\underline{y})\right]\psi^i$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\psi^i\left[\int_\Omega [E_1(\underline{y}-\underline{x})](D^\psi_{\underline{y}} f(\underline{y})D^\psi_{\underline{y}})dV(\underline{y})\right]\psi^i - 2\mathcal{T}^r_\psi(fD^\psi)(\underline{x}).$$

Usando la versión de la fórmula de Borel-Pompeiu se tiene que

$$-2\mathcal{T}^r_\psi(fD^\psi)(\underline{x}) = -2f(\underline{x}) + 2\mathcal{C}^r_\psi f(\underline{x}).$$

Despejando así $f(\underline{x})$ se obtiene el resultado esperado en 2.9. $\square$

De este hecho obtenemos una fórmula de representación de tipo Cauchy para funciones ψ-inframonogénicas, como se enuncia en el siguiente teorema

Teorema 4. *Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ un dominio de Jordan con frontera suave Γ y sea $f\in C^2(\Omega\cup\Gamma)$. Si f es además ψ-inframonogénica en Ω, entonces*

$$f(\underline{x}) = [\mathcal{C}^r_\psi f](\underline{x}) + [\mathcal{C}^{\textit{infra}}_\psi f D^\psi](\underline{x}). \tag{2.10}$$

Este resultado generaliza al obtenido en [14] para funciones inframonogénicas porque claramente estas son un caso especial de funciones ψ-inframonogénicas. Es de apreciar la semejanza de las fórmulas si tan solo se cambia el conjunto estructural que determina la naturaleza o clase de funciones.

2.1.1. Una representación para funciones (ϕ,ψ)-inframonogénicas

El siguiente teorema, generaliza el resultado obtenido anteriormente:

Teorema 5. *Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ un dominio de Jordan con frontera suave Γ y sea $f\in C^2(\Omega\cup\Gamma)$. Entonces se cumple que*

$$\Pi^r_{\phi,\psi}[f](\underline{x}) = [\mathcal{C}^r_{\phi,\psi}f](\underline{x}) + [\mathcal{C}^{\textit{infra}}_{\phi} fD^{\psi}](\underline{x}) + [\mathcal{T}^{\textit{infra}}_{\phi} D^{\phi}fD^{\psi}](\underline{x}), \tag{2.11}$$

donde

$$\Pi^r_{\phi,\psi} = \mathcal{T}^r_{\psi}D^{\phi}.$$

Demostración. Sea $\underline{x}\in\Omega$ y tomemos un $\epsilon>0$ tal que:

$$\overline{B}(\underline{x},\epsilon)=\{\underline{y}\in\mathbb{R}^m : |\underline{y}-\underline{x}|\leq\epsilon\}\subset\Omega.$$

Sea entonces $\Omega_\epsilon=\Omega\backslash\overline{B}(\underline{x},\epsilon)$ y sean:

$$\begin{aligned} I^\epsilon &= \int_{\Omega_\epsilon} K_\phi(\underline{y}-\underline{x})D^{\phi}_{\underline{y}}[(f(\underline{y})D^{\psi}_{\underline{y}})(\underline{y}-\underline{x})]dV(\underline{y}) \\ J^\epsilon &= \int_{\Omega_\epsilon}\sum_{i=1}^{m}[K_\phi(\underline{y}-\underline{x})]\phi^i(f(\underline{y})D^{\psi}_{\underline{y}})\phi^i dV(\underline{y}). \end{aligned}$$

Luego aplicando la versión de la fórmula de Stokes y según la ϕ-monogenicidad de K_ϕ se obtiene que

$$I^\epsilon = \int_{\partial\Omega_\epsilon} K_\phi(\underline{y}-\underline{x})n_\phi(\underline{y})(f(\underline{y})D^{\psi}_{\underline{y}})(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y}).$$

Del Lema1 se tiene que

$$J^\epsilon = \int_{\Omega_\epsilon}\sum_{i=1}^{m}\{-\phi^i[K_\phi(\underline{y}-\underline{x})](f(\underline{y})D^{\psi}_{\underline{y}})\phi^i + 2[K_\phi(\underline{y}-\underline{x})\phi^i]_0(f(\underline{y})D^{\psi}_{\underline{y}})\phi^i\}dV(\underline{y})$$

$$= -\sum_{i=1}^{m}\phi^i\left[\int_{\Omega_\epsilon}[K_\phi(\underline{y}-\underline{x})](f(\underline{y})D^{\psi})dV(\underline{y})\right]\phi^i - 2\int_{\Omega_\epsilon}(f(\underline{y})D^{\psi}_{\underline{y}})K_\phi(\underline{y}-\underline{x})dV(\underline{y}).$$

Aplicando la fórmula de Clifford-Stoke se llega a que

$$\int_{\Omega_\epsilon} E_1(\underline{y}-\underline{x})(D^{\phi}_{\underline{y}}f(\underline{y})D^{\psi}_{\underline{y}})dV(\underline{y}) + \int_{\Omega_\epsilon} K_\phi(\underline{y}-\underline{x})(f(\underline{y})D^{\psi}_{\underline{y}})dV(\underline{y})$$

$$= \int_{\partial\Omega_\epsilon} E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}_\phi(\underline{y})(f(\underline{y})D_{\underline{y}}^{\psi})dS(\underline{y}).$$

Entonces

$$J^\epsilon = \sum_{i=1}^{m} \phi^i \left[\int_{\Omega_\epsilon} [E_1(\underline{y}-\underline{x})](D_{\underline{y}}^{\phi} f(\underline{y}) D_{\underline{y}}^{\psi}) dV(\underline{y}) \right] \phi^i$$

$$- \sum_{i=1}^{m} \phi^i \left[\int_{\partial\Omega_\epsilon} E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}_\phi(\underline{y})(f(\underline{y})D_{\underline{y}}^{\psi})dS(\underline{y}) \right] \phi^i - 2\int_{\Omega_\epsilon} (f(\underline{y})D_{\underline{y}}^{\psi}) K_\phi(\underline{y}-\underline{x}) dV(\underline{y}).$$

Aplicando el Lema1 en la variante:

$$D_{\underline{y}}^{\phi}[(f(\underline{y})D_{\underline{y}}^{\psi})(\underline{y}-\underline{x})] = (D_{\underline{y}}^{\phi} f(\underline{y}) D_{\underline{y}}^{\psi})(\underline{y}-\underline{x}) + \sum_{i=1}^{m} \phi^i (f(\underline{y})D_{\underline{y}}^{\psi})\phi^i,$$

se tiene que

$$I^\epsilon - J^\epsilon = \int_{\Omega_\epsilon} K_\phi(\underline{y}-\underline{x})(D_{\underline{y}}^{\phi} f D_{\underline{y}}^{\psi})(\underline{y}-\underline{x}) dV(\underline{y}).$$

Luego se obtiene

$$\int_{\Omega_\epsilon} K_\phi(\underline{y}-\underline{x})(D_{\underline{y}}^{\phi} f D_{\underline{y}}^{\psi})(\underline{y}-\underline{x}) dV(\underline{y}) = \int_{\partial\Omega_\epsilon} K_\phi(\underline{y}-\underline{x}) n_\phi(\underline{y})(f(\underline{y})D_{\underline{y}}^{\psi})(\underline{y}-\underline{x}) dS(\underline{y})$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \phi^i \left[\int_{\partial\Omega_\epsilon} E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}_\phi(\underline{y})(f(\underline{y})D_{\underline{y}}^{\psi})dS(\underline{y}) \right] \phi^i$$

$$- \sum_{i=1}^{m} \phi^i \left[\int_{\Omega_\epsilon} [E_1(\underline{y}-\underline{x})](D_{\underline{y}}^{\phi} f(\underline{y}) D_{\underline{y}}^{\psi}) dV(\underline{y}) \right] \phi^i + 2\int_{\Omega_\epsilon} (f(\underline{y})D_{\underline{y}}^{\psi}) K_\phi(\underline{y}-\underline{x}) dV(\underline{y}).$$

Descomponiendo las integrales de superficie anteriores como

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon} = \int_\Gamma - \int_{\partial\overline{B}(\underline{x},\epsilon)}.$$

Pasando al límite se obtiene

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\partial\overline{B}(\underline{x},\epsilon)} K_\phi(\underline{y}-\underline{x}) n_\phi(\underline{y})(f(\underline{y})D_{\underline{y}}^{\psi})(\underline{y}-\underline{x}) dS(\underline{y}) = 0,$$

así como

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\partial\overline{B}(\underline{x},\epsilon)} E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}_\phi(\underline{y})(f(\underline{y})D_{\underline{y}}^{\psi})dS(\underline{y}) = 0.$$

Consecuentemente se obtiene

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\partial\Omega_\epsilon} K_\phi(\underline{y}-\underline{x})n_\phi(\underline{y})(f(\underline{y})D^\psi_{\underline{y}})(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y}) = \int_\Gamma K_\phi(\underline{y}-\underline{x})n_\phi(\underline{y})(f(\underline{y})D^\psi_{\underline{y}})(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y})$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\partial\Omega_\epsilon} E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}_\phi(\underline{y})(f(\underline{y})D^\psi_{\underline{y}})dS(\underline{y}) = \int_\Gamma E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}_\phi(\underline{y})(f(\underline{y})D^\psi_{\underline{y}})dS(\underline{y}).$$

La integrabilidad de las funciones que aparecen en las integrales de volumen, implica que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Omega_\epsilon} = \int_\Omega .$$

Haciendo $\epsilon \to 0$ se obtuvo

$$\begin{aligned}\int_\Omega K_\phi(\underline{y}-\underline{x})(D^\phi_{\underline{y}} f D^\psi_{\underline{y}})(\underline{y}-\underline{x})dV(\underline{y}) &= \int_\Gamma K_\phi(\underline{y}-\underline{x})n_\phi(\underline{y})(f(\underline{y})D^\psi_{\underline{y}})(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y})\\ &+\sum_{i=1}^m \phi^i\left[\int_\Gamma E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}_\phi(\underline{y})(f(\underline{y})D^\psi_{\underline{y}})dS(\underline{y})\right]\phi^i\\ &-\sum_{i=1}^m \phi^i\left[\int_\Omega [E_1(\underline{y}-\underline{x})](D^\phi_{\underline{y}} f(\underline{y})D^\psi)dV(\underline{y})\right]\phi^i - 2\mathcal{T}^r_\phi(fD^\psi)(\underline{x}).\end{aligned}$$

Usando la versión de la fórmula de Borel-Pompeiu generalizada1.15 para el caso por la derecha se tiene que

$$-2\mathcal{T}^r_\phi(fD^\psi)(\underline{x}) = -2\Pi^r_{\phi,\psi}[f](\underline{x}) + 2\mathcal{C}^r_{\phi,\psi}f(\underline{x}).$$

Despejando así $\Pi^r_{\phi,\psi}[f](\underline{x})$ se obtiene el resultado esperado en 2.11. □

Luego se llega al siguiente teorema específico para las funciones (ϕ, ψ)-inframonogénicas

Teorema 6. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un dominio de Jordan con frontera suave Γ y sea $f \in C^2(\Omega\cup\Gamma)$. Si f es además (ϕ, ψ)-inframonogénica en Ω, entonces*

$$\Pi^r_{\phi,\psi}[f](\underline{x}) = [\mathcal{C}^r_{\phi,\psi}f](\underline{x}) + [\mathcal{C}^{\textit{infra}}_\phi f D^\psi](\underline{x}), \tag{2.12}$$

donde

$$\Pi^r_{\phi,\psi} = \mathcal{T}^r_\psi D^\phi.$$

Observación 2. *Notemos que cuando $\phi = \psi$, es decir la función es ψ-inframonogénica y $f \in L_p(\Omega, \mathbb{R}_{0,m})$, $p \in (1, \infty)$, se tiene que $\Pi^r_{\psi,\psi}[f](\underline{x}) = f(\underline{x})$, si $\underline{x} \in \Omega$, según análogo para el caso derecho en [8], y como $\mathcal{C}^r_{\psi,\psi} = \mathcal{C}^r_{\psi}$, nos queda la fórmula a la que habíamos llegado en 2.10.*

Veamos el siguiente teorema análogo al que se demuestra en [8], pero su versión a la derecha.

Teorema 7. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ y $f \in L_p(\Omega, \mathbb{R}_{0,m})$, $p \in (1, \infty)$, entonces para todo $\underline{x} \in \Omega$ tenemos que*

$$\Pi^r_{\phi,\psi}[f](\underline{x}) = \int_\Omega f(\xi)\Lambda_{\phi,\psi}(\xi - \underline{x})d\xi - f(\underline{x})\frac{\sum_{i=1}^m \psi^i\phi^i}{m}, \tag{2.13}$$

donde $\Lambda_{\phi,\psi}(\xi - \underline{x}) := [E_1(\xi - \underline{x})]D^\psi_\xi D^\phi_{\underline{x}}$.

Luego podemos llegar a la siguiente proposición a partir de 2.12 y 2.13

Proposición 2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un dominio de Jordan con frontera suave Γ y $f \in C^2(\Omega \cup \Gamma)$. Si f es además (ϕ, ψ)-inframonogénica en Ω, entonces para todo $\underline{x} \in \Omega$ se cumple que*

$$f(\underline{x})\frac{\sum_{i=1}^m \psi^i\phi^i}{m} = \int_\Omega f(\xi)\Lambda_{\phi,\psi}(\xi - \underline{x})d\xi - [\mathcal{C}^r_{\phi,\psi} f](\underline{x}) - [\mathcal{C}^{\textit{infra}}_{\phi} f D^\psi](\underline{x}), \tag{2.14}$$

donde $\Lambda_{\phi,\psi}(\xi - \underline{x}) := [E_1(\xi - \underline{x})]D^\psi_\xi D^\phi_{\underline{x}}$.

En la sección siguiente se demuestran algunas propiedades básicas de los operadores integrales utilizados anteriormente.

2.1.2. Propiedades básicas de las transformadas de Cauchy y Teodorescu

Sea la función F definida en $\mathbb{R}^m \setminus \Gamma$ como

$$F(\underline{x}) = \mathcal{C}^{\textit{infra}}_{\phi} f(\underline{x}), \quad f \in C(\Gamma),$$

se probará que F es ϕ-inframonogénica en este dominio. Para ello, sea el siguiente Lema:

Lema 2. *Se cumplen las siguientes relaciones*

(1). $[\underline{x}BK_\phi(\underline{y}-\underline{x})]D^\phi = \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\phi^i BK_\phi(\underline{y}-\underline{x})\phi^i$

(2). $\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\phi^i E_1(\underline{y}-\underline{x})B\phi^i\right]D^\phi = 2K_\phi(\underline{y}-\underline{x})B + \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\phi^i BK_\phi(\underline{y}-\underline{x})\phi^i,$

donde B es un número de Clifford.

Demostración. Por cuestión de comodidad se entenderá por E_1 y K_ϕ como $E_1(\underline{y}-\underline{x})$ y $K_\phi(\underline{y}-\underline{x})$ respectivamente,

(1). $[\underline{x}BK_\phi]D^\phi = \displaystyle\sum_{i=1}^{m}[\phi^i BK_\phi + \underline{x}\partial_i(BK_\phi)]\phi^i = \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\phi^i BK_\phi\phi^i$

(2). $\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\phi^i E_1 B\phi^i\right]D^\phi = \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\phi^i B\phi^i E_1 D^\phi = -\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\phi^i B\phi^i K_\phi$, luego aplicando la relación (1) del Lema1 se obtiene lo deseado.

□

Teorema 8. *Sea Γ suave y sea $f \in C(\Gamma)$. Entonces*

$$[\mathcal{C}_\phi^{\textit{infra}} f(\underline{x})]D_{\underline{x}}^\phi = \mathcal{C}_\phi^l f(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \Gamma. \tag{2.15}$$

En particular, $\mathcal{C}_\phi^{\textit{infra}} f$ es ϕ-inframonogénica en $\mathbb{R}^m \setminus \Gamma$.

Demostración. Primeramente se observó que

$$\int_\Gamma K_\phi(\underline{y}-\underline{x})n_\phi(\underline{y})f(\underline{y})(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y}) = \int_\Gamma (\underline{y}-\underline{x})n_\phi(\underline{y})f(\underline{y})K_\phi(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y}).$$

Entonces,

$$[\mathcal{C}_\phi^0 f(\underline{x})]D_{\underline{x}}^\phi = [\int_\Gamma (\underline{y}-\underline{x})n_\phi(\underline{y})f(\underline{y})K_\phi(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y})]D_{\underline{x}}^\phi = -\int_\Gamma [\underline{x}n_\phi(\underline{y})f(\underline{y})K_\phi(\underline{y}-\underline{x}]D_{\underline{x}}^\phi dS(\underline{y}).$$

Luego aplicando la relación (1) del Lema 2 se tiene que

$$[\mathcal{C}^0_\phi f(\underline{x})]D^\phi_{\underline{x}} = -\sum_{i=1}^m \phi^i \int_\Gamma n_\phi(\underline{y})f(\underline{y})K_\phi(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y})\phi^i.$$

Ahora se calculó $[\mathcal{C}^1_\phi f(\underline{x})]D^\phi_{\underline{x}}$ como,

$$\begin{aligned}[\mathcal{C}^1_\phi f(\underline{x})]D^\phi_{\underline{x}} &= [\sum_{i=1}^m \phi^i \int_\Gamma E_1(\underline{y}-\underline{x})n_\phi(\underline{y})f(\underline{y})dS(\underline{y})\phi^i]D^\phi_{\underline{x}} \\ &= \sum_{i=1}^m \int_\Gamma [\phi^i E_1(\underline{y}-\underline{x})n_\phi(\underline{y})f(\underline{y})\phi^i]D^\phi_{\underline{x}} dS(\underline{y}).\end{aligned}$$

Usando la proposición (2) del Lema 2 se llega a

$$[\mathcal{C}^1_\phi f(\underline{x})]D^\phi_{\underline{x}} = 2\sum_{i=1}^m \int_\Gamma K_\phi(\underline{y}-\underline{x})n_\phi(\underline{y})f(\underline{y})dS(\underline{y}) + \sum_{i=1}^m \phi^i \int_\Gamma n_\phi(\underline{y})f(\underline{y})K_\phi(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y})\phi^i.$$

Por tanto,

$$[\mathcal{C}^{\textit{infra}}_\phi f(\underline{x})]D^\phi_{\underline{x}} = \frac{1}{2}\{[\mathcal{C}^0_\phi f(\underline{x})]D^\phi_{\underline{x}} + [\mathcal{C}^1_\phi f(\underline{x})]D^\phi_{\underline{x}}\} = \mathcal{C}^l_\phi f(\underline{x}).$$

La ϕ-inframonogenicidad de $\mathcal{C}^{\textit{infra}}_\phi f$ es obvia debido a la ϕ-monogenicidad por la izquierda de $\mathcal{C}^l_\phi f$. □

Debido a la estructura similar de $\mathcal{C}^{\textit{infra}}_\phi f$ y $\mathcal{T}^{\textit{infra}}_\phi f$ y mediante un cálculo análogo al realizado se llega a que

$$[\mathcal{T}^{\textit{infra}}_\phi f(\underline{x})]D^\phi_{\underline{x}} = \mathcal{T}^l_\phi f(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\Omega \cup \Gamma\}, \tag{2.16}$$

y por la ϕ-monogenicidad por la izquierda de $\mathcal{T}^l_\phi f$, claramente implica la ϕ-inframonogenicidad de $\mathcal{T}^{\textit{infra}}_\phi f$ en $\mathbb{R}^m \setminus \{\Omega \cup \Gamma\}$.

La relación descrita en 2.16 es válida también en Ω debido a las características de las singularidades del integrando en $\mathcal{T}^{\textit{infra}}_\phi f$. Una generalización al resultado que se obtiene en el Teorema 8.2 en [18] es: $D^\phi_{\underline{x}}[\mathcal{T}^l_\phi f] = f$ en Ω, con ello se obtiene la identidad:

$$D^\phi_{\underline{x}}[\mathcal{T}^{\textit{infra}}_\phi f(\underline{x})]D^\phi_{\underline{x}} = f(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Omega. \tag{2.17}$$

Obsérvese lo siguiente:

$$\Pi^r_{\phi,\psi}[f](\underline{x})D^\phi_{\underline{x}} = [f(\underline{x})]\mathcal{T}^r_\psi D^\phi D^\phi = [f(\underline{x})]\mathcal{T}^r_\psi D^\psi D^\psi = [f(\underline{x})]D^\psi. \tag{2.18}$$

Luego según la fórmula obtenida en 2.11 se tiene precisamente que

$$[f(\underline{x})]D^{\psi} = [\mathcal{C}_{\phi}^{\textit{infra}} f(\underline{x})D_{\underline{x}}^{\psi}]D_{\underline{x}}^{\phi} + [\mathcal{T}_{\phi}^{\textit{infra}} D_{\underline{x}}^{\phi} f(\underline{x})D_{\underline{x}}^{\psi}]D_{\underline{x}}^{\phi}. \tag{2.19}$$

Utilizando las relaciones 2.15 y 2.16 se obtiene

$$[f(\underline{x})]D^{\psi} = \mathcal{C}_{\phi}^{l}[f(\underline{x})D_{\underline{x}}^{\psi}] + \mathcal{T}_{\phi}^{l}[D_{\underline{x}}^{\phi} f(\underline{x})D_{\underline{x}}^{\psi}], \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\Omega \cup \Gamma\}.$$

Como se puede observar cuando se aplica el operador $D_{\underline{x}}^{\phi}$ por la izquierda en 2.19 se obtiene una identidad. Véase que cuando f es (ϕ,ψ)-inframonogénica se llega a que

$$[f(\underline{x})]D_{\underline{x}}^{\psi} = \mathcal{C}_{\phi}^{l}[f(\underline{x})D_{\underline{x}}^{\psi}], \quad \underline{x} \notin \Gamma. \tag{2.20}$$

Lo cual es claramente la fórmula de representación para la función $[f(\underline{x})]D_{\underline{x}}^{\psi}$, que como sabemos es ϕ-monogénica, ya que f es (ϕ,ψ)-inframonogénica.

Apréciese ahora un hecho bastante interesante. Cuando f es (ϕ,ψ)-inframonogénica, de acuerdo con 2.18 se tiene que $\Pi_{\phi,\psi}^{r}[f]$ es ϕ-inframonogénica para el mismo dominio. Luego se puede aplicar la fórmula descrita en 2.10 para el caso del conjunto estructural ϕ. Se obtuvo lo siguiente:

$$\Pi_{\phi,\psi}^{r}[f](\underline{x}) = [\mathcal{C}_{\phi}^{r}\Pi_{\phi,\psi}^{r} f](\underline{x}) + \{\mathcal{C}_{\phi}^{\textit{infra}}[(\Pi_{\phi,\psi}^{r} f)D^{\phi}]\}(\underline{x}).$$

Lo cual es equivalente a:

$$\Pi_{\phi,\psi}^{r}[f](\underline{x}) = [\mathcal{C}_{\phi}^{r}\Pi_{\phi,\psi}^{r} f](\underline{x}) + [\mathcal{C}_{\phi}^{\textit{infra}}(fD^{\psi})](\underline{x}).$$

Luego por la validez de 2.12 se concluye con el teorema siguiente:

Teorema 9. *Si $f \in C^1(\Omega \cup \Gamma)$, Γ suave, se evidencia la relación*

$$[\mathcal{C}_{\phi,\psi}^{r} f](\underline{x}) = [\mathcal{C}_{\phi}^{r}\Pi_{\phi,\psi}^{r} f](\underline{x}), \quad \underline{x} \notin \Gamma. \tag{2.21}$$

Otra de las interesantes propiedades de Π-operador que se aprecia en Corolario 4 en [8] es:

$$\Pi_{\phi,\psi}^{r}\Pi_{\psi,\phi}^{r}[f] = f. \tag{2.22}$$

Si se aplica $\Pi^r_{\psi,\phi}[f]$ en 2.11 se obtiene que

$$f(\underline{x}) = [\mathcal{C}^r_{\phi,\psi}\Pi^r_{\psi,\phi}f](\underline{x}) + [\mathcal{C}^{infra}_{\phi} f D^{\phi}](\underline{x}) + [\mathcal{T}^{infra}_{\phi} D^{\phi} f D^{\phi}](\underline{x}),$$

y aplicando la relación obtenida en 2.21 se obtiene la ya conocida representación con respecto al conjunto estructural ϕ para f obtenida en 2.9.

Según [17] se tiene que la solución fundamental del operador $D^{\phi}D^{\psi}[.]$ es:

$$K_{\phi,\psi}(\underline{x}) := D^{\psi}D^{\phi}[\Theta^2_m],$$

donde Θ^2_m, como se había mencionado, no es más que la solución fundamental del operador laplaciano iterado dos veces Δ^2_m, el cual se calcula como

$$\Theta^2_m(\underline{x}) = \frac{|\underline{x}|^{2k-m}}{2\sigma_m(2-m)(4-m)}.$$

Según la proposición 2 de [17] se tiene que

$$K_{\phi,\psi}(\underline{x}) = \frac{P_{\psi,\phi}(\underline{x})}{2\sigma_m|\underline{x}|^m},$$

donde $P_{\psi,\phi}(\underline{x})$ es un polinomio homogéneo de grado 2.

Uno de los importantes resultados de [17] es precisamente que si $f \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}_{0,m})$ se cumple que

$$f(x) = \int_{\Gamma} K_{\psi}(\underline{y}-\underline{x})n_{\psi}(\underline{y})f(\underline{y})dS(\underline{y}) - \int_{\Gamma} K_{\phi,\psi}(\underline{y}-\underline{x})n_{\phi}(\underline{y})D^{\psi}f(\underline{y})dS(\underline{y})$$
$$+ \int_{\Omega} K_{\phi,\psi}(\underline{y}-\underline{x})D^{\phi}D^{\psi}f(\underline{y})dV(\underline{y}).$$

Luego se aplicó esta fórmula a la función $[\mathcal{T}^l_{\psi}f]D^{\psi}$, acorde a que sea de clase $C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}_{0,m})$ obteniendo lo siguiente

$$[\mathcal{T}^l_{\psi}f]D^{\psi}(\underline{x}) = \int_{\Gamma} K_{\psi}(\underline{y}-\underline{x})n_{\psi}(\underline{y})[\mathcal{T}^l_{\psi}f]D^{\psi}(\underline{y})dS(\underline{y}) - \int_{\Gamma} K_{\phi,\psi}(\underline{y}-\underline{x})n_{\phi}(\underline{y})f(\underline{y})D^{\psi}dS(\underline{y})$$
$$+ \int_{\Omega} K_{\phi,\psi}(\underline{y}-\underline{x})D^{\phi}f(\underline{y})D^{\psi}dV(\underline{y}).$$

Aplicando la fórmula de Borel-Pomepeiu 1.10 se tiene que

$$\int_{\Gamma} K_{\psi}(\underline{y}-\underline{x})n_{\psi}(\underline{y})[\mathcal{T}^l_{\psi}f]D^{\psi}(\underline{y})dS(\underline{y}) = [\mathcal{T}^l_{\psi}f]D^{\psi}(\underline{x}) + \int_{\Omega} K_{\psi}(\underline{y}-\underline{x})[fD^{\psi}](\underline{y})dV(\underline{y}), \quad \underline{x} \in \Omega.$$

Es claro entonces que se cumple que

$$\int_{\Omega} K_{\psi}(\underline{y}-\underline{x})[fD^{\psi}](\underline{y})dV(\underline{y}) + \int_{\Omega} K_{\phi,\psi}(\underline{y}-\underline{x})D^{\phi}f(\underline{y})D^{\psi}dV(\underline{y})$$

$$= \int_{\Gamma} K_{\phi,\psi}(\underline{y}-\underline{x})n_{\phi}(\underline{y})f(\underline{y})D^{\psi}dS(\underline{y}).$$

Luego cuando f es (ϕ,ψ)-inframonogénica se tiene la relación

$$\int_{\Omega} K_{\psi}(\underline{y}-\underline{x})[fD^{\psi}](\underline{y})dV(\underline{y}) = \int_{\Gamma} K_{\phi,\psi}(\underline{y}-\underline{x})n_{\phi}(\underline{y})f(\underline{y})D^{\psi}dS(\underline{y}).$$

Es decir:

$$[\mathcal{T}^{l}_{\psi}fD^{\psi}](\underline{x}) = -\int_{\Gamma} K_{\phi,\psi}(\underline{y}-\underline{x})n_{\phi}(\underline{y})f(\underline{y})D^{\psi}dS(\underline{y}), \quad \underline{x}\in\Omega. \tag{2.23}$$

Es claro que si f es (ϕ,ψ)-inframonogénica se tiene que fD^{ψ} también lo es. Por lo tanto de acuerdo a 2.23 se tiene que

$$[\mathcal{T}^{l}_{\psi}fD^{\psi}D^{\psi}](\underline{x}) = -\int_{\Gamma} K_{\phi,\psi}(\underline{y}-\underline{x})n_{\phi}(\underline{y})f(\underline{y})D^{\psi}D^{\psi}dS(\underline{y}), \quad \underline{x}\in\Omega.$$

O sea,

$$[\mathcal{T}^{l}_{\psi}D^{\psi}D^{\psi}f](\underline{x}) = \int_{\Gamma} K_{\phi,\psi}(\underline{y}-\underline{x})n_{\phi}(\underline{y})\Delta f(\underline{y})dS(\underline{y}), \quad \underline{x}\in\Omega.$$

Luego aplicando la fórmula de Borel-Pompeiu 1.10 se llega a que:

$$D^{\psi}f - \mathcal{C}^{l}_{\psi}[D^{\psi}f] = \int_{\Gamma} K_{\phi,\psi}(\underline{y}-\underline{x})n_{\phi}(\underline{y})\Delta f(\underline{y})dS(\underline{y}), \quad \underline{x}\in\Omega.$$

Es decir se tuvo una apreciable relación,

$$D^{\psi}f = \mathcal{C}^{l}_{\psi}[D^{\psi}f] + \int_{\Gamma} K_{\phi,\psi}(\underline{y}-\underline{x})n_{\phi}(\underline{y})\Delta f(\underline{y})dS(\underline{y}), \quad \underline{x}\in\Omega. \tag{2.24}$$

Véase que cuando f es (ϕ,ψ)-inframonogénica entonces $D^{\psi}f$ es ψ-inframonogénica, por lo que aplicando la fórmula de representación descrita en 2.10 se tiene que

$$\mathcal{C}^{r}_{\psi}[D^{\psi}f]+\mathcal{C}^{\textit{infra}}_{\psi}[D^{\psi}fD^{\psi}] = \mathcal{C}^{l}_{\psi}[D^{\psi}f]+\int_{\Gamma} K_{\phi,\psi}(\underline{y}-\underline{x})n_{\phi}(\underline{y})\Delta f(\underline{y})dS(\underline{y}), \quad \underline{x}\in\Omega. \tag{2.25}$$

Obsérvese una peculiaridad en 2.24 y es que como fD^{ψ} es (ϕ,ψ)-inframonogénica cuando f lo es también se tiene que

$$D^{\psi}fD^{\psi} = \mathcal{C}^{l}_{\psi}[D^{\psi}fD^{\psi}], \quad \underline{x}\in\Omega.$$

Esto es evidente ya que $D^{\psi} f D^{\psi}$ es ψ-monogénica por la izquierda cuando f es (ϕ,ψ)-inframonogénica, pero una vez más se observa la crucial diferencia entre la funciones ψ-inframonogénicas y las (ϕ,ψ)-inframonogénica.
Nótese que según la fórmula de Borel-Pompeiu en su versión a la derecha y la representación 2.9, cuando f es (ϕ,ψ)-inframonogénica implica la siguiente relación:

$$\mathcal{C}_{\psi}^{\textit{infra}}[D^{\psi} f D^{\psi}] = \mathcal{T}_{\psi}^{r}[D^{\psi} f D^{\psi}]. \tag{2.26}$$

Las funciones (ϕ,ψ)-inframonogénicas provocan, debido a su naturaleza, modificaciones estructurales en la mayoría de los operadores usados que actúan sobre ellas.

2.1.3. Descomposición de tipo Almansi para funciones (ϕ,ψ)-inframonogénicas

Almansi [1] descubrió in 1898 que cualquier función poliarmónica (de grado k) f en un dominio con forma de estrella $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ (con respecto al 0) puede ser descompuesta como

$$f(\underline{x}) = f_0(\underline{x}) + |\underline{x}|^2 f_1(\underline{x}) + \cdots + |\underline{x}|^{2(k-1)} f_{k-1}(\underline{x}),$$

donde $f_0, \ldots, f_{k-1}$ son armónicas en Ω.

Un dominio es llamado con forma de estrella con respecto al punto $\underline{x}_0$ si cualquier punto $\underline{x} \in \Omega$ puede ser conectado con $\underline{x}_0$ mediante un segmento contenido en Ω.

Se llama función poliarmónica de grado k aquella que anula las k- iteraciones del operador de Laplace Δ_m. En particular, las funciones biarmónicas requieren especial atención por sus importantes aplicaciones en Física e Ingeniería.

Recientemente en [13] los autores establecieron una descomposición tipo Almansi en un dominio con forma de estrella para las llamadas funciones polimonogénicas (k-monogénicas funciones).

Acorde al Teorema 2.1 en [13], todas las funciones polimonogénicas f en un dominio con forma de estrella Ω pueden ser descompuestas de forma única como

$$f(\underline{x}) = f_1(\underline{x}) + \underline{x}\, f_2(\underline{x}) + \cdots + \underline{x}^{k-1} f_{k-1},$$

donde $f_1,\ldots,f_{k-1}$ son monogénicas por la izquierda en Ω.
Véase las siguientes proposiciones:

Proposición 3. *Sea f_1 ϕ-monogénica por la izquierda, f_2 ψ-monogénica por la derecha, y f_3,f_4 ambas ϕ-monogénica por la izquierda y ψ-monogénica por la derecha en Ω, entonces la función*

$$f = f_1 + f_2 + f_3\underline{x}_\psi + \underline{x}_\phi f_4,$$

donde $\underline{x}_\phi = \sum_{i=1}^m \phi^i x_i$ y $\underline{x}_\psi = \sum_{i=1}^m \psi^i x_i$, es a la vez (ϕ,ψ)-inframonogénica y armónica.

Demostración. Veamos que

$$D^\phi f = D^\phi f_2 + D^\phi(f_3\underline{x}_\psi) + D^\phi(\underline{x}_\phi f_4).$$

Pero como, $D^\phi(f_3\underline{x}_\psi) = (D^\phi f_3)\underline{x}_\psi + \omega(f_3)$ y $(\underline{x}_\phi f_4)D^\psi = \underline{x}_\phi(f_4 D^\psi) + \omega(f_4)$, entonces se tiene que

$$D^\phi f D^\psi = \omega(f_3)D^\psi + D^\phi\omega(f_4) = -2D^\phi f_3 - \omega(f_3 D^\psi) - 2f_4 D^\psi - \omega(D^\phi f_4) = 0.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\Delta f &= -D^\phi D^\phi(f_3\underline{x}_\psi) - (\underline{x}_\psi f_4)D^\psi D^\psi = -D^\phi\omega(f_3) - \omega(f_4)D^\psi \\ &= 2f_3D^\psi + \omega(D^\phi f_3) + 2D^\phi f_4 + \omega(f_4 D^\psi) \\ &= 0\end{aligned}$$

□

Una proposición análoga a la anterior es la siguiente:

Proposición 4. *Sea f_1 ψ-monogénica por la izquierda, f_2 ϕ-monogénica por la derecha, y f_3,f_4 ambas ψ-monogénica por la izquierda y ϕ-monogénica por la derecha en Ω, entonces la función*

$$f = f_1 + f_2 + f_3\underline{x}_\phi + \underline{x}_\psi f_4,$$

donde $\underline{x}_\phi = \sum_{i=1}^m \phi^i x_i$ y $\underline{x}_\psi = \sum_{i=1}^m \psi^i x_i$, es a la vez (ψ,ϕ)-inframonogénica y armónica.

Demostración. Veamos que

$$D^\psi f = D^\psi f_2 + D^\psi(f_3\underline{x}_\phi) + D^\psi(\underline{x}_\psi f_4).$$

Pero como, $D^\psi(f_3\underline{x}_\phi) = (D^\psi f_3)\underline{x}_\phi + \widetilde{\omega}(f_3)$ y $(\underline{x}_\psi f_4)D^\phi = \underline{x}_\psi(f_4 D^\phi) + \widetilde{\omega}(f_4)$, entonces se tiene que

$$D^\psi f D^\phi = \widetilde{\omega}(f_3)D^\phi + D^\psi\widetilde{\omega}(f_4) = -2D^\psi f_3 - \widetilde{\omega}(f_3 D^\phi) - 2f_4 D^\phi - \widetilde{\omega}(D^\psi f_4) = 0.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\Delta f &= -D^\psi D^\psi(f_3\underline{x}_\phi) - (\underline{x}_\psi f_4)D^\phi D^\phi = -D^\psi\widetilde{\omega}(f_3) - \widetilde{\omega}(f_4)D^\phi \\ &= 2f_3 D^\phi + \widetilde{\omega}(D^\psi f_3) + 2D^\psi f_4 - \widetilde{\omega}(f_4 D^\phi) \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Por tanto, dependiendo de cómo sean las funciones f_1, f_2, f_3 y f_4, será la función f. Apréciese que siguiendo esta estructura de la función f no se puede construir ésta de manera tal que sea a la vez (ϕ,ψ)-inframonogénica y (ϕ,ψ)-armónica por la izquierda o por la derecha, o que sea (ψ,ϕ)-inframonogénica y (ψ,ϕ)-armónica por la izquierda o por la derecha.

2.2. Sistema generalizado de Lamé-Navier

En [15] se ha establecido una reescritura del sistema de Lamé-Navier en términos del siguiente operador:

$$\mathcal{L}^*_{\lambda,\mu}\vec{u} := \eta_1 D_{\underline{x}}\vec{u}D_{\underline{x}} + \eta_2 D_{\underline{x}}D_{\underline{x}}\vec{u},$$

donde $\eta_1 = \frac{\mu+\lambda}{2}$ y $\eta_2 = \frac{3\mu+\lambda}{2}$. Ya que precisamente

$$D^2_{\underline{x}}\vec{u} = -\textit{grad}(\textit{div}\,\vec{u}) + \textit{rot}(\textit{rot}\,\vec{u}),$$

$$D_{\underline{x}}\vec{u}D_{\underline{x}} = -\textit{grad}(\textit{div}\,\vec{u}) - \textit{rot}(\textit{rot}\,\vec{u}).$$

Luego generalizando este operador de forma natural para conjuntos estructurales ϕ y ψ se tiene el siguiente:

$$\mathcal{L}^*_{\substack{\phi,\psi\\ \alpha,\beta}}\vec{u} := \alpha D^\phi \vec{u} D^\psi + \beta D^\phi D^\psi \vec{u}, \tag{2.27}$$

en el cual también sus coeficientes dependerán de μ y λ de la misma forma que η_1 y η_2. Luego el sistema

$$\mathcal{L}^*_{\substack{\phi,\psi\\ \alpha,\beta}}\vec{u} := \alpha D^\phi \vec{u} D^\psi + \beta D^\phi D^\psi \vec{u} = 0, \tag{2.28}$$

se nombró sistema generalizado de Lamé-Navier. A continución se explicará por qué se llegó a este nombre.

Claramente como $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, entonces admite la representación $\vec{u} = \psi^1 u_1 + \psi^2 u_2 + \psi^3 u_3$, donde $\psi^i \in \psi \ \forall i = \overline{1,3}$ y $u_i, i = \overline{1,3}$, son sus respectivas funciones escalares componentes con relación al conjunto estructural ψ. Véase que

$$\vec{u}D^\psi = \sum_{i,j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\psi^j\psi^i = -\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \sum_{i\neq j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\psi^j\psi^i,$$

$$D^\psi\vec{u} = \sum_{i,j} \psi^i\psi^j\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = -\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \sum_{i\neq j}\psi^i\psi^j\frac{\partial u_j}{\partial x_i}.$$

Por tanto,

$$D^\phi\vec{u}D^\psi = -\sum_{i,j}\phi^i\frac{\partial u_j}{\partial x_i\partial x_j} + \sum_{\substack{i,j,k\\ i\neq j}}\phi^k\psi^j\psi^i\frac{\partial u_j}{\partial x_i\partial x_k},$$

$$D^\phi D^\psi\vec{u} = -\sum_{i,j}\phi^i\frac{\partial u_j}{\partial x_i\partial x_j} - \sum_{\substack{i,j,k\\ i\neq j}}\phi^k\psi^j\psi^i\frac{\partial u_j}{\partial x_i\partial x_k}.$$

Se definieron entonces por la naturaleza intrínseca de su forma las siguientes generalizaciones de lo que hoy se conoce como gradiente para una función escalar g y divergencia de un campo vectorial $\vec{u}$;

$$\textit{grad}_\phi g := D^\phi g,$$

$$\textit{div}_\psi\vec{u} := \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

Entonces es claro que,

$$D^{\phi}\vec{u}D^{\psi} + D^{\phi}D^{\psi}\vec{u} = -2\textit{grad}_{\phi}(\textit{div}_{\psi}\vec{u})$$

y

$$D^{\phi}\vec{u}D^{\psi} - D^{\phi}D^{\psi}\vec{u} = 2\sum_{\substack{i,j,k\\ i\neq j}} \phi^k\psi^j\psi^i\frac{\partial u_j}{\partial x_i\partial x_k}.$$

Pero este último resultado tiene mucha semejanza al rotacional del rotacional de un campo vectorial, y lo lleva en su interior para el caso clásico, o sea, $\phi = \psi = \{e_1, e_2, e_3\}$. Se denotó a $\sum_{\substack{i,j,k\\ i\neq j}} \phi^k\psi^j\psi^i\frac{\partial u_j}{\partial x_i\partial x_k} := \textit{rot}_{\phi,\psi}\vec{u}$, luego se tiene que el sistema generalizado de Lamé-Navier sintetiza lo siguiente:

$$(\alpha+\beta)\textit{grad}_{\phi}(\textit{div}_{\psi}\vec{u}) + (\beta-\alpha)\textit{rot}_{\phi,\psi}\vec{u} = 0.$$

Debido a todos estos resultados que hacen visibles marcadas semejanzas con el sistema clásico de Lamé-Navier se nombró a 2.28 como sistema generalizado de Lamé-Navier. El alto grado de flexibilidad que supone la consideración de conjuntos estructurales arbitrarios en la ecuación de Lamé-Navier generalizada, sugiere que este sistema puede conducir a una amplia gama de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales que podrían tener un interés no solo matemático sino dentro de la Física.

Proposición 5. *Si un campo vectorial $\vec{u} \in C^3(\Omega)$ es solución del sistema generalizado de Lamé-Navier, o sea, $\vec{u} \in \mathtt{Ker}[\mathcal{L}^{*}_{\substack{\phi,\psi\\ \alpha,\beta}}]$, entonces $\vec{u}$ es 3-ψ-monogénica.*

Demostración. Si $\vec{u}$ es solución del sistema de Lamé-Navier, entonces:

$$\mathcal{L}^{*}_{\substack{\phi,\psi\\ \alpha,\beta}}\vec{u} := \alpha D^{\phi}\vec{u}D^{\psi} + \beta D^{\phi}D^{\psi}\vec{u} = 0,$$

luego

$$\alpha D^{\phi}D^{\phi}\vec{u}D^{\psi} + \beta D^{\phi}D^{\phi}D^{\psi}\vec{u} = 0,$$

esta relación es equivalente a

$$\alpha\vec{u}D^{\psi}D^{\phi}D^{\phi} + \beta D^{\psi}D^{\psi}D^{\psi}\vec{u} = 0.$$

Pero como $\vec{u}D^{\psi}D^{\phi} = -\frac{\alpha}{\beta}D^{\psi}\vec{u}D^{\phi}$, se obtiene:

$$-\frac{\alpha^2}{\beta}D^{\psi}\vec{u}D^{\phi}D^{\phi} + \beta D^{\psi}D^{\psi}D^{\psi}\vec{u} = 0.$$

Por tanto,

$$(\beta - \frac{\alpha^2}{\beta})D^{\psi}D^{\psi}D^{\psi}\vec{u} = 0.$$

Debido a que se obtiene una contradicción con los coeficientes de Lamé entonces necesariamente $\beta - \frac{\alpha^2}{\beta} \neq 0$, concluyendo así que $D^{\psi}D^{\psi}D^{\psi}\vec{u} = \vec{u}D^{\psi}D^{\psi}D^{\psi} = 0$. □

Sea $\psi = \{\psi^1, \psi^2, ..., \psi^m\}$ un conjunto estructural, denotando por $\psi_A = \psi_{i_1,...,i_k} = \prod_{j=1}^{k} \psi^{i_j}$, tal que $|A| = k$, $i_j \in \mathbb{N}_m \forall j \in \overline{1,k}$ y $i_1 < i_2 < ... < i_k$. Sea la función $S_k : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_{0,m}$, $S_k = \sum_A \psi_A[S_k]_A$, donde $[S_k]_A$ son las respectivas funciones componentes de S_k con relación a ψ_A. Se definieron en lo adelante las siguientes funciones peculiares:

$$\nu(f) = \sum_{i=1}^{m} \psi^i f \psi^i, \quad \omega(f) = \sum_{i=1}^{m} \phi^i f \psi^i, \quad \widetilde{\omega}(f) = \sum_{i=1}^{m} \psi^i f \phi^i.$$

El siguiente lema es crucial para la prueba de los resultados que a continuación se expondrán.

Lema 3. *Sea $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_{0,m}$, $\underline{x} = \sum_{i=1}^{m} \psi^i x_i$, donde $\psi^i, i = \overline{1,m}$, son los elementos del conjunto estructural ψ, $x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,m}$, y $S_k = \sum_A \psi_A[S_k]_A$, entonces:*

(1). $D^{\psi}(f\underline{x}) = (D^{\psi}f)\underline{x} + \nu(f), \quad (\underline{x}f)D^{\psi} = \underline{x}(fD^{\psi}) + \nu(f)$

(2). $D^{\psi}[\nu(f)] = -2fD^{\psi} - \nu(D^{\psi}f), \quad [\nu(f)]D^{\psi} = -2D^{\psi}f - \nu(fD^{\psi})$

(3). $D^{\psi}[\nu(f)]D^{\psi} = \nu(D^{\psi}fD^{\psi}), \quad [\nu(f)]D^{\psi}D^{\psi} = -\Delta\nu(f) = \nu(D^{\psi}D^{\psi}f) = -\nu(\Delta f)$

(4). $[\omega(f)]D^{\psi}D^{\psi} = -\Delta\omega(f) = \omega(D^{\psi}D^{\psi}f) = -\omega(\Delta f)$

(5). $\nu(S_k) = (-1)^{k+1}(m-2k)S_k$

(6). $D^{\phi}\omega(f) = -2fD^{\psi} - \omega(D^{\phi}f), \quad \omega(f)D^{\psi} = -2D^{\phi}f - \omega(fD^{\psi})$

(7). $D^{\phi}[\omega(f)]D^{\psi} = \omega(D^{\phi}fD^{\psi})$

(8). $D^{\phi}(f\underline{x}) = (D^{\phi}f)\underline{x} + \omega(f), \qquad (\underline{x}f)D^{\phi} = \underline{x}(fD^{\phi}) + \widetilde{\omega}(f)$

(9). $D^{\psi}D^{\phi}[\omega(f)] = -2D^{\psi}fD^{\psi} - D^{\psi}[\omega(D^{\phi}f)]$

(10). $\omega(D^{\phi}D^{\psi}f) = -2D^{\psi}fD^{\psi} - D^{\phi}[\omega(D^{\psi}f)]$

Demostración.

(1).

$$\begin{aligned}
D^{\psi}(f\underline{x}) &= \sum_{i=1}^{m} \psi^i \frac{\partial(f\underline{x})}{\partial x_i} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \psi^i \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\underline{x} + f\psi^i\right] \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} \psi^i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\underline{x} + \sum_{i=1}^{m} \psi^i f \psi^i \\
&= (D^{\psi}f)\underline{x} + \nu(f).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\underline{x}f)D^{\psi} &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(\underline{x}f)}{\partial x_i}\psi^i \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left[\psi^i f + \underline{x}\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]\psi^i \\
&= \underline{x}\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}\psi^i\right) + \sum_{i=1}^{m} \psi^i f \psi^i \\
&= \underline{x}(fD^{\psi}) + \nu(f).
\end{aligned}$$

(2).

$$
\begin{aligned}
D^{\psi}[\nu(f)] &= D^{\psi}(\sum_{i=1}^{m} \psi^i f \psi^i) \\
&= \sum_{1\leq i,j\leq m} \psi^j \psi^i (\partial_{x_j} f) \psi^i \\
&= \sum_{\substack{i=j \\ 1\leq i,j\leq m}} \psi^j \psi^i (\partial_{x_j} f) \psi^i + \sum_{\substack{i\neq j \\ 1\leq i,j\leq m}} \psi^j \psi^i (\partial_{x_j} f) \psi^i \\
&= -\sum_{i=1}^{m} (\partial_{x_i} f) \psi^i - \sum_{\substack{i\neq j \\ 1\leq i,j\leq m}} \psi^i \psi^j (\partial_{x_j} f) \psi^i \\
&= -\sum_{i=1}^{m} (\partial_{x_i} f) \psi^i - (\sum_{1\leq i,j\leq m} \psi^i \psi^j (\partial_{x_i} f) \psi^i - \sum_{\substack{i=j \\ 1\leq i,j\leq m}} \psi^i \psi^j (\partial_{x_i} f) \psi^i) \\
&= -2\sum_{i=1}^{m} (\partial_{x_i} f) \psi^i - \sum_{1\leq i,j\leq m} \psi^i \psi^j (\partial_{x_i} f) \psi^i \\
&= -2 f D^{\psi} - \nu(D^{\psi} f).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\nu(f)] D^{\psi} &= (\sum_{i=1}^{m} \psi^i f \psi^i) D^{\psi} \\
&= \sum_{1\leq i,j\leq m} \psi^i (\partial_{x_j} f) \psi^i \psi^j \\
&= \sum_{\substack{i=j \\ 1\leq i,j\leq m}} \psi^i (\partial_{x_j} f) \psi^i \psi^j + \sum_{\substack{i\neq j \\ 1\leq i,j\leq m}} \psi^i (\partial_{x_j} f) \psi^i \psi^j \\
&= -\sum_{i=1}^{m} \psi^i (\partial_{x_i} f) - \sum_{\substack{i\neq j \\ 1\leq i,j\leq m}} \psi^i (\partial_{x_j} f) \psi^j \psi^i \\
&= -\sum_{i=1}^{m} \psi^i (\partial_{x_i} f) - (\sum_{1\leq i,j\leq m} \psi^i (\partial_{x_i} f) \psi^j \psi^i - \sum_{\substack{i=j \\ 1\leq i,j\leq m}} \psi^i (\partial_{x_i} f) \psi^j \psi^i) \\
&= -2\sum_{i=1}^{m} \psi^i (\partial_{x_i} f) - \sum_{1\leq i,j\leq m} \psi^i (\partial_{x_i} f) \psi^j \psi^i \\
&= -2 D^{\psi} f - \nu(f D^{\psi}).
\end{aligned}
$$

(3). Por (2) se tiene que:

$$
\begin{aligned}
D^{\psi}[\nu(f)]D^{\psi} &= -2D^{\psi}D^{\psi}f - D^{\psi}[\nu(fD^{\psi})] \\
&= -2D^{\psi}D^{\psi}f - [-2fD^{\psi}D^{\psi} - \nu(D^{\psi}fD^{\psi}] \\
&= \nu(D^{\psi}fD^{\psi}),
\end{aligned}
$$

y la segunda proposición es evidente ya que $D^{\psi}D^{\psi}$ es un operador real.

(4). Esta proposición también es evidente pues claramente $D^{\psi}D^{\psi}$ es un operador real.

(5). Nótese que

$$
\psi^j\psi_A\psi^j = \begin{cases} (-1)^{|A|}\psi_A & \textit{si } \; j \in A \\ (-1)^{|A|+1}\psi_A & \textit{si } \; j \notin A \end{cases},
$$

llegando claramente a que $\sum_{j=1}^{m} \psi^j\psi_A\psi^j = (-1)^{k+1}(m-2k)\psi_A$. Obteniendo así el resultado esperado: $\sum_{j=1}^{m} \psi^j S_k\psi^j = (-1)^{k+1}(m-2k)S_k$.

(6).

$$
\begin{aligned}
D^{\phi}\omega(f) &= \sum_{1\le i,j\le m} \phi^i\phi^j(\partial_{x_i}f)\psi^j \\
&= \sum_{\substack{i=j\\1\le i,j\le m}} \phi^i\phi^j(\partial_{x_i}f)\psi^j + \sum_{\substack{i\neq j\\1\le i,j\le m}} \phi^i\phi^j(\partial_{x_i}f)\psi^j \\
&= -\sum_{i=1}^{m}(\partial_{x_i}f)\psi^i - \sum_{\substack{i\neq j\\1\le i,j\le m}} \phi^j\phi^i(\partial_{x_i}f)\psi^j \\
&= -\sum_{i=1}^{m}(\partial_{x_i}f)\psi^i - (\sum_{i,j} \phi^j\phi^i(\partial_{x_i}f)\psi^j + \sum_{i=1}^{m}(\partial_{x_i}f)\psi^i) \\
&= -2\sum_{i=1}^{m}(\partial_{x_i}f)\psi^i - \sum_{i,j} \phi^j\phi^i(\partial_{x_i}f)\psi^j \\
&= -2fD^{\psi} - \omega(D^{\phi}f).
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\omega(f)D^{\psi} &= \sum_{1\leq i,j\leq m} \phi^j(\partial_{x_i} f)\psi^j\psi^i \\
&= \sum_{\substack{i=j\\1\leq i,j\leq m}} \phi^j(\partial_{x_i} f)\psi^j\psi^i + \sum_{\substack{i\neq j\\1\leq i,j\leq m}} \phi^j(\partial_{x_i} f)\psi^j\psi^i \\
&= -\sum_{i=1}^{m} \phi^i(\partial_{x_i} f) - \sum_{\substack{i\neq j\\1\leq i,j\leq m}} \phi^j(\partial_{x_i} f)\psi^i\psi^j \\
&== -\sum_{i=1}^{m} \phi^i(\partial_{x_i} f) - (\sum_{i,j} \phi^j(\partial_{x_i} f)\psi^i\psi^j + \sum_{i=1}^{m} \phi^i(\partial_{x_i} f)) \\
&= -2\sum_{i=1}^{m} \phi^i(\partial_{x_i} f) - \sum_{i,j} \phi^j(\partial_{x_i} f)\psi^i\psi^j \\
&= -2D^{\phi} f - \omega(fD^{\psi}).
\end{aligned}$$

(7). Usando (6) se llega a que:

$$\begin{aligned}
D^{\phi}[\omega(f)]D^{\psi} &= -2fD^{\psi}D^{\psi} - \omega(D^{\phi} f)D^{\psi} \\
&= -2fD^{\psi}D^{\psi} - [-2D^{\phi}D^{\phi} f - \omega(D^{\phi} fD^{\psi})] \\
&= \omega(D^{\phi} fD^{\psi}).
\end{aligned}$$

(8).

$$\begin{aligned}
D^{\phi}(f\underline{x}) &= \sum_{i=1}^{m} \phi^i \frac{\partial(f\underline{x})}{\partial x_i} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \phi^i \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\underline{x} + f\psi^i\right] \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} \phi^i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\underline{x} + \sum_{i=1}^{m} \phi^i f\psi^i \\
&= (D^{\phi} f)\underline{x} + \omega(f).
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\underline{x}f)D^{\phi} &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(\underline{x}f)}{\partial x_i}\phi^i \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left[\psi^i f + \underline{x}\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]\phi^i \\
&= \underline{x}\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}\phi^i\right) + \sum_{i=1}^{m} \psi^i f \phi^i \\
&= \underline{x}(fD^{\phi}) + \widetilde{\omega}(f).
\end{aligned}
$$

(9). La prueba es inmediata aplicando la propiedad (6).

(10). Tomando en la propiedad (6) la función $D^{\psi} f$ se verifica la proposición.

□

2.2.1. Resultados generales

En esta sección se expondrán resultados generales para las soluciones del sistema generalizado de Lamé-Navier, y se llegarán a las formulaciones de ecuaciones esenciales para los próximos resultados.

Sea el sistema:

$$
\mathcal{L}^{*}_{\substack{\phi,\psi \\ \alpha,\beta}}\vec{u} := \alpha D^{\phi}\vec{u}D^{\psi} + \beta D^{\phi}D^{\psi}\vec{u} = 0. \tag{2.29}
$$

Tomando la función $g = \alpha\vec{u}D^{\psi} + \beta D^{\psi}\vec{u}$, luego es claro que si $\vec{u}$ es solución de (2.29) entonces $D^{\phi}g = 0$. Aplicando el Lema 3, se tiene que $D^{\phi}(g\underline{x}) = (D^{\phi}g)\underline{x} + \omega(g) = \omega(g)$, luego $D^{\phi}(g\underline{x})D^{\psi} = \omega(g)D^{\psi} = -2D^{\phi}g - \omega(gD^{\psi}) = -\omega(gD^{\psi})$.

Por otra parte $\overline{g} = \alpha D^{\psi}\vec{u} + \beta\vec{u}D^{\psi}$, entonces

$$
D^{\phi}\overline{g} = \alpha D^{\phi}D^{\psi}\vec{u} + \beta D^{\phi}\vec{u}D^{\psi} = (\beta - \frac{\alpha^2}{\beta})D^{\phi}\vec{u}D^{\psi} = (\alpha - \frac{\beta^2}{\alpha})D^{\phi}D^{\psi}\vec{u}, \tag{2.30}
$$

ya que $D^{\phi}D^{\psi}\vec{u} = -\frac{\alpha}{\beta}D^{\phi}\vec{u}D^{\psi}$.

Véase que

$$\begin{aligned}
\omega(gD^{\psi}) &= \omega(\alpha\vec{u}D^{\psi}D^{\psi} + \beta D^{\psi}\vec{u}D^{\psi}) \\
&= \alpha\omega(\vec{u}D^{\psi}D^{\psi}) + \beta\omega(D^{\psi}\vec{u}D^{\psi}) \\
&= \alpha[-2D^{\phi}\vec{u}D^{\psi} - \omega(\vec{u}D^{\psi})D^{\psi}] + \beta[-2D^{\phi}D^{\psi}\vec{u} - \omega(D^{\psi}\vec{u})D^{\psi}] \\
&= \alpha[-2D^{\phi}\vec{u}D^{\psi} - (-2D^{\phi}\vec{u} - \omega(\vec{u})D^{\psi})D^{\psi}] + \beta[-2D^{\phi}D^{\psi}\vec{u} - \omega(D^{\psi}\vec{u})D^{\psi}] \\
&= -\alpha\omega(\Delta\vec{u}) + 2\alpha D^{\phi}\vec{u}D^{\psi} - \beta\omega(D^{\psi}\vec{u})D^{\psi}.
\end{aligned}$$

Además

$$D^{\psi}\overline{g} = -\alpha\Delta\vec{u} + \beta D^{\psi}\vec{u}D^{\psi}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
D^{\phi}D^{\psi}\overline{g} &= -\alpha D^{\phi}\Delta\vec{u} + \beta D^{\phi}D^{\psi}\vec{u}D^{\psi} \\
&= -\alpha D^{\phi}\Delta\vec{u} - \alpha D^{\phi}\vec{u}D^{\psi}D^{\psi} \\
&= -\alpha D^{\phi}\Delta\vec{u} + \alpha D^{\phi}\Delta\vec{u} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

O sea que $\overline{g}$ es (ϕ, ψ)-armónica por la izquierda. Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}
D^{\psi}(\overline{g}\underline{x}) &= (D^{\psi}\overline{g})\underline{x} + \nu(\overline{g}) \\
D^{\phi}D^{\psi}(\overline{g}\underline{x}) &= (D^{\phi}D^{\psi}\overline{g})\underline{x} + \omega(D^{\psi}\overline{g}) + D^{\phi}\nu(\overline{g}) \\
&= \omega(D^{\psi}\overline{g}) + D^{\phi}\nu(\overline{g}).
\end{aligned}$$

Calculando

$$\begin{aligned}
\nu(\overline{g}) &= \alpha\nu(D^{\psi}\vec{u}) + \beta\nu(\vec{u}D^{\psi}) \\
&= \alpha\left\{-2\vec{u}D^{\psi} - D^{\psi}[\nu(\vec{u})]\right\} + \beta\left\{-2D^{\psi}\vec{u} - [\nu(\vec{u})D^{\psi}\right\} \\
&= \alpha\left(-2\vec{u}D^{\psi} - D^{\psi}\vec{u}\right) + \beta\left(-2D^{\psi}\vec{u} - \vec{u}D^{\psi}\right) \\
&= -2g - \overline{g}.
\end{aligned}$$

Luego

$$D^{\phi}\nu(\overline{g}) = -D^{\phi}\overline{g} = (\frac{\beta^2}{\alpha} - \alpha)D^{\phi}D^{\psi}\vec{u}.$$

Entonces,

$$D^{\phi}D^{\psi}[\overline{g}\underline{x} - (\frac{\beta^2}{\alpha} - \alpha)\vec{u}] = \omega(D^{\psi}\overline{g}) = \omega(gD^{\psi}).$$

Llegando así al resultado:

$$D^{\phi}D^{\psi}\left[\overline{g}\underline{x} - \left(\frac{\beta^2}{\alpha} - \alpha\right)\vec{u}\right] + D^{\phi}g\underline{x}D^{\psi} = 0. \tag{2.31}$$

Ahora véase que

$$D^{\psi}(g\underline{x}) = (D^{\psi}g)\underline{x} + \nu(g)$$

$$D^{\phi}D^{\psi}(g\underline{x}) = (D^{\phi}D^{\psi}g)\underline{x} + \omega(D^{\psi}g) + D^{\phi}[\nu(g)].$$

Pero,

$$\begin{aligned}\nu(g) &= \alpha\nu(\vec{u}D^{\psi}) + \beta\nu(D^{\psi}\vec{u})\\ &= \alpha[-2D^{\psi}\vec{u} - \nu(\vec{u})D^{\psi}] + \beta[-2\vec{u}D^{\psi} - D^{\psi}\nu(\vec{u})]\\ &= -2\overline{g} - g.\end{aligned}$$

De donde

$$D^{\phi}[\nu(g)] = -2D^{\phi}\overline{g} = 2(\frac{\beta^2}{\alpha} - \alpha)D^{\phi}D^{\psi}\vec{u}.$$

Así como

$$\omega(D^{\psi}g) = \omega(\overline{g}D^{\psi}) = -2D^{\phi}\overline{g} - \omega(\overline{g})D^{\psi}.$$

Pero

$$D^{\phi}(\overline{g}\underline{x}) = (D^{\phi}\overline{g})\underline{x} + \omega(\overline{g})$$

$$\begin{aligned}D^{\phi}(\overline{g}\underline{x})D^{\psi} &= [(D^{\phi}\overline{g})\underline{x}]D^{\psi} + \omega(\overline{g})D^{\psi}\\ \omega(\overline{g}) &= \alpha\omega(D^{\psi}\vec{u}) + \beta\omega(\vec{u}D^{\psi})\\ &= \alpha\omega(D^{\psi}\vec{u}) + \beta[-2D^{\phi}\vec{u} - \omega(\vec{u})D^{\psi}]\\ \omega(\overline{g})D^{\psi} &= \alpha\omega(D^{\psi}\vec{u})D^{\psi} - 2\beta D^{\phi}\vec{u}D^{\psi} + \beta\omega(\Delta\vec{u}).\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{\alpha}\omega(\overline{g})D^{\psi} &= \beta\omega(D^{\psi}\vec{u})D^{\psi} - \frac{2\beta^2}{\alpha}D^{\phi}\vec{u}D^{\psi} + \frac{\beta^2}{\alpha}\omega(\Delta\vec{u})\\ &= -\omega(gD^{\psi}) - \alpha\omega(\Delta\vec{u}) + 2\alpha D^{\phi}\vec{u}D^{\psi} - \frac{2\beta^2}{\alpha}D^{\phi}\vec{u}D^{\psi} + \frac{\beta^2}{\alpha}\omega(\Delta\vec{u}).\end{aligned}$$

Entonces,

$$\omega(\overline{g})D^{\psi} = -\frac{\alpha}{\beta}\omega(gD^{\psi}) + (\beta - \frac{\alpha^2}{\beta})\omega(\Delta\vec{u}) + 2(\frac{\alpha^2}{\beta} - \beta)D^{\phi}\vec{u}D^{\psi}.$$

Donde se llega a los resultados siguientes:

$$D^{\phi}(\overline{g}\underline{x})D^{\psi} = [(D^{\phi}\overline{g})\underline{x}]D^{\psi} + \frac{\alpha}{\beta}D^{\phi}(g\underline{x})D^{\psi} + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{\beta}\right)\omega(\Delta\vec{u}) + 2\left(\frac{\alpha^2}{\beta} - \beta\right)D^{\phi}\vec{u}D^{\psi} \tag{2.32}$$

$$\begin{aligned} D^{\phi}D^{\psi}(g\underline{x}) = {} & (D^{\phi}D^{\psi}g)\underline{x} - 2\left(\beta - \frac{\alpha^2}{\beta}\right)D^{\phi}\vec{u}D^{\psi} + [(D^{\phi}\overline{g})\underline{x}]D^{\psi} - D^{\phi}(\overline{g}\underline{x})D^{\psi} \\ & + 2\left(\frac{\beta^2}{\alpha} - \alpha\right)D^{\phi}D^{\psi}\vec{u}. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Sustituyendo (2.32) en (2.33) se tiene

$$D^{\phi}D^{\psi}(g\underline{x}) = (D^{\phi}D^{\psi}g)\underline{x} - \frac{\alpha}{\beta}D^{\phi}(g\underline{x})D^{\psi} + \left(\frac{\alpha^2}{\beta} - \beta\right)\omega(\Delta\vec{u}) + 2\left(\frac{\beta^2}{\alpha} - \alpha\right)D^{\phi}D^{\psi}\vec{u}. \tag{2.34}$$

Usando (2.31) se llega a que

$$\begin{aligned} D^{\phi}D^{\psi}(g\underline{x}) = {} & (D^{\phi}D^{\psi}g)\underline{x} + \frac{\alpha}{\beta}D^{\phi}D^{\psi}(\overline{g}\underline{x}) + \left(\frac{\alpha^2}{\beta} - \beta + \frac{2\beta^2}{\alpha} - 2\alpha\right)D^{\phi}D^{\psi}\vec{u} \\ & + \left(\frac{\alpha^2}{\beta} - \beta\right)\omega(\Delta\vec{u}). \end{aligned}$$

O sea,

$$D^{\phi}D^{\psi}\left[g\underline{x} - \frac{\alpha}{\beta}\overline{g}\underline{x} - \left(\frac{\alpha^2}{\beta} - \beta + \frac{2\beta^2}{\alpha} - 2\alpha\right)\vec{u}\right] = (D^{\phi}D^{\psi}g)\underline{x} + \left(\frac{\alpha^2}{\beta} - \beta\right)\omega(\Delta\vec{u}). \tag{2.35}$$

Las ecuaciones (2.31),(2.32),(2.33),(2.34) y (2.35) serán muy utilizadas en los próximos resultados.

2.2.2. Casos Particulares

En esta sección se abordará el estudio de casos particulares en una primera parte, tanto en la estructura del operador generalizado de Lamé-Navier(2.27) como en las soluciones de su sistema(2.28). Para una segunda parte se tratará la temática de construcción de soluciones de este sistema, que será un paso esencial para la intuición de una posible estructura de las soluciones. Se trabajará sólo para el caso tridimensional, a menos que se especifique lo contrario.

Para iniciar se demostrará el siguiente teorema:

Teorema 10. *Si un campo vectorial $\vec{u}$ satisface en $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ el sistema generalizado de Lamé-Navier*(2.28) *cuando $\phi = \psi$, es decir*

$$\mathcal{L}^*_{\substack{\psi,\psi\\ \alpha,\beta}}\vec{u} := \alpha D^\psi \vec{u} D^\psi + \beta D^\psi D^\psi \vec{u} = 0,$$

entonces este admite en Ω la representación

$$\vec{u} = \vec{h} + \vec{i},$$

donde $\vec{h} \in \underline{\mathcal{H}}(\Omega)$, e $\vec{i} \in \underline{\mathcal{I}}_\psi(\Omega)$. Además esta representación es única salvo un campo vectorial de la clase $\underline{\mathcal{H}}(\Omega) \cap \underline{\mathcal{I}}_\psi(\Omega)$.

Demostración. Se asume que $\vec{u}$ es solución de $\mathcal{L}^*_{\substack{\psi,\psi\\ \alpha,\beta}}\vec{u} := \alpha D^\psi \vec{u} D^\psi + \beta D^\psi D^\psi \vec{u} = 0$. Sea $g = \alpha \vec{u} D^\psi + \beta D^\psi \vec{u}$. Claramente g es una función ψ-monogénica por la izquierda en Ω que toma valores en $\mathbb{R}_{0,3}$. Además en virtud del Lema 3 se tiene que $D^\psi(g\underline{x}) = \nu(g)$ y entonces

$$D^\psi(g\underline{x})D^\psi = -\nu(gD^\psi) = -gD^\psi = (\frac{\alpha^2}{\beta} - \beta)D^\psi \vec{u} D^\psi$$

y

$$D^\psi D^\psi(g\underline{x}) = -2gD^\psi = 2(\frac{\beta^2}{\alpha} - \alpha)D^\psi D^\psi \vec{u}.$$

Luego,

$$D^\psi[g\underline{x} - (\frac{\alpha^2}{\beta} - \beta)\vec{u}]D^\psi = 0$$

y

$$D^\psi D^\psi[g\underline{x} - 2(\frac{\beta^2}{\alpha} - \alpha)\vec{u}] = 0.$$

Sea entonces $I := g\underline{x} - (\frac{\alpha^2}{\beta} - \beta)\vec{u}$ y $H := g\underline{x} - 2(\frac{\beta^2}{\alpha} - \alpha)\vec{u}$, y como $I \in \mathcal{I}_\psi$, $H \in \mathcal{H}$, se llega a que

$$(\frac{\alpha^2}{\beta} - \beta - \frac{2\beta^2}{\alpha} + 2\alpha)\vec{u} = H - I.$$

La cuestión ahora es que $\frac{\alpha^2}{\beta} - \beta - \frac{2\beta^2}{\alpha} + 2\alpha \neq 0$, o equivalentemente, que $(\alpha + 2\beta)(\alpha^2 - \beta^2) \neq 0$, pero esto se cumple porque de no ser así se llega a una contradicción con las restricciones de los coeficientes de Lamé clásicos; pues si $\alpha = -2\beta$, entonces $\lambda = -\frac{7}{3}\mu$, pero $\lambda > -\frac{2}{3}\mu$, y de la misma forma se llega a una contradicción para el otro caso. Por tanto, se tiene que

$$\vec{u} = h + i \tag{2.36}$$

donde

$$h = (\frac{\alpha^2}{\beta} - \beta - \frac{2\beta^2}{\alpha} + 2\alpha))^{-1}H, \quad i = -(\frac{\alpha^2}{\beta} - \beta - \frac{2\beta^2}{\alpha} + 2\alpha)^{-1}I.$$

Como $h \in \mathcal{H}$ e $i \in \mathcal{I}_\psi$, la representación deseada se obtendrá claramente usando la Proposición 1 y tomando la parte 1-vectorial en ambos lados de (2.36).

Sea $\vec{u} = \vec{h}_1 + \vec{i}_1$ otra representación de la solución $\vec{u}$ de este sistema, entonces

$$\vec{h} + \vec{i} - \vec{h}_1 - \vec{i}_1 = 0,$$

por tanto, $\vec{h} - \vec{h}_1 = \vec{i}_1 - \vec{i}$, luego como $\vec{h} - \vec{h}_1 \in \underline{\mathcal{H}}$ e $\vec{i}_1 - \vec{i} \in \underline{\mathcal{I}}_\psi$; escogiendo $\vec{s} = \vec{h} - \vec{h}_1 = \vec{i}_1 - \vec{i}$, claramente se obtiene que $\vec{s} \in \underline{\mathcal{H}}(\Omega) \cap \underline{\mathcal{I}}_\psi(\Omega)$. Concluyendo así la demostración. □

El siguiente teorema es aplicable para el subespacio $\mathtt{Ker}[\mathcal{L}^*_{\substack{\phi,\psi \\ \alpha,\beta}}] \cap \mathcal{H} \cap \mathcal{I}_\psi$:

Teorema 11. *Si $\vec{u}$ es solución de $\alpha D^\phi \vec{u} D^\psi + \beta D^\phi D^\psi \vec{u} = 0$, es además armónica y ψ-inframonogénica, entonces admite la representación*

$$\vec{u} = h + i,$$

donde $h \in \mathcal{H}_{\phi,\psi}(\Omega)$ e $i \in \mathcal{I}_{\phi,\psi}(\Omega)$.

Demostración. Sea $g = \alpha \vec{u} D^\psi + \beta D^\psi \vec{u}$. Entonces, $D^\phi g = 0$, $D^\psi g = 0$ y $g D^\psi = 0$. Lo que posibilita que, $D^\phi (g\underline{x}) D^\psi = 0$, y según (2.34), $D^\phi D^\psi (g\underline{x}) = 2(\frac{\beta^2}{\alpha} - \alpha) D^\phi D^\psi \vec{u}$. Luego,

$$D^\phi D^\psi [g\underline{x} - 2(\frac{\beta^2}{\alpha} - \alpha)\vec{u}] = 0.$$

Sea entonces $I := g\underline{x}$ y $H := g\underline{x} - 2(\frac{\beta^2}{\alpha} - \alpha)\vec{u}$, luego tenemos que

$$\vec{u} = h + i,$$

donde

$$h = (2\alpha - \frac{2\beta^2}{\alpha})^{-1}H, \quad i = -(2\alpha - \frac{2\beta^2}{\alpha})^{-1}I,$$

siempre que $\alpha - \frac{\beta^2}{\alpha} \neq 0$, pero esto siempre ocurre pues de ser $\alpha = \beta$ o $\alpha = -\beta$ se llega a una contradicción con las restricciones de los coeficientes de Lamé clásicos. Y como $h \in \mathcal{H}_{\phi,\psi}(\Omega)$ e $i \in \mathcal{I}_{\phi,\psi}(\Omega)$ se concluye la demostración. □

En los siguientes teoremas se suprime una de las condiciones del teorema anterior para $\vec{u}$.

Teorema 12. *Si $\vec{u}$ es solución de $\alpha D^{\phi}\vec{u}D^{\psi} + \beta D^{\phi}D^{\psi}\vec{u} = 0$, y es además armónica, entonces admite la representación*

$$\vec{u} = h + i^*,$$

donde $h \in \mathcal{H}_{\phi,\psi}(\Omega)$ e $i^* \in \mathcal{I}_{\psi,\phi}(\Omega)$.

Demostración. Sea $g = \alpha\vec{u}D^{\psi} + \beta D^{\psi}\vec{u}$. Entonces, $D^{\psi}g = \alpha D^{\psi}\vec{u}D^{\psi} + \beta D^{\psi}D^{\psi}\vec{u} = \alpha D^{\psi}\vec{u}D^{\psi}$. Luego, como $D^{\phi}D^{\psi}g = D^{\phi}\overline{g}D^{\psi} = (\beta - \frac{\alpha^2}{\beta})D^{\phi}\vec{u}D^{\psi}D^{\psi} = 0$.
Por tanto, aplicando las proposiciones del Lema 3 y (2.35), se llega a que,

$$D^{\phi}D^{\psi}(g\underline{x}) = \frac{\alpha}{\beta}D^{\phi}D^{\psi}(\overline{g}\underline{x}) + (\frac{\alpha^2}{\beta} - \beta + \frac{2\beta^2}{\alpha} - 2\alpha)D^{\phi}D^{\psi}\vec{u}.$$

Véase ahora que la función $(g - \frac{\alpha}{\beta}\overline{g})\underline{x} = (\beta - \frac{\alpha^2}{\beta})(D^{\psi}\vec{u})\underline{x}$. Entonces,

$$\begin{aligned} D^{\psi}[(g - \frac{\alpha}{\beta}\overline{g})\underline{x}] &= D^{\psi}[(\beta - \frac{\alpha^2}{\beta})(D^{\psi}\vec{u})\underline{x}] \\ &= (\beta - \frac{\alpha^2}{\beta})[(D^{\psi}D^{\psi}\vec{u})\underline{x} + \nu(D^{\psi}\vec{u})] \\ &= (\beta - \frac{\alpha^2}{\beta})(-2\vec{u}D^{\psi} - D^{\psi}\vec{u}). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$D^{\psi}[(g - \frac{\alpha}{\beta}\overline{g})\underline{x}]D^{\phi} = (\beta - \frac{\alpha^2}{\beta})(-2\vec{u}D^{\psi}D^{\phi} - D^{\psi}\vec{u}D^{\phi}) = (\beta - \frac{\alpha^2}{\beta})(\frac{2\alpha}{\beta} - 1)D^{\psi}\vec{u}D^{\phi}.$$

Luego

$$D^{\psi}[(g - \frac{\alpha}{\beta}\overline{g})\underline{x} - (2\alpha - \beta - \frac{2\alpha^3}{\beta^2} + \frac{\alpha^2}{\beta})\vec{u}]D^{\phi} = 0.$$

Y como

$$D^{\phi}D^{\psi}[(g-\frac{\alpha}{\beta}\overline{g})\underline{x}-(\frac{\alpha^2}{\beta}-\beta+\frac{2\beta^2}{\alpha}-2\alpha)\vec{u}]=0.$$

Entonces se puede decir que:

$D^{\phi}D^{\psi}[(g-\frac{\alpha}{\beta}\overline{g})\underline{x}-(2\alpha-\beta-\frac{2\alpha^3}{\beta^2}+\frac{\alpha^2}{\beta})\vec{u}+(2\alpha-\beta-\frac{2\alpha^3}{\beta^2}+\frac{\alpha^2}{\beta}-\frac{\alpha^2}{\beta}+\beta-\frac{2\beta^2}{\alpha}+2\alpha)\vec{u}]=0.$

O sea,

$$D^{\phi}D^{\psi}[(g-\frac{\alpha}{\beta}\overline{g})\underline{x}-(2\alpha-\beta-\frac{2\alpha^3}{\beta^2}+\frac{\alpha^2}{\beta})\vec{u}+(4\alpha-\frac{2\alpha^3}{\beta^2}-\frac{2\beta^2}{\alpha})\vec{u}]=0.$$

Sea $I^*=(g-\frac{\alpha}{\beta}\overline{g})\underline{x}-(2\alpha-\beta-\frac{2\alpha^3}{\beta^2}+\frac{\alpha^2}{\beta})\vec{u}$ y $H=(g-\frac{\alpha}{\beta}\overline{g})\underline{x}-(2\alpha-\beta-\frac{2\alpha^3}{\beta^2}+\frac{\alpha^2}{\beta})\vec{u}+(4\alpha-\frac{2\alpha^3}{\beta^2}-\frac{2\beta^2}{\alpha})\vec{u}$, es claro que entonces $\vec{u}$ admite la siguiente representación,

$$\vec{u}=h+i^*,$$

donde $h=(4\alpha-\frac{2\alpha^3}{\beta^2}-\frac{2\beta^2}{\alpha})^{-1}H$ e $i^*=-(4\alpha-\frac{2\alpha^3}{\beta^2}-\frac{2\beta^2}{\alpha})^{-1}I^*$, siempre que $4\alpha-\frac{2\alpha^3}{\beta^2}-\frac{2\beta^2}{\alpha}\neq 0$; pero esto siempre ocurre pues cuando se hallan las raíces de la ecuación correspondiente se tiene que:

$$4\alpha-\frac{2\alpha^3}{\beta^2}-\frac{2\beta^2}{\alpha}=0\Leftrightarrow 2\beta^4+2\alpha^4-4\alpha^2\beta^2=0\Leftrightarrow(\beta-\alpha)^2(\beta+\alpha)^2=0,$$

pero de ser $\beta=\alpha$ o $\beta=-\alpha$, ocurre una contradicción con los coeficientes de Lamé clásicos. Desde luego que $h\in\mathcal{H}_{\phi,\psi}(\Omega)$ e $i^*\in\mathcal{I}_{\psi,\phi}(\Omega)$, con lo que se concluye la demostración. □

Teorema 13. *Si $\vec{u}$ es solución de $\alpha D^{\phi}\vec{u}D^{\psi}+\beta D^{\phi}D^{\psi}\vec{u}=0$, y es además ψ-inframonogénica, entonces admite la representación*

$$\vec{u}=h+i^*,$$

donde $h\in\mathcal{H}_{\phi,\psi}(\Omega)$ e $i^*\in\mathcal{I}_{\psi,\phi}(\Omega)$.

Demostración. Sea $g=\alpha\vec{u}D^{\psi}+\beta D^{\psi}\vec{u}$. Como $D^{\psi}\vec{u}D^{\psi}=0$, entonces

$$D^{\phi}D^{\psi}g=D^{\phi}\overline{g}D^{\psi}=(\alpha-\frac{\beta^2}{\alpha})D^{\phi}D^{\psi}\vec{u}D^{\psi}=0.$$

Por otra parte usando (2.31) se tiene

$$D^{\phi}(g\underline{x})D^{\psi}=-\omega(gD^{\psi})=-\omega(-\alpha\Delta\vec{u}+\beta D^{\psi}\vec{u}D^{\psi})=\alpha\omega(\Delta\vec{u})=-D^{\phi}D^{\psi}[\overline{g}\underline{x}-(\frac{\beta^2}{\alpha}-\alpha)\vec{u}]. \tag{2.37}$$

Sustituyendo (2.37) en (2.35) se tiene

$$D^{\phi}D^{\psi}[g\underline{x}-\frac{\alpha}{\beta}\overline{g}\underline{x}-(\frac{\alpha^2}{\beta}-\beta+\frac{2\beta^2}{\alpha}-2\alpha)\vec{u}] = (D^{\phi}D^{\psi}g)\underline{x}+(\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta})D^{\phi}D^{\psi}[\overline{g}\underline{x}-(\frac{\beta^2}{\alpha}-\alpha)\vec{u}]. \tag{2.38}$$

Y reduciendo,

$$D^{\phi}D^{\psi}[(g-\frac{\beta}{\alpha}\overline{g})\underline{x}-(\frac{2\beta^2}{\alpha}+\beta-2\alpha-\frac{\beta^3}{\alpha^2})\vec{u}] = 0 \tag{2.39}$$

Pero como $g-\frac{\beta}{\alpha}\overline{g} = (\alpha-\frac{\beta^2}{\alpha})\vec{u}D^{\psi}$. Entonces,

$$D^{\psi}[(\vec{u}D^{\psi})\underline{x}] = \nu(\vec{u}D^{\psi}) = -2D^{\psi}\vec{u}-\vec{u}D^{\psi}.$$

Luego, $D^{\psi}[(\vec{u}D^{\psi})\underline{x}]D^{\phi} = (\frac{\alpha}{\beta}-2)D^{\psi}\vec{u}D^{\phi}$, teniendo que

$$D^{\psi}[(g-\frac{\beta}{\alpha}\overline{g})\underline{x}-(\alpha-\frac{\beta^2}{\alpha})(\frac{\alpha}{\beta}-2)\vec{u}]D^{\phi} = 0. \tag{2.40}$$

Llegando a que,

$$D^{\phi}D^{\psi}[(g-\frac{\beta}{\alpha}\overline{g})\underline{x}-(\alpha-\frac{\beta^2}{\alpha})(\frac{\alpha}{\beta}-2)\vec{u}+(\alpha-\frac{\beta^2}{\alpha})(\frac{\alpha}{\beta}-2)\vec{u}-(\frac{2\beta^2}{\alpha}+\beta-2\alpha-\frac{\beta^3}{\alpha^2})\vec{u}] = 0$$

$$D^{\phi}D^{\psi}[(g-\frac{\beta}{\alpha}\overline{g})\underline{x}-(\alpha-\frac{\beta^2}{\alpha})(\frac{\alpha}{\beta}-2)\vec{u}+(\frac{\alpha^2}{\beta}-2\beta+\frac{\beta^3}{\alpha^2})\vec{u}] = 0.$$

Sea $I^* := (g-\frac{\beta}{\alpha}\overline{g})\underline{x}-(\alpha-\frac{\beta^2}{\alpha})(\frac{\alpha}{\beta}-2)\vec{u}$ y $H := (g-\frac{\beta}{\alpha}\overline{g})\underline{x}-(\alpha-\frac{\beta^2}{\alpha})(\frac{\alpha}{\beta}-2)\vec{u}+(\frac{\alpha^2}{\beta}-2\beta+\frac{\beta^3}{\alpha^2})\vec{u}$, entonces claramente $\vec{u}$ admite la representación

$$\vec{u} = h+i^*,$$

donde $h = (\frac{\alpha^2}{\beta}-\alpha-2\beta+\frac{\beta^3}{\alpha^2})^{-1}H$ e $i^* = -(\frac{\alpha^2}{\beta}-\alpha-2\beta+\frac{\beta^3}{\alpha^2})^{-1}I^*$, siempre que $\frac{\alpha^2}{\beta}-2\beta+\frac{\beta^3}{\alpha^2} \neq 0$, pero esto siempre ocurre pues cuando se hallan las raíces de la ecuación correspondiente se tiene que:

$$\frac{\alpha^2}{\beta}-2\beta+\frac{\beta^3}{\alpha^2} = 0 \Leftrightarrow \beta^4+\alpha^4-2\alpha^2\beta^2 = 0 \Leftrightarrow (\beta-\alpha)^2(\beta+\alpha)^2 = 0,$$

pero de ser $\beta = \alpha$ o $\beta = -\alpha$, ocurre una contradicción con los coeficientes de Lamé clásicos, y desde luego como $h \in \mathcal{H}_{\phi,\psi}(\Omega)$ e $i^* \in \mathcal{I}_{\psi,\phi}(\Omega)$ se concluye la demostración. $\square$

Todo parece indicar que hay una vinculación entre las soluciones $\vec{u}$ de (2.29) y las funciones (ψ, ϕ)-inframonogénicas. Veamos lo siguiente,

Teorema 14. *Si $\vec{u}$ es solución del sistema*

$$\begin{cases} \alpha D^{\phi}\vec{u}D^{\psi} + \beta D^{\phi}D^{\psi}\vec{u} = 0 \\ \alpha D^{\psi}\vec{u}D^{\psi} + \beta D^{\psi}D^{\psi}\vec{u} = 0 \end{cases},$$

entonces admite la representación

$$\vec{u} = h + i^*,$$

donde $h \in \mathcal{H}_{\phi,\psi}(\Omega)$ e $i^* \in \mathcal{I}_{\psi,\phi}(\Omega)$.

Demostración. Sea $g = \alpha\vec{u}D^{\psi} + \beta D^{\psi}\vec{u}$. Entonces $D^{\phi}g = 0$ y $D^{\psi}g = 0$. Luego, $D^{\phi}D^{\psi}g = 0$. Luego por (2.35) se tiene que

$$D^{\phi}D^{\psi}\left[g\underline{x} - \frac{\alpha}{\beta}\overline{g}\underline{x} - \left(\frac{\alpha^2}{\beta} - \beta + \frac{2\beta^2}{\alpha} - 2\alpha\right)\vec{u}\right] = \left(\frac{\alpha^2}{\beta} - \beta\right)\omega(\Delta\vec{u}).$$

Pero como $\omega(gD^{\psi}) = \omega(-\alpha\Delta\vec{u} + \beta D^{\psi}\vec{u}D^{\psi}) = (\frac{\beta^2}{\alpha} - \alpha)\omega(\Delta\vec{u})$, se tiene que $D^{\phi}(g\underline{x})D^{\psi} = (\alpha - \frac{\beta^2}{\alpha})\omega(\Delta\vec{u})$, por lo tanto, por (2.31), se tiene que

$$D^{\phi}D^{\psi}[\frac{\alpha}{\beta^2 - \alpha^2}\overline{g}\underline{x} - \vec{u}] = \omega(\Delta\vec{u}).$$

Y como,

$$D^{\phi}D^{\psi}[\frac{\beta}{\alpha^2 - \beta^2}g\underline{x} - \frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2}\overline{g}\underline{x} - \frac{\beta}{\alpha^2 - \beta^2}(\frac{\alpha^2}{\beta} - \beta + \frac{2\beta^2}{\alpha} - 2\alpha)\vec{u}] = \omega(\Delta\vec{u}),$$

llegando a que,

$$D^{\phi}D^{\psi}[\frac{\beta}{\alpha^2 - \beta^2}g\underline{x} - \frac{\beta}{\alpha^2 - \beta^2}(\frac{\alpha^2}{\beta} - \beta + \frac{2\beta^2}{\alpha} - 2\alpha)\vec{u} + \vec{u}] = 0,$$

reduciendo se tiene

$$D^{\phi}D^{\psi}[\frac{\beta}{\alpha^2 - \beta^2}g\underline{x} + (\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2} - \frac{2\beta^3}{\alpha(\alpha^2 - \beta^2)})\vec{u}] = 0.$$

Veamos que, $D^{\psi}(g\underline{x})D^{\phi} = \nu(g)D^{\phi} = -gD^{\phi} = (\frac{\alpha^2}{\beta} - \beta)D^{\psi}\vec{u}D^{\phi}$, entonces,

$$D^{\psi}[g\underline{x} - (\frac{\alpha^2}{\beta} - \beta)\vec{u}]D^{\phi} = 0,$$

es decir,

$$D^{\psi}[\frac{\beta}{\alpha^2-\beta^2}g\underline{x}-\vec{u}]D^{\phi}=0.$$

Por lo tanto,

$$D^{\phi}D^{\psi}[\frac{\beta}{\alpha^2-\beta^2}g\underline{x}-\vec{u}+\vec{u}+(\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}-\frac{2\beta^3}{\alpha(\alpha^2-\beta^2)})\vec{u}]=0,$$

y agrupando de forma conveniente se tiene

$$D^{\phi}D^{\psi}[\frac{\beta}{\alpha^2-\beta^2}g\underline{x}-\vec{u}+(\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}-\frac{2\beta^3}{\alpha(\alpha^2-\beta^2)}+1)\vec{u}]=0.$$

Sea entonces $I^*:=\frac{\beta}{\alpha^2-\beta^2}g\underline{x}-\vec{u}$ y $H:=\frac{\beta}{\alpha^2-\beta^2}g\underline{x}-\vec{u}+(\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}-\frac{2\beta^3}{\alpha(\alpha^2-\beta^2)}+1)\vec{u}$, es claro que $\vec{u}$ admite la representación

$$\vec{u}=h+i^*,$$

donde $h=(\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}-\frac{2\beta^3}{\alpha(\alpha^2-\beta^2)}+1)^{-1}H$ e $i^*=-(\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}-\frac{2\beta^3}{\alpha(\alpha^2-\beta^2)}+1)^{-1}I^*$, siempre y cuando $(\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}-\frac{2\beta^3}{\alpha(\alpha^2-\beta^2)}+1)\neq 0$, pero esto siempre ocurre pues cuando se hallan las raíces de la ecuación correspondiente se tiene que:

$$\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}-\frac{2\beta^3}{\alpha(\alpha^2-\beta^2)}+1=0\Leftrightarrow\alpha^3-\alpha\beta^2+2\alpha^2\beta-2\beta^3=0\Leftrightarrow(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)(\alpha+2\beta)=0,$$

pero de ser $\beta=\alpha$, $\beta=-\alpha$, o $\beta=-\frac{\alpha}{2}$ ocurre una contradicción con los coeficientes de Lamé clásicos. Y como, $h\in\mathcal{H}_{\phi,\psi}(\Omega)$ e $i^*\in\mathcal{I}_{\psi,\phi}(\Omega)$, se concluye la demostración. $\square$

Se pudo afirmar evidentemente con este último resultado y el Teorema 10, que si $\vec{u}\in\mathtt{Ker}[\mathcal{L}^*_{\substack{\phi,\psi\\ \alpha,\beta}}]\cap\mathtt{Ker}[\mathcal{L}^*_{\substack{\psi,\psi\\ \alpha,\beta}}]$, entonces existen funciones h armónica, i_ψ ψ-inframonogénica, $h_{\phi,\psi}$ (ϕ,ψ)-armónica por la izquierda, y $i_{\psi,\phi}$ (ψ,ϕ)-inframonogénica, tales que:

$$h+h_{\phi,\psi}+i_\psi+i_{\psi,\phi}=0.$$

2.2.3. Construcción de soluciones

A continuación se exponen teoremas relacionados con la construcción de soluciones del sistema generalizado de Lamé-Navier a partir de determinadas clases de funciones.

Teorema 15. *Si u es armónica o (ϕ,ψ)-inframonogénica entonces*

$$w = uD^{\psi} - \frac{\beta}{\alpha}D^{\psi}u \in \mathit{Ker}[\mathcal{L}^{*}_{\substack{\phi,\psi\\ \alpha,\beta}}].$$

Demostración. Es fácil ver que si se sutituye $w = uD^{\psi} - \frac{\beta}{\alpha}D^{\psi}u$ en (2.27) se tiene lo siguiente,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{*}_{\substack{\phi,\psi\\ \alpha,\beta}} w &= \alpha D^{\phi}uD^{\psi}D^{\psi} - \beta D^{\phi}D^{\psi}uD^{\psi} + \beta D^{\phi}D^{\psi}uD^{\psi} - \frac{\beta^2}{\alpha}D^{\phi}D^{\psi}D^{\psi}u \\
&= \left(\alpha - \frac{\beta^2}{\alpha}\right) D^{\phi}uD^{\psi}D^{\psi},
\end{aligned}$$

pero como u es armónica o (ϕ,ψ)-inframonogénica entonces efectivamente $\mathcal{L}^{*}_{\substack{\phi,\psi\\ \alpha,\beta}} w = 0$.
□

Teorema 16. *Si u es (ϕ,ψ)-armónica por la izquierda o ψ-inframonogénica entonces*

$$\widetilde{w} = uD^{\psi} - \frac{\alpha}{\beta}D^{\psi}u \in \mathit{Ker}[\mathcal{L}^{*}_{\substack{\phi,\psi\\ \alpha,\beta}}].$$

Demostración. Evidentemente si se sustituye $\widetilde{w} = uD^{\psi} - \frac{\alpha}{\beta}D^{\psi}u$ en (2.27) se tiene lo siguiente,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{*}_{\substack{\phi,\psi\\ \alpha,\beta}} \widetilde{w} &= \alpha D^{\phi}uD^{\psi}D^{\psi} - \frac{\alpha^2}{\beta}D^{\phi}D^{\psi}uD^{\psi} + \beta D^{\phi}D^{\psi}uD^{\psi} - \alpha D^{\phi}D^{\psi}D^{\psi}u \\
&= \left(\beta - \frac{\alpha^2}{\beta}\right) D^{\phi}D^{\psi}uD^{\psi},
\end{aligned}$$

pero como u es (ϕ,ψ)-armónica por la izquierda o ψ-inframonogénica entonces efectivamente $\mathcal{L}^{*}_{\substack{\phi,\psi\\ \alpha,\beta}} \widetilde{w} = 0$. □

Es claro que si se desea que w o $\widetilde{w}$ sean campos vectoriales de $\mathbb{R}^3$, tan sólo escoger a u como una función escalar y que cumpla las premisas del teorema correspondiente. Apréciese que tanto w como $\widetilde{w}$ se pueden representar como la suma de una función $h_{\phi,\psi}$ (ϕ,ψ)-armónica por la izquierda y una función $i_{\phi,\psi}$ (ϕ,ψ)-inframonogénica. En el caso de w; $h_{\phi,\psi} = -\frac{\beta}{\alpha}D^{\psi}u$ e $i_{\phi,\psi} = uD^{\psi}$. Mientras que para $\widetilde{w}$; $h_{\phi,\psi} = uD^{\psi}$ e $i_{\phi,\psi} = -\frac{\alpha}{\beta}D^{\psi}u$.

Obsérvese que cuando u sea un campo vectorial entonces $h_{\phi,\psi}$ e $i_{\phi,\psi}$ son también (ψ,ϕ)-inframonogénica y (ψ,ϕ)-armónica por la derecha, respectivamente.
Nótese también que si $u \in \mathtt{Ker}[\mathcal{L}^*_{\substack{\psi,\psi\\ \alpha,\beta}}]$, entonces claramente $D^\psi u \in \mathtt{Ker}[\mathcal{L}^*_{\substack{\phi,\psi\\ \alpha,\beta}}]$. También si $u \in \mathtt{Ker}[\mathcal{L}^*_{\substack{\phi,\psi\\ \alpha,\beta}}]$, entonces $D^\psi u \in \mathtt{Ker}[\mathcal{L}^*_{\substack{\psi,\psi\\ \alpha,\beta}}]$. Veamos los siguiente teoremas:

Teorema 17. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ y $\vec{h} \in \underline{\mathcal{H}}(\Omega) \cap \underline{\mathcal{H}}_{\phi,\psi}(\Omega)$. Además, $\vec{h}$ cumple que $\omega(D^\psi \vec{h}) = -D^\phi \vec{h}$. Entonces existe una función $i \in \mathcal{I}_{\phi,\psi}(\Omega)$ tal que $\vec{h} + i \in \mathtt{Ker}[\mathcal{L}^*_{\substack{\phi,\psi\\ \alpha,\beta}}]$. Más aún, i puede ser representada como $i = \frac{\alpha}{2\beta}[\vec{h} + (D^\psi h)\underline{x}]$.*

Demostración. Calculando directamente

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^*_{\substack{\phi,\psi\\ \alpha,\beta}}(\vec{h}+i) &= \alpha D^\phi \vec{h} D^\psi + \beta D^\phi D^\psi i \\
&= \alpha D^\phi \vec{h} D^\psi + \frac{\beta\alpha}{2\beta} D^\phi D^\psi [(D^\psi \vec{h})\underline{x}] \\
&= \alpha D^\phi \vec{h} D^\psi + \frac{\alpha}{2} D^\phi \nu(D^\psi \vec{h}) \\
&= \alpha D^\phi \vec{h} D^\psi + \frac{\alpha}{2} D^\phi \{-2\vec{h} D^\psi - D^\psi[\nu(\vec{h})]\} \\
&= -\frac{\alpha}{2} D^\phi D^\psi [\nu(\vec{h})] \\
&= -\frac{\alpha}{2} D^\phi D^\psi \vec{h} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Por otro lado,

$$
D^\phi i D^\psi = \frac{\alpha}{2\beta}[D^\phi \vec{h} + (D^\phi D^\psi \vec{h})\underline{x} + \omega(D^\psi \vec{h})]D^\psi = \frac{\alpha}{2\beta}[D^\phi \vec{h} D^\psi + \omega(D^\psi \vec{h})D^\psi] = 0.
$$

Concluyendo así que i es (ϕ,ψ)-inframonogénica, y que entonces $\vec{h} + i \in \mathtt{Ker}[\mathcal{L}^*_{\substack{\phi,\psi\\ \alpha,\beta}}]$. □

Teorema 18. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ e $\vec{i} \in \underline{\mathcal{I}}_\psi(\Omega) \cap \underline{\mathcal{I}}_{\phi,\psi}(\Omega)$. Además, $\vec{i}$ cumple que $D^\phi \omega(\vec{i}) = D^\psi \vec{i}$. Entonces existe una función $h \in \mathcal{H}_{\phi,\psi}(\Omega)$ tal que $h + \vec{i} \in \mathtt{Ker}[\mathcal{L}^*_{\substack{\phi,\psi\\ \alpha,\beta}}]$. Más aún, h puede ser representada como $h = \frac{\beta}{\alpha}[2\vec{i} + (\vec{i} D^\psi)\underline{x}]$.*

Demostración. Calculando directamente

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^*_{\substack{\phi,\psi\\ \alpha,\beta}}(h+\vec{i}) &= \alpha D^\phi h D^\psi + \beta D^\phi D^\psi \vec{i} \\
&= \beta[2D^\phi \vec{i} + (D^\phi \vec{i} D^\psi)\underline{x} + \omega(iD^\psi)]D^\psi + \beta D^\phi D^\psi \vec{i} \\
&= \beta\omega(iD^\psi)D^\psi + \beta D^\phi D^\psi \vec{i} \\
&= \beta[-2D^\phi \vec{i} D^\psi - \omega(\vec{i})D^\psi D^\psi] + \beta D^\phi D^\psi \vec{i} \\
&= -\beta D^\phi D^\phi \omega(\vec{i}) + \beta D^\phi D^\psi \vec{i} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por otro lado se tiene que

$$\begin{aligned}
D^\phi D^\psi h &= \frac{\beta}{\alpha}\{2D^\phi D^\psi \vec{i} + D^\phi[(D^\psi \vec{i} D^\psi)\underline{x} + \nu(\vec{i}D^\psi)]\} \\
&= \frac{\beta}{\alpha}[2D^\phi D^\psi \vec{i} + D^\phi(-2D^\psi \vec{i} - \nu(\vec{i})D^\psi)] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Concluyendo así que h es (ϕ,ψ)-armónica y que $h+\vec{i} \in \mathtt{Ker}[\mathcal{L}^*_{\substack{\phi,\psi\\ \alpha,\beta}}]$. $\square$

2.3. Conclusiones parciales

En este capítulo se da cumplimiento al objetivo general de la investigación pues se establece una generalización del sistema de Lamé-Navier, se demostraron propiedades, se describieron las soluciones del sistema, y se construyeron soluciones a partir de otras funciones determinadas. Además, se expusieron primeramente los resultados encontrados en la búsqueda de una fórmula de representación para las funciones (ϕ,ψ)-inframonogénicas, se hallaron propiedades de operadores utilizados y se inició el estudio de la descomposición de Almansi para dichas funciones (ϕ,ψ)-inframonogénicas.

Conclusiones

Al terminar la presente investigación se puede concluir que la misma da respuesta al problema científico, cumple con el objetivo y las tareas de la investigación. En síntesis, se exponen a continuación los principales resultados:

- Se encuentran fórmulas de estructura para funciones (ϕ, ψ)-inframonogénicas, se demuestran propiedades de los operadores utilizados y se inicia el estudio de la descomposición de Almansi para dichas funciones.
- Se demuestran características sobre la estructura de las soluciones del sistema generalizado de Lamé-Navier bajo ciertas condiciones.
- Se construyen soluciones de este sistema generalizado a partir de determinadas clases de funciones.

Recomendaciones

Como trabajo futuro se proponen las siguientes recomendaciones:

– Seguir investigando acerca de una posible fórmula de representación para las funciones (ϕ, ψ)-inframonogénicas.

– Proseguir el estudio de la descomposición de Almansi para estas funciones.

– Relacionar el sistema generalizado de Lamé-Navier con otros sistemas de ecuaciones en derivadas parciales de interés físico.

Bibliografía

[1] E. Almansi. Sulle integrazione dell equazione differenziale $\Delta^{2m}u = 0$. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 1898; 2(Suppl. 3). 10, 31

[2] Luis María Anson. Godfrey Harold Hardy, la belleza de las matemáticas. *www.elcultural.com*, 2018. 1

[3] Jorge Luis Borges. La aurora y el poniente. *Edición de Manuel Fuentes y Paco Tovar, ISBN: 978-84-694-0463-8*, 2010. 1

[4] Philippe G. Ciarlet. Mathematical Elasticity: Volume I: Three Dimensional Elasticit. *North-Holland*, 1988. 3

[5] K. Gürlebeck. On some operators in Clifford Analysis. 1998. 9, 13

[6] Jerrold E. Marsden; Thomas Hughes. Mathematical foundations of elasticity. *Dover Publications*, 1983. 3

[7] K. Gürlebeck; W. Sprößig. Quaternionic Analysis and Elliptic Boundary Value Problems. *Int. Ser. Num. Math. (ISNM)*, 1990. 12

[8] Ricardo Abreu Blaya; Juan Bory Reyes; Alí Guzmaán; Uwe Kähler. On the Π-operator in Clifford Analysis. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2016. 9, 12, 13, 25, 28

[9] Ricardo Abreu Blaya; Juan Bory Reyes; Alí Guzmán; Uwe Kähler. On the φ-Hiperderivative of the ψ-Cauchy-Type Integral in Clifford Analysis. 2016. 9

[10] Helge Kragh. Dirac: A Scientific Biography. 1990. 2

[11] Helmuth R. Malonek; Dixan Peña Peña; Frank Sommen. Fischer decomposition by inframonogenic function. 2009. 9, 10

[12] Ricardo A. Podestá. El operador de Dirac en variedades compactas planas. *Universidad de Córdova, Tesis para optar al grado de Doctor*, 2004. 1

[13] H. Malonek; G. Ren. Almansi-type theorems in Clifford analysis. *Math. Methods Appl. Sci. 25*, 2002. 31

[14] Arsenio Moreno García; Tania Moreno García; Ricardo Abreu Blaya; Juan Bory Reyes. A Cauchy integral formula for inframonogenic functions in Clifford Analysis. 2010. 10, 12, 13, 21

[15] Arsenio Moreno García; Tania Moreno García; Ricardo Abreu Blaya; Juan Bory Reyes. Inframonogenic functions and their applications in three dimensional elasticity theory. 2016. 3, 10, 33

[16] F. Brackx; R. Delanghe; Frank Sommen. Clifford analysis. *Research Notes in Mathematics, 76, Pitman, Boston*, 1982. 10

[17] Juan Bory Reyes; Hennie De Schepper; Alí Guzmán Adán; Frank Sommen. Higher order Borel-Pompeiu representations in Clifford Analysis. 2010. 16, 17, 29

[18] K. Gürlebeck; K. Habetha; W. Sprössig. Holomorphic Functions in the Plane and n-Dimensional Space. *Birkhäuser Verlag, Basel*, 2008. 27

[19] Eric W. Weisstein. Klein-Gordon Equation. 2017. 2

[20] W.R.Hamilton. Elements of quaternions. *Longmans Green*, 1866. 3