

Optimización basada en Mallas Variables con operador de fronteras basado en búsqueda genética

Trabajo de tesis en opción al título de Máster en
Matemática Aplicada e Informática para la Administración

Ricardo Navarro Rodriguez



Universidad de Holguín “Oscar Lucero Moya”

Facultad de Informática y Matemática

**Optimización basada en Mallas Variables con operador de
fronteras basado en búsqueda genética**

**Trabajo de tesis en opción al título de Máster en Matemática Aplicada e
Informática para la Administración**

Autor: Ing. Ricardo Navarro Rodriguez

Tutores: Dr.C. Rafael E. Bello Pérez

Dr. Enrique J. Leyva Miranda

Consultor: Dr.C. Amílkar Y. Puris Cáceres

Holguín, Cuba

Marzo de 2012

Resumen

Las técnicas meta-heurísticas son cada vez más útiles en la toma de decisiones a partir de su aplicación en tareas de optimización. La Optimización basada en Mallas Variables es una propuesta reciente muy prometedora. En tal sentido, los estudios realizados hasta el momento no caracterizan su desempeño en diferentes tipos de problemas, a la vez que el comportamiento evidenciado requiere ser mejorado, en función de convertirlo en un método más competitivo. En este trabajo se presenta un estudio del desempeño de dicho método ante dos tipos de problemas, según la posición del óptimo en el espacio de búsqueda. Asimismo, se introduce la búsqueda genética en la generación de nodos de fronteras, como una alternativa para mejorar el desempeño de tal método.

Abstract

Meta-heuristic methods are very useful in the field of decision making by solving many optimization problems. In such a sense, Variable Mesh Optimization is a recent and proficient meta-heuristic. No study about this technique approaches its behavior for specific kinds of problems. At the same time they do suggest that the shown behavior must be improved in order to make this method a more competitive one. This research shows its behavior for two kinds of problems, attending to the location of optima at search space. In addition, it's introduced generic search in the frontier operator of this method, as an alternative to improve its performance.

Índice de contenido

Introducción.....	1
Capítulo I. Fundamentos teóricos.....	6
1.1 Toma de decisiones.....	6
1.2 Ayuda a la toma de decisiones: un enfoque interdisciplinario.....	8
1.3 Optimización para la toma de decisiones	14
1.4 Modelos de optimización.....	16
1.5 Métodos de optimización	18
1.6 Técnicas meta-heurísticas	19
1.7 Búsqueda genética	23
1.8 Optimización basada en Mallas Variables	26
1.8.1 La expansión y la contracción en VMO.....	27
1.8.2 El modelo VMO.....	29
1.9 Conclusiones parciales	29
Capítulo II. VMO: estudio de desempeño y propuesta de mejora	31
2.1 Generalidades experimentales	31
2.1.1 Funciones de prueba	32
2.1.2 Metodología estadística	33
2.1.3 Configuración de VMO.....	33
2.2 Análisis de comportamiento de VMO: estudio experimental	37
2.3 VMO con operador de fronteras basado en búsqueda genética.....	39
2.3.1 Análisis de las estrategias de mutación por cada cruce	41
2.3.2 Selección de la mejor estrategia de búsqueda genética.....	43

2.3.3 Validación de la alternativa elegida.....	45
2.4 VMOBLX : aporte a la toma de decisiones	48
2.5 Conclusiones parciales	51
Conclusiones.....	53
Recomendaciones.....	54
Referencias bibliográficas	55
Bibliografía	60
Glosario de términos	65
Anexos	I

Índice de tablas

Tabla 2.1. Funciones de prueba ($F_1 - F_7$)	32
Tabla 2.2. Tests de Friedman e Iman-Davenport (VMO, CHC, ODE, LDWPSO y SSGA) en Dim 10, Dim 30 y Dim 50.....	37
Tabla 2.3. Tests de Friedman e Iman-Davenport (VMO, CHC, ODE, LDWPSO, SSGA, G-CMA-ES, DE y K-PCX) en Dim 10, Dim 30 y Dim 50	39
Tabla 2.4. VMO vs VMO_SF: test de Wilcoxon	40
Tabla 2.5. Cantidad de nodos de buena calidad generados por cada operador (Op) en condiciones de óptimos en frontera (dimensión 10)	41
Tabla 2.6. Tests de Friedman e Iman-Davenport (grupos de operadores de fronteras basados en cruce genético y la función h original de VMO)	42
Tabla 2.7. Ranking medio (test de Friedman) para cada grupo de variantes de operador de frontera, definido por la estrategia de cruce empleada ..	43
Tabla 2.8. Tests de Friedman e Iman-Davenport (variantes más destacadas de operador de fronteras)	43
Tabla 2.9. Test de Holm con estrategia “BLX- + no mutar” como control.....	44
Tabla 2.10. VMOBLX vs VMO: test de Wilcoxon.....	45
Tabla 2.11. Tests de Friedman e Iman-Davenport (VMOBLX , CHC, ODE, LDWPSO y SSGA) en Dim 10, Dim 30 y Dim 50	45
Tabla 2.12. Tests de Friedman e Iman-Davenport (VMOBLX , CHC, LDWPSO, ODE, SSGA, G-CMA-ES, DE y K-PCX) en Dim 10, Dim 30 y Dim 50	47
Tabla 2.13. VMOBLX vs VMO: test de Wilcoxon para análisis de eficiencia.....	50
Tabla Anexo I.1. Errores medios de cada variante de VMO en dimensión 10	I
Tabla Anexo I.2. Errores medios de cada variante de VMO en dimensión 30	II
Tabla Anexo I.3. Errores medios de cada variante de VMO en dimensión 50	III
Tabla Anexo I.4. Errores medios de las alternativas de cruce y mutación	IV

Índice de figuras

Figura 1.1. Taxonomía de los métodos de optimización	19
Figura 1.2. Genealogía de las meta-heurísticas	21
Figura 2.1. Test de Bonferroni-Dunn (VMO, CHC, ODE, LDWPSO y SSGA) con VMO como control: los algoritmos fuera del intervalo marcado difieren significativamente de VMO	38
Figura 2.2. Test de Bonferroni-Dunn (VMO, CHC, ODE, LDWPSO, SSGA, K-PCX, G-CMA-ES y DE) con VMO como control	39
Figura 2.3. Test de Bonferroni-Dunn (VMOBLX , CHC, ODE, LDWPSO y SSGA): con VMOBLX como control	46
Figura 2.4. Test de Bonferroni-Dunn (VMOBLX , CHC, ODE, LDWPSO, SSGA, DE, K-PCX y G-CMA-ES) con VMOBLX como control.....	47
Figura Anexo II.1. Ranking medio (test de Friedman) de las variantes seleccionadas de operador de fronteras, basadas en búsqueda genética	V

Introducción

El entorno empresarial moderno se rige por criterios de eficiencia y efectividad, que sirven de patrones de medida para los distintos procesos que en una entidad se desarrollan. El control de los recursos y su adecuado manejo permiten mantener y elevar los parámetros de calidad de una entidad, en la medida en que se garantiza la continuidad de los procesos productivos con indicadores de rendimiento positivos. De ahí que ello se presente como una prioridad de primer nivel en cualquier empresa.

Es bastante común que en el marco empresarial los directivos deban acometer acciones derivadas de procesos de toma de decisiones sobre los recursos con que cuentan. En este contexto y a partir de sus potencialidades en el manejo de datos e información, la computación ha influido fuertemente en el desarrollo de las tareas de toma de decisiones. La complejidad de las mismas ha crecido proporcionalmente al aumento de las cantidades de datos e información disponibles. En consecuencia, las herramientas computacionales destinadas al apoyo a la toma de decisiones han evolucionado, en aras de satisfacer las necesidades de los directivos, conforme al desarrollo de algunas esferas científicas como la Investigación de Operaciones y la Inteligencia Artificial.

En tal sentido, los procedimientos de optimización para la toma de decisiones favorecen la actividad administrativa en la empresa actual. Estos abarcan tanto las técnicas tradicionales de optimización como algunas un poco más novedosas, provenientes en su mayoría de campos como el de la Inteligencia Artificial, puestos ahora en función de los Sistemas de Ayuda a la Toma de Decisiones.

La optimización, que constituye una poderosa herramienta para el entorno empresarial, en sí misma tiene implícita la necesidad de tomar decisiones acerca de cuál técnica elegir y qué método utilizar en cada situación concreta que se enfrenta; lo que constituye un problema de Administración en un sentido más amplio. Para resolverlo, el punto de partida está en estudiar el proceso de optimización, mediante el cual se pretende encontrar la mejor solución posible para cierto problema. Puede ser visto, además, como la búsqueda de los valores

de las variables de decisión para los cuales determinada función objetivo (FO) alcanza su valor extremo, sea este un máximo o un mínimo.

Las técnicas exactas de optimización se caracterizan por su elevada complejidad computacional en problemas de gran tamaño. Por su parte, los métodos heurísticos contrarrestan tal limitación: *aunque no garantizan la solución óptima, son capaces de hallar con facilidad una buena solución en un período de tiempo admisible* [Cheng07]. Esto resulta de mayor utilidad cuando el espacio de búsqueda es muy grande.

Una meta-heurística es un modelo heurístico de amplio propósito que guía heurísticas específicas hacia regiones promisorias del espacio de búsqueda. Una meta-heurística puede entonces ser aplicada, con escasos ajustes, a distintos problemas de optimización [Talbi09].

Por su carácter estocástico, ninguna técnica meta-heurística es universalmente válida, o sea, aplicable con buenos resultados a todos los problemas. Asimismo, no es posible afirmar que existe un mejor *proceso solución* para determinado problema. Todo ello es la interpretación directa de lo que en Inteligencia Artificial se conoce como el teorema “*no free lunch*”. Esta es la causa fundamental por la que existe una variedad de métodos de este tipo. Además, justifica el hecho de que cualquier técnica meta-heurística novedosa y competitiva sea siempre acogida para su estudio por la comunidad científica internacional.

En toda situación que requiera el uso de meta-heurísticas es preciso gestionar la selección del método a utilizar. Una vez que se haya modelado matemáticamente el problema en cuestión y teniendo como fin decidir qué meta-heurística aplicar, se identifican los métodos que potencialmente podrían ser escogidos. Para esto se debe considerar, por ejemplo, la naturaleza del problema, los resultados reportados para algunas técnicas y las experiencias anteriores en la solución de situaciones similares. Posterior a la elección de tales métodos, su implementación en el problema abordado permite comparar resultados en función de los niveles de efectividad y eficiencia mostrados. A partir de este análisis, es posible la selección de uno de ellos, cuyo desempeño será controlado por un tiempo limitado, durante

el cual será sometido a pruebas en el escenario real de aplicación. En consecuencia, algunos ajustes adicionales en la concepción y/o configuración del método pudieran realizarse, a fin de elevar su desempeño en tal situación práctica.

Lo anteriormente expuesto refleja claramente la necesidad de estudiar a profundidad las distintas técnicas meta-heurísticas. Esto implica conocer acerca de su desempeño en escenarios específicos. Entre las más destacadas figuran algunas meta-heurísticas poblacionales: la Optimización basada en Enjambres de Partículas (Particle Swarm Optimization, PSO), los Algoritmos Genéticos (Genetic Algorithms, GA) y la Optimización basada en Colonias de Hormigas (Ant Colony Optimization, ACO). Recientemente, surge el método de Optimización basada en Mallas Variables (Variable Mesh Optimization, VMO). Su esencia radica en la representación de soluciones potenciales como nodos de una malla, cuya configuración varía en su movimiento por el espacio de búsqueda.

VMO es un modelo meta-heurístico bastante reciente. De ahí que no haya sido ampliamente abordado y que en la generalidad de los estudios [Puris09, Puris10, Puris11] que evidencian su desempeño, en términos de efectividad, no se particularice en ningún tipo de problemas de optimización. Ello sugiere el análisis de su comportamiento en distintos entornos, teniendo en cuenta que muchos de los problemas a resolver por estas técnicas tienen características particulares que demandan especial atención.

Por otra parte, aunque los resultados lo ubican como un método competitivo y promisorio, en algunos escenarios su comportamiento es superado por los de otros enfoques meta-heurísticos destacados [Puris11]. Tal situación demanda un mejor aprovechamiento de las potencialidades de los operadores de VMO, en función de mejorar su desempeño.

De lo anteriormente expuesto surge el **problema científico** que motivó este trabajo investigativo: *los escasos estudios realizados en torno a VMO evidencian un desempeño limitado del método, a la vez que no permiten evaluar el mismo en tipos específicos de problemas de optimización.*

Se define como **objeto de estudio** *la optimización basada en meta-heurísticas para la toma de decisiones*. Asimismo, se tiene como **campo de acción** *la meta-heurística VMO*. El mismo quedó delimitado por el **objetivo** trazado: *proponer mejoras que contribuyan a elevar el desempeño de VMO, previo estudio del mismo ante distintos tipos de problemas de optimización*.

La investigación estuvo regida por las siguientes **preguntas científicas**:

1. ¿Cuáles constituyen las bases teóricas de la optimización basada en meta-heurísticas para la toma de decisiones?
2. ¿Qué modelos meta-heurísticos se destacan en el estado del arte?
3. ¿Qué características distinguen al modelo VMO?
4. ¿Cuál es el comportamiento actual de VMO ante distintos tipos de problemas de optimización?
5. ¿Qué operador(es) de VMO debe(n) modificarse para mejorar su desempeño?
6. ¿Cómo modificar tal(es) operador(es) de modo que mejore el desempeño de VMO?

Para guiar la investigación se plantearon como **tareas**:

1. Estudiar los fundamentos teóricos de la optimización basada en meta-heurísticas para la toma de decisiones.
2. Introducir modelos meta-heurísticos destacados en el estado del arte.
3. Describir el modelo VMO.
4. Analizar el comportamiento de VMO ante distintos tipos de problemas de optimización.
5. Seleccionar operador(es) de VMO para su redefinición.
6. Implementar alternativa(s) para redefinir tal(es) operador(es).
7. Validar la(s) alternativa(s) implementada(s).

El cumplimiento de estas tareas estuvo apoyado por **métodos teóricos y empíricos**. Entre los primeros se incluyen:

- Análisis y síntesis: esencial en el entendimiento del campo de acción a partir del estudio de la documentación referente al mismo.
- Inducción y deducción: utilizado en distintas etapas de la investigación, para llegar a conclusiones generales a partir de algunas particulares y viceversa.
- Histórico y lógico: usado en el estudio de la optimización para la toma de decisiones con vista a un mejor entendimiento e ilustración de la misma.

Entre los empíricos se encuentran:

- Consulta bibliográfica: empleada para el análisis y entendimiento del proceso del campo de acción y el objeto de la investigación.
- Experimentación: constituye un pilar de este trabajo, a partir del marcado carácter experimental del análisis de comportamiento de VMO en los referidos tipos de problemas, así como la validación de las alternativas de mejora implementadas.

Asimismo, fueron empleados métodos **estadístico-matemáticos** para la validación de los resultados en las distintas etapas experimentales del estudio.

El trabajo de investigación tiene sus bases en la optimización para la toma de decisiones, con particular interés en el entorno de las técnicas meta-heurísticas puestas en función de ello. Se describe el comportamiento de VMO ante distintos tipos de problemas. Se introducen alternativas para fomentar su desempeño.

El documento está estructurado en: introducción, dos capítulos, conclusiones, recomendaciones, referencias bibliográficas, bibliografía, glosario de términos y anexos. El capítulo I aborda las bases teóricas de la optimización para la toma de decisiones con énfasis en las técnicas meta-heurísticas, en especial en el modelo VMO. En el capítulo II se analiza el comportamiento de VMO en distintos tipos de problemas. Además, se introducen alternativas para favorecer su desempeño.

Capítulo I. Fundamentos teóricos

Este capítulo recoge elementos teóricos relativos a la toma de decisiones, con especial énfasis en los Sistemas de Ayuda a la Toma de Decisiones y las disciplinas que involucra. En relación a esto último, se particulariza en la Inteligencia Artificial y la Investigación de Operaciones, en cuya intersección se encuentran las técnicas meta-heurísticas, como métodos de soporte a la toma de decisiones a partir de su relevancia para la optimización. Se presentan además el modelo VMO, que constituye el centro de esta investigación, y otros métodos meta-heurísticos de interés para la misma.

1.1 Toma de decisiones

Tomar decisiones es uno de los dilemas más comunes para el ser humano, que se encuentra frecuentemente obligado a dar respuestas ante distintas situaciones. Esto resulta de especial interés en la dirección de procesos empresariales, a partir de que la gran cantidad de datos e información implicados en ellos dificulta la toma de decisiones. A menudo las decisiones afectadas por tal situación son las de mayor relevancia para las entidades.

Solucionar un problema implica activar los recursos cognitivos, emocionales y conductuales, que permiten identificar y concretar las alternativas y estrategias más adecuadas para el reconocimiento, enfrentamiento y solución de una situación. Tomar una decisión implica la selección de una acción, y con ello la existencia de al menos dos posibles acciones. La alternativa seleccionada resulta aquella que más se ajusta al objetivo perseguido, o sea, este proceso pretende maximizar la utilidad que se puede obtener con determinados recursos. En este entorno, el concepto de utilidad fue introducido por los economistas, que dieron con ello un fuerte impulso a esta problemática.

La esencia de la resolución de problemas de toma de decisiones descansa en la información disponible sobre el dominio de aplicación. Cuanto mejor sea esta, el problema será definido con mayor calidad, a la vez que se propondrán mejores alternativas de solución, se hará un mejor análisis de las mismas y una selección

más adecuada de una de estas opciones. Según la información disponible y la naturaleza del dominio, las formas en que se toman decisiones clasifican en dos categorías principales: problemas de decisión estructurados y no estructurados.

A la primera de ellas pertenecen los problemas con una estructura tal que propicia la evaluación de las alternativas mediante modelos. La mayor parte de estos problemas son resueltos con el empleo de métodos cuantitativos, cuya aplicación resulta satisfactoria en un reducido subconjunto de problemas de toma de decisiones. La causa de ello radica en que tales métodos requieren una formulación previa y total del problema.

Por su parte, *los problemas no estructurados carecen de tal completitud en su definición. De ello se deriva la necesidad de resolverlos, generalmente, mediante procesos iterativos de búsqueda* [Silverman94]. Dichos métodos de solución de problemas incluyen las técnicas meta-heurísticas, de la Inteligencia Artificial.

Los procesos de toma de decisiones mantienen una fuerte dependencia de los criterios de incertidumbre, tenidos en cuenta en situaciones donde no se conoce con toda certeza la información relevante, o parte de esta [Mathur96]. En este sentido, muchos autores [Stael71 y Shapiro90] explican cómo la teoría de la decisión establece formalmente las bases para tomar decisiones en condiciones de incertidumbre. Todo ello ha dado lugar al desarrollo de diversos modelos para la toma de decisiones en tales condiciones [Russell96].

Asimismo, la literatura científica alrededor del tema, recoge los procesos de toma de decisiones en cinco escuelas de pensamiento [Keen78], sujetas a:

- la perspectiva *racional*, donde se cuenta con la información y los recursos requeridos para tomar la decisión. Por tanto, resulta viable si se conoce la información sobre las variables de decisión y se tiene un criterio objetivo bien definido que permite discriminar entre las alternativas de solución.
- el punto de vista orientado a *satisfacer*, que no persigue encontrar soluciones óptimas, sino algunas suficientemente buenas. Para lograrlo se basa, fundamentalmente, en el uso de heurísticas.

- el enfoque *político*, que representa aquellas decisiones resultantes de la negociación entre distintas unidades de la entidad.
- la perspectiva *organizacional*, de acuerdo con la cual las decisiones se derivan de procedimientos operacionales establecidos. Descubrir y establecer tales procedimientos resulta entonces la clave en este caso.
- el punto de vista de las *diferencias individuales*, que responde a la individualidad de quien toma la decisión y por tanto, de su modo propio de solucionar los problemas.

Igualmente, tales enfoques se presentan en tres corrientes principales [Shapiro90]:

- la *descriptiva*, que detalla comportamientos usando la teoría de la decisión.
- la *normativa*, donde las bondades de la teoría axiomática se ponen en función de la selección de acciones.
- la *prescriptiva*, según la cual se favorece la toma de decisiones a partir del uso de sistemas axiomáticos o técnicas correctivas.

1.2 Ayuda a la toma de decisiones: un enfoque interdisciplinario

Ayuda a la Decisión es la disciplina encargada de la identificación de criterios de diseño para herramientas en función de la toma de decisiones. También persigue ofrecer técnicas y enfoques que posibiliten a los sistemas evolucionar en el tiempo conforme a su explotación, así como controlar el desarrollo de las tecnologías computacionales para la toma de decisiones [Alter80]. Tiene sus bases en los estudios teóricos de toma de decisiones en organizaciones, hechos por investigadores del Carnegie Institute of Technology, y en los trabajos técnicos sobre sistemas de computación interactivos realizados en el Massachusetts Institute of Technology (MIT), todo ello a mediación del pasado siglo [Keen78].

En la década del 70 los Sistemas de Ayuda a la Toma de Decisiones (Decision Support Systems, DSS) surgieron como un enfoque nuevo y práctico para usar la computación en función de las tareas de dirección relacionadas con la toma de decisiones. La idea de sistemas decisión activos fue defendida por Keen [Keen87]

cuando especulara en 1987 sobre lo que sería *“la nueva década de los DSS”*. Señaló que *lo esencial es la ayuda que se intente brindar a partir de los DSS y no su tecnología en sí misma*. En este sentido, *la mayoría de las investigaciones en este campo se centran en cómo la tecnología puede mejorar la eficiencia con que se toma una decisión y con lo cual aumente la efectividad de la esta* [Pearson95].

Keen sugiere que *dichas investigaciones se concentren en áreas emergentes e inexploradas donde puedan emplearse las habilidades de los desarrolladores de estos sistemas*. Además, *deben procurar aplicar modelos y métodos analíticos que ofrezcan una perspectiva mayor de cómo realizar decisiones con más efectividad*. Al mismo tiempo, *se ha de explotar las nuevas tecnologías de desarrollo de software y experiencias basadas en Inteligencia Artificial*. Por último, *deben enfatizar en la especial importancia de los usuarios*, pues combinan la experticia en toma de decisiones con conocimientos que les permiten aprovechar las potencialidades de desarrollo en el entorno computacional.

Las bases conceptuales de los DSS fueron planteadas por Gorry y Scott Morton [Gorry71], quienes los describieron *como sistemas computacionales que tratan problemas donde al menos alguna etapa es no estructurada o semiestructurada*. Además aclaran que un sistema computacional puede concebirse para tratar la parte estructurada de un problema de toma de decisiones, pero en los DSS se considera el criterio del tomador de decisiones en la parte no estructurada.

Lo anterior justifica que en los DSS haya una alta interacción hombre-máquina en la solución de problemas. Al respecto, el término *ayuda a la decisión* implica un equilibrio entre el criterio humano y las bondades computacionales. El carácter interactivo de estos sistemas se deriva de la naturaleza de las situaciones que abordan. Muchos problemas no estructurados o semi-estructurados pueden ser tratados más efectivamente mediante procesos interactivos. En ellos, las herramientas computacionales y el tomador de decisiones exploran de conjunto un espacio de problemas, en busca de una conceptualización apropiada de aquel que se pretende resolver, así como la acción adecuada para lograrlo.

El poder de los DSS para las decisiones radica en la información y el conocimiento necesarios para que las computadoras resulten útiles a tal efecto, así como en el juicio de quien las toma. No pretenden entonces automatizar el proceso de decisión; tampoco predefinen objetivos ni imponen soluciones. Estas herramientas responden rápidamente a las necesidades dinámicas de los directivos, quienes además se involucran en gran medida en su desarrollo y explotación. El enfoque de los DSS trasciende el uso convencional de la computación en situaciones estructuradas, a la vez que evita intentar automatizar actividades no estructuradas.

Las operaciones derivadas del uso de un DSS provocan que aumente la efectividad en la toma de decisiones, conforme se fortalece la eficiencia del personal y la solución rápida de problemas. De igual modo, fomentan la comunicación interpersonal y el control empresarial. A tal fin, los DSS ofrecen varios niveles de ayuda. Estos van desde permitir el acceso a hechos o recuperación de información, por medio del reconocimiento de patrones, hasta otorgar al tomador de decisiones un conjunto de modelos ajenos al dominio de aplicación y útiles para la toma de decisiones. Tales modelos incluyen la aplicación de técnicas de Inteligencia Artificial.

Los DSS reportan gran utilidad en situaciones particulares. Entre ellas, cuando los amplios volúmenes de datos disponibles dificultan el acceso a la información y su uso conceptual, o se necesitan juicios para reconocer o decidir qué constituye el problema, así como para crear alternativas y escoger una solución. Asimismo, son útiles en condiciones que implican alguna presión de tiempo, ante lo cual regularmente su implementación se corresponde con un enfoque de satisfacción. Es este uno de los casos donde se le concede mayor importancia a la aplicación de métodos aproximados de optimización, como las técnicas meta-heurísticas, pertenecientes al área de conocimientos de la Inteligencia Artificial.

Lo anteriormente expuesto sugiere que en el diseño e implementación de un DSS se exploten varias tecnologías. En la práctica, abarcan medios de almacenamiento y recuperación de información, modelos y técnicas de resolución de problemas estructurados y no estructurados, basados en métodos cuantitativos o búsqueda

heurística, entre otros. De ahí que se requiera integrar potencialidades de distintas disciplinas, como las Bases de Datos y los Almacenes de Datos, la Investigación de Operaciones, la Simulación, la Estadística y la Inteligencia Artificial.

El negocio moderno descansa sobre datos. El total de datos en medios informáticos crece aceleradamente: la información es un componente esencial de todo producto o servicio. Tomar decisiones implica entonces manejar grandes volúmenes de información, tanto actual como histórica. Los Sistemas Gestores de Bases de Datos (SGBD) satisfacen requerimientos básicos de manejo de la información. Investigaciones de los propios Gorry y Scott Morton sostienen que *en el entorno de los DSS tanto las necesidades de información como los modelos tienen características propias*. A partir de que los requerimientos de información en estos procesos son definidos pobremente, se precisan sistemas de bases de datos distintos a los empleados en los sistemas operacionales. Además, la naturaleza poco estructurada de los problemas de toma de decisiones demanda el uso de ambientes de modelación flexibles. Todo ello conlleva al uso de los almacenes de datos como tecnología de bases de datos, empleada a tal fin en el desarrollo de los DSS.

Un almacén de datos (data warehouse) es visto como *una base de datos orientada a ayudar a la toma de decisiones, la cual contiene una enorme cantidad de información en la que la dimensión tiempo forma parte de las llaves para poder soportar su evolución histórica, se encuentra resumida para permitir un uso racional de memoria y rápidos tiempos de respuestas, está orientada a temáticas para su tratamiento lógico y tiene un alto grado de integración para unificar diferentes aplicaciones del dominio del problema* [Inmon96].

Otra definición, esta vez desde el punto de vista de un DSS, lo describe como *un almacén inteligente y activo de datos que puede manipular y agregar información a partir de muchas fuentes, distribuir esta donde se necesite y activar políticas de negocios* [Harkey96]. Por otra parte, según Inmon [Inmon96], *en los almacenes de datos radican los fundamentos arquitectónicos de los DSS*. Por ello, crean las condiciones para el éxito y la eficiente explotación de los datos como un recurso.

El mayor problema en el procesamiento de la información está en cómo manejar bases de datos, cada vez más grandes y con datos más complejos, sin afectar los tiempos de respuesta. A este fin, Online Analytical Processing (OLAP) constituye un enfoque común para los almacenes de datos. Las herramientas OLAP usan estructuras multidimensionales para almacenar datos y sus interrelaciones. Esto ubica a OLAP por encima de SQL, el lenguaje más popular de manipulación de datos [Harkey96 y Fayyad96b]. De este modo, los servidores OLAP abordan el almacenamiento de datos de forma no convencional, en respuesta dinámica y eficiente a nuevos requerimientos y perspectivas de los SGBD.

Por su parte, la Investigación de Operaciones representa una potente herramienta para resolver problemas de toma de decisiones estructurados. Esta es considerada por muchos como *el arte de la toma de decisiones* [Mathur96]. Resulta la aplicación directa de la teoría de la decisión, cuyo campo de acción incluye técnicas como la programación lineal, la programación dinámica, los métodos de transporte, el análisis markoviano, las rutas críticas y la simulación. Esta última se basa en modelos más accesibles y suele ofrecer un enfoque más flexible. Su relevancia radica en que usualmente reproduce, de acuerdo con sus propios términos, el ambiente de trabajo donde se toma la decisión. En tal entorno simulado es posible probar decisiones alternativas para el problema en cuestión.

Ligada a la Investigación de la Operaciones y a la Simulación, la Estadística representa una herramienta para resolver problemas estructurados de toma de decisiones. Resulta de gran interés su aplicación, algo más reciente, en decisiones no estructuradas. En este sentido, el análisis estadístico multivariado representa un complemento importante de las herramientas OLAP. Otros aportes hechos a tal efecto por esta disciplina resultan las técnicas estadísticas no paramétricas del análisis cualitativo de datos, la teoría del pronóstico basado en tendencias y series cronológicas del Descubrimiento de Conocimiento en Bases de Datos, y el análisis bayesiano, de la Inteligencia Artificial aplicada a la toma de decisiones. A partir de la significación de este último, a menudo se hace alusión al término teoría de decisión bayesiana [Shapiro90 y Heckerman95], a la vez que se emplean otros modelos de redes de decisión basadas en probabilidades [Breese92].

Los modelos y técnicas de Inteligencia Artificial (IA) están orientados a la solución de aquellos problemas que no cuentan con procedimientos de solución, o en los que los mismos son computacionalmente impracticables. De ello se deriva su particular utilidad en problemas semi-estructurados, aunque permiten abordar problemas de toma de decisiones de cualquier tipo. La esencia de esta disciplina radica en la modelación heurística. Una heurística representa reglas de actuación o procedimientos operacionales comunes de un tomador de decisiones, basados en su experiencia. Las mismas suelen ser de poco costo computacional.

Tanto los sistemas de administración de modelos como los de apoyo a la toma de decisiones han empleado técnicas de Inteligencia Artificial, incluyendo los Sistemas Expertos (SE), para brindar un mayor apoyo al tomador de decisiones [Bonczek81, Courtney93]. Respecto a los DSS, la IA complementa el punto de vista ofrecido por los métodos cuantitativos. *Para apoyar procesos de toma de decisiones se necesitan conocimientos y heurísticas. El fin debe ser ayudar a simular, estructurar y valorar distintos enfoques del problema, así como a identificar los modelos a aplicar al mismo, encontrar soluciones alternativas y tratar la toma de decisiones como un proceso de aprendizaje reflexivo* [Silverman94].

La IA simbólica, las Redes Neuronales Artificiales (RNA) y los Sistemas Borrosos son de gran interés para los DSS. El área de conocimientos de la IA simbólica incluye los Sistemas Basados en Reglas y el Razonamiento Basado en Casos, empleados en el desarrollo de SE. A partir de estos últimos y los métodos cuantitativos de la toma de decisiones se han creado modelos como la *ayuda a la decisión basada en el conocimiento*, los *sistemas inteligentes de modelación de decisiones* y los *sistemas expertos analíticos de decisión* [Silverman94]. *La teoría de juegos es otra arista de IA muy aplicada en los DSS* [Harper88 y Russell96].

Los DSS han evolucionado, desde ser aplicaciones que solo permiten elegir entre posibles acciones en un proceso, hasta convertirse en sistemas que realizan predicciones de comportamientos futuros a tener en cuenta al tomar nuevas decisiones. Ello se ha acuñado, en Inteligencia Artificial, como Descubrimiento de Conocimiento en Bases de Datos (Knowledge Discovery in Databases, KDD). El

mismo se define como *el proceso no trivial de identificar en los datos patrones validos, novedosos potencialmente útiles y comprensibles* [Fayyad96a].

KDD aporta técnicas y herramientas computacionales para extraer conocimiento útil de las crecientes cantidades de datos. Más que los datos en su forma original, lo realmente valioso es el conocimiento que se infiere de ellos [Fayyad96b y Jantke97]. Como parte del proceso KDD, la Minería de Datos (Data Mining, DM) es la etapa orientada a la aplicación de algoritmos específicos, para extraer patrones a partir de los datos. De acuerdo con Harkey [Harkey96], se ha reportado hasta un 1000% de ganancias en algunas empresas a partir del uso de técnicas de DM. En KDD convergen varios campos entre los que figuran algunos de los anteriormente abordados. Por tanto, su empleo en el desarrollo de los DSS fortalece el carácter interdisciplinario de la Ayuda a la Decisión.

1.3 Optimización para la toma de decisiones

La escasez de recursos y la creciente complejidad de los sistemas hacen que cada vez sea más difícil asignar recursos o actividades de la forma más eficaz posible. En tal sentido, juega un papel fundamental la Investigación de Operaciones, como la aplicación del método científico para asignar los recursos o actividades de forma eficaz, en la gestión y organización de sistemas complejos.

Como se señaló con anterioridad, la Investigación de Operaciones es usualmente referida como *el arte de la toma de decisiones*, a partir del desarrollo de técnicas de optimización aplicadas a tal proceso. El principal objetivo de esta área de conocimientos consiste en formular y resolver diversos problemas orientados a tomar decisiones. Este proceso debe estar marcado por una amplia y constante interacción entre el analista y el cliente.

El desarrollo de un sistema en esta área incluye los siguientes pasos:

- *definición del problema*: consiste en identificar los elementos de decisión: objetivo(s), alternativas y limitaciones del sistema. Hay que recoger información relevante. Esta etapa es esencial para lograr decisiones útiles.

- *formulación del problema*: un modelo cualitativo es una representación simplificada de la realidad, que permite comprenderla y estudiarla. Su formulación debe equilibrar la sencillez con la capacidad de representación.
- *construcción del modelo matemático*: hace más claras la estructura y las relaciones, y facilita el uso de técnicas matemáticas y computacionales. Los objetivos se convierten en función objetivo, las alternativas en variables de decisión y las limitaciones del sistema en restricciones.
- *resolución*: significa hallar los valores de las variables de decisión para los que la solución es óptima o satisfactoria sujeta a las restricciones. Existen distintos métodos y formas de aplicarlos. Ante relaciones matemáticas muy complejas son de especial utilidad los métodos heurísticos y la Simulación.
- *verificación, validación y refinamiento*: su esencia radica en eliminación de errores y la comprobación de la adaptabilidad del modelo a la realidad.
- *interpretación y análisis de resultados*: se analiza la robustez de la solución óptima obtenida y se detectan las soluciones cuasi óptimas atractivas.
- *implantación y uso extensivo*: incluye el desarrollo de un sistema de ayuda y mantenimiento, así como la formación de usuarios.

La naturaleza de los problemas abordados puede ser determinística, como en los modelos de programación matemática, donde la teoría de probabilidades no es necesaria; o bien de problemas donde la presencia de incertidumbre tiene un rol preponderante, como en los modelos probabilísticos.

En la actualidad la toma de decisiones abarca una gran cantidad de problemas reales cada más complejos y especializados, que necesariamente requieren del uso de metodologías para la formulación matemática de estos problemas y conjuntamente, de métodos y herramientas de resolución, como los que provee la Investigación de Operaciones. En este sentido se está evidenciado un gran desarrollo en muchos sectores, con grandes avances sobre todo en el campo de la Inteligencia Artificial, que incorpora técnicas novedosas de optimización para la toma de decisiones, incluyendo las técnicas meta-heurísticas.

1.4 Modelos de optimización

Un proceso de optimización persigue hallar la mejor solución posible para cierto problema. Puede entonces ser visto como la búsqueda de los valores de las variables de decisión para los cuales determinada función objetivo (FO) alcanza su valor extremo (máximo o mínimo). Entre los distintos criterios para clasificar problemas de optimización, la naturaleza del dominio en que se manifiestan permite distinguir dos tipos de problemas o modelos: los continuos y los discretos. Las definiciones ofrecidas a continuación para el caso continuo son válidas en entornos discretos, excepto la relacionada con el dominio de las variables. La diferencia radica en que en ambientes discretos no se establecen intervalos de búsqueda, sino conjuntos finitos de valores.

Modelos continuos

Un problema de optimización continuo se ve como un modelo $P = (S, \Omega, f)$, donde:

- S representa un espacio de búsqueda definido sobre un conjunto finito de variables de decisión $X_j (j=1, \dots, n)$ con valores reales v_j en el rango $[a_j, b_j]$, donde a_j y b_j son los límites inferior y superior, respectivamente.
- Ω constituye el conjunto de restricciones entre dichas variables: si $\Omega = \emptyset$ se dice que P es un problema sin restricciones.
- $f : S \rightarrow \mathfrak{R}_0^+$ es la función objetivo a optimizar.

Crear una instancia de una variable X_j es asignarle un valor v_j y se representa como $X_j \leftarrow v_j$. Una solución $s \in S$ es una asignación completa, donde cada variable de decisión tiene un valor que satisface el conjunto de restricciones Ω .

Se dice que la solución $s^* \in S$ es un óptimo global si y solo si $\forall s \in S \ f(s^*) \leq f(s)$ para el caso de minimización, y $\forall s \in S \ f(s^*) \geq f(s)$ para el de maximización.

El conjunto de soluciones óptimas se denota por $S^* \subseteq S$. Resolver un problema de optimización continuo implica encontrar al menos una solución $s^* \in S^*$.

Tipos de problemas según la posición del óptimo en el espacio de búsqueda

Por sus particularidades, algunos problemas de optimización requieren especial atención. En la resolución heurística de tales problemas, la posición del óptimo sugiere estrategias específicas que intensifiquen la búsqueda hacia regiones deseadas y eleven así la efectividad y eficiencia del proceso. De acuerdo con este criterio se pueden distinguir dos casos específicos de problemas de optimización continuos: aquellos cuyas soluciones se ubican en la frontera del espacio de búsqueda, y los que presentan sus óptimos en el interior de dicho espacio.

Se entiende como frontera de un espacio de búsqueda S , cuyas variables $X_j (j=1, \dots, m)$ se definen en $[a_j, b_j]$, a los intervalos $[a_j, a_j + AF_j]$ y $[b_j - AF_j, b_j]$, donde AF_j denota la amplitud de la frontera para la variable X_j :

$$AF_j = \frac{b_j - a_j}{\varepsilon} \quad \text{donde } \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 4 \quad (1.1)$$

Un problema tiene su óptimo en la frontera, si cada uno de los valores de sus variables de decisión pertenece a tal región del espacio. Ante esta clase de problemas, muchas técnicas suelen estancar la búsqueda en zonas próximas a la deseada. Esto incluye el caso en que los operadores empleados contemplan valores fuera del espacio de búsqueda, ante lo cual es muy común restringir los valores de las variables de decisión a los respectivos límites del dominio.

Por otra parte, se define como el interior del propio espacio de búsqueda S , al intervalo $[o_j - AI_j, o_j + AI_j]$, donde o_j es la componente del centro del espacio de búsqueda para la j -ésima dimensión:

$$o_j = \frac{b_j + a_j}{2} \quad (1.2)$$

y AI_j denota la amplitud de la región interior para la variable X_j :

$$AI_j = \frac{b_j - a_j}{2} - AF_j \quad (1.3)$$

En muchas funciones complejas el óptimo puede ubicarse en la frontera del espacio de búsqueda o en su interior, o sea, en las proximidades de su centro. A partir de ello es necesario valorar el comportamiento de las técnicas de optimización en cada uno de estos casos.

1.5 Métodos de optimización

La literatura científica recoge un amplio número de métodos de optimización de acuerdo con los distintos modelos que se pueden encontrar. Estos pueden ser agrupados, aunque no es la única clasificación existente, como métodos:

- *determinísticos*, que incluyen la teoría de redes, la programación multicriterio, la teoría de inventarios y la programación matemática, que encierra la programación lineal, la no lineal, la programación entera, la dinámica y la programación multiobjetivo.
- *probabilísticos*, entre los que están las cadenas de Markov, la programación estocástica, la teoría de juegos, los sistemas de espera y la Simulación.
- *híbridos*, que conjugan métodos determinísticos y probabilísticos.
- *heurísticos*, que ofrecen soluciones basadas en la experiencia.

Según su nivel de precisión, las técnicas de optimización pueden ser divididas en *exactas* y *aproximadas*. Entre las primeras están los métodos desarrollados por la comunidad de Investigación de Operaciones, como los de programación dinámica y por restricciones, y la familia de algoritmos de ramificación X , además de otros como A^* y IDA^* , aportados por la Inteligencia Artificial. Dentro de los métodos aproximados se distinguen los algoritmos de aproximación y las heurísticas.

Las técnicas exactas de optimización presentan alta complejidad computacional en problemas de gran tamaño (muchas variables). Por su parte, los algoritmos de aproximación ofrecen soluciones probablemente buenas en un espacio de tiempo posiblemente aceptable. A diferencia de estos, las técnicas heurísticas garantizan soluciones de alta calidad en tiempos aceptables. De ahí que usualmente se apliquen a problemas de optimización *NP-completos* [Talbi09].

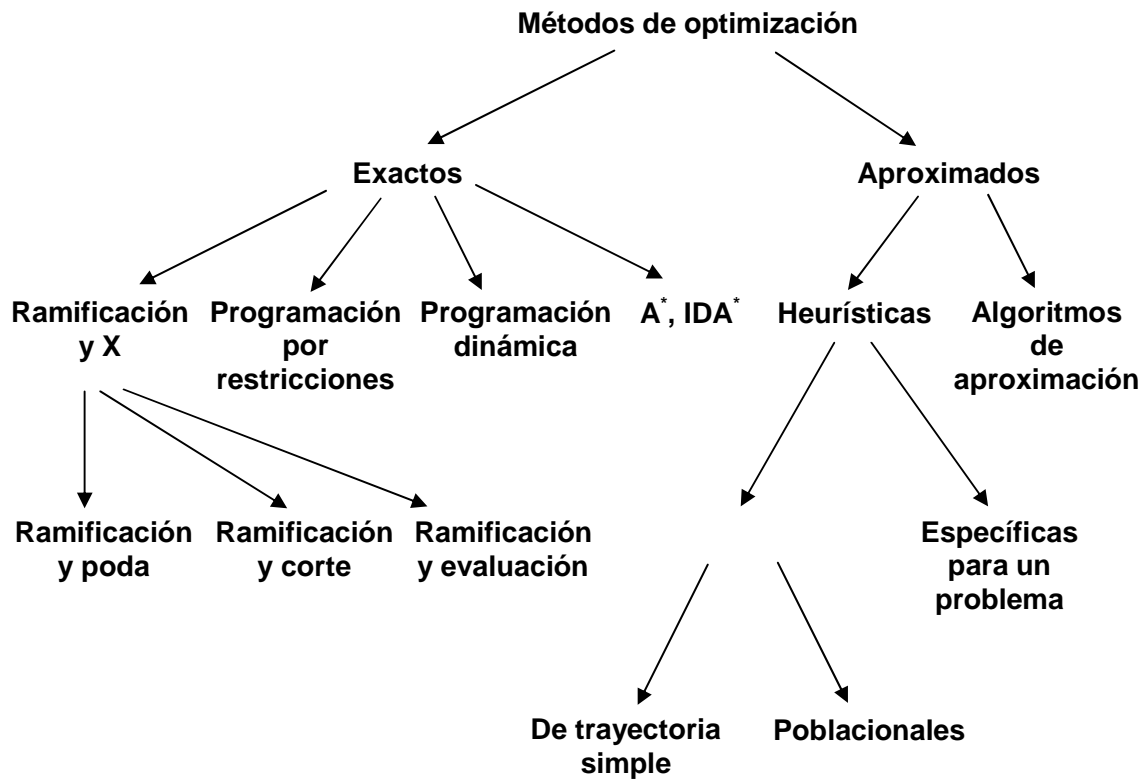


Figura 1.1. Taxonomía de los métodos de optimización ¹

1.6 Técnicas meta-heurísticas

Los métodos heurísticos complementan la implementación de los DSS en diversos dominios donde se requieren soluciones aproximadas en un tiempo limitado. Ello es consecuencia de que *aunque dichas técnicas no garantizan la solución óptima, son capaces de hallar con facilidad una buena solución en un período de tiempo admisible* [Talbi09]. Esto resulta de mayor utilidad cuando el espacio de búsqueda es muy grande.

Una meta-heurística es un modelo heurístico de amplio propósito que guía heurísticas específicas hacia regiones promisorias del espacio de búsqueda. Una meta-heurística puede entonces ser aplicada, con escasos ajustes, a distintos problemas de optimización [Talbi09]. En tal sentido, son utilizadas con frecuencia en muchas esferas, entre las que figuran: el diseño ingenieril; el aprendizaje

¹ Basado en [Talbi09].

automático y minería de datos en diversos campos como el financiero; la modelación de sistemas; la planeación de problemas de enrutamiento; los problemas de planificación, producción, logística y transporte; así como la gestión de la cadena de suministros.

Los métodos meta-heurísticos pueden catalogarse de acuerdo con varios criterios. Se clasifican por ejemplo, como bioinspirados o no, determinísticos o estocásticos y poblacionales o de trayectoria simple. Este campo ha sido fuertemente abordado en los últimos años. En consecuencia, el estado del arte cuenta con un amplio número de técnicas de este tipo [Talbi09, HBMH10], así como variantes de algunos modelos que han dado lugar a familias de técnicas meta-heurísticas.

Entre los modelos poblacionales más destacados se hallan la Optimización basada en Enjambres de Partículas (Particle Swarm Optimization, PSO) [Kennedy95] y los Algoritmos Evolutivos (Evolutionary Algorithms, EA). Entre estos últimos figuran los Algoritmos Genéticos (Genetic Algorithms, GA) [Goldberg98], la Programación Evolutiva (Evolutionary Programming, EP), la Programación Genética (Genetic Programming, GP), los Algoritmos Coevolutivos (Coevolutionary Algorithms, CEA), los Algoritmos Culturales (Cultural Algorithms, CA), los Algoritmos de Estimación de Distribución (Estimation of Distribution Algorithms, EDA) y las Estrategias Evolutivas (Evolution Strategies, ES), que derivan a la Evolución Diferencial (Differential Evolution, DE) y la Estrategia Evolutiva con Adaptación a la Matriz de Covarianza (Covariance Matriz Adaptation Evolution Strategy, CMA-ES). Otro enfoque sobresaliente es la Optimización basada en Colonias de Hormigas (Ant Colony Optimization, ACO) [Dorigo04], aplicable en principio a entornos discretos, aunque existen variantes para problemas continuos, con resultados pobres. Otras meta-heurísticas poblacionales son los Sistemas Artificiales Inmunes (Artificial Immune Systems, AIS), las Colonias de Abejas (Bee Colony, BC) y la Búsqueda Esparcida (Scatter Search, SS).

Asimismo, existen distintos métodos de trayectoria simple: el Ascenso de Colina (Hill Climbing, HC), la Búsqueda Tabú (Tabu Search, TS), la Búsqueda de Vecindad Variable (Variable Neighborhood Search, VNS), la Búsqueda Local

Guiada (Guided Local Search, GLS), la Búsqueda Local Iterativa (Iterated Local Search, ILS), el Método de Ruido (Noisy Method, NM), el Método de Allanamiento (Smoothing Method, SM), el Procedimiento de Búsqueda Voraz Adaptativa (Greedy Adaptive Search Procedure, GRASP) y el Recocido Simulado (Simulated Annealing, SA), con el que guardan similitud el Gran Diluvio (Great Deluge, GDA) y la Aceptación del Umbral (Threshold Accepting, TA).

Recientemente, surge el método de Optimización basada en Mallas Variables [Puris11]. Su esencia radica en la representación de soluciones potenciales como nodos de una malla, cuya configuración varía en su movimiento por el espacio de búsqueda.

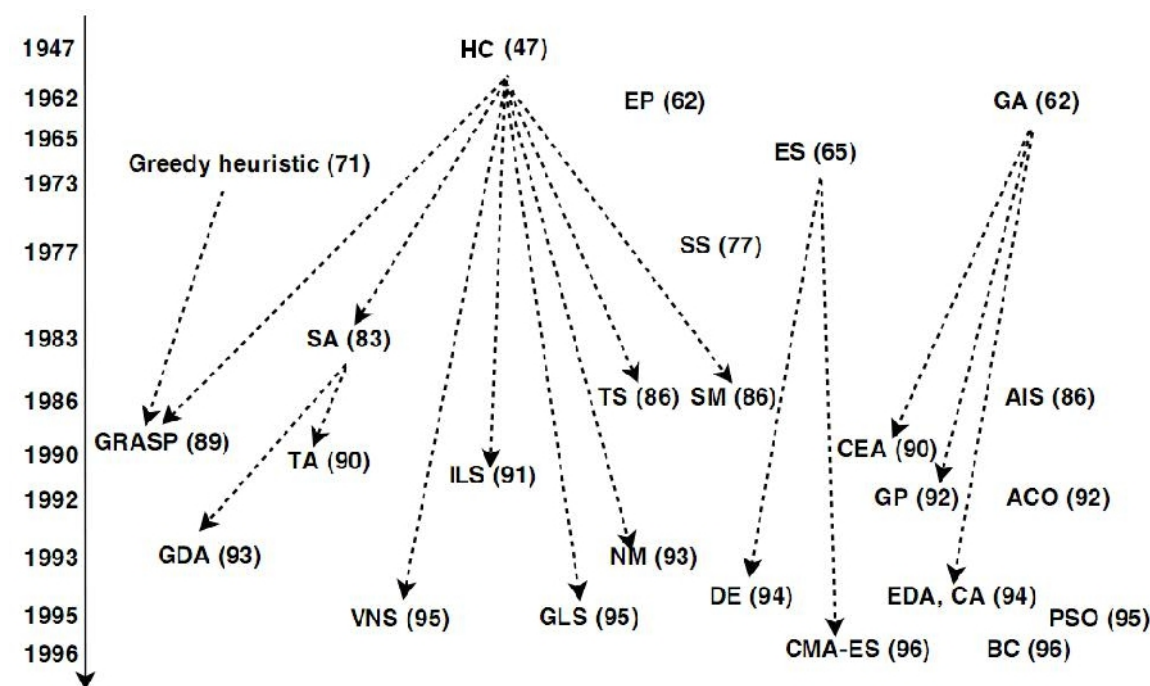


Figura 1.2. Genealogía de las meta-heurísticas ²

A continuación se introducen algunas meta-heurísticas poblacionales, que por sus resultados son de especial interés para este estudio. Ello incluye tres técnicas de necesaria referencia en el entorno de la optimización continua: G-CMA-ES, DE y

² Basado en [Talbi09].

K-PCX. Seguidamente, también es presentado el propio modelo VMO, previa introducción a la búsqueda genética, por su relevancia para esta investigación.

- La estrategia evolutiva G-CMA-ES (Covariance Matrix Adaptation Evolution Strategy) [Auger05], es uno de los algoritmos de optimización con mejores resultados en el entorno de la optimización continua. El tamaño de la transformación individual en cada coordenada y la correlación entre las coordenadas son controladas por la matriz de covarianza. El método adapta la matriz de covarianza de la distribución de mutación normal multivariada. La distribución de mutación guía la generación de soluciones candidatas. CMA-ES es un enfoque de optimización de segundo orden, a partir de que es capaz de identificar dependencias entre las variables. Una propiedad importante de esta estrategia, por encima de otros algoritmos evolutivos, es su capacidad de mantenerse invariante ante las transformaciones lineales del espacio de búsqueda.
- El algoritmo poblacional de estado estacionario K-PCX [Sinha05], en el cual se diseñan independientemente los componentes principales del proceso de búsqueda. En este sentido, se deriva del generador algorítmico poblacional [Deb05], que requiere la especificación de cuatro planes para establecer un procedimiento de optimización de estado estacionario: el plan de selección de padres a ser recombinados a partir de la población actual, el plan de generación de soluciones hijas a partir de los padres seleccionados y el de reemplazo, según el cual se seleccionan los individuos candidatos a mantenerse en la población, así como la estrategia de actualización de la población.
- El algoritmo Differential Evolution (DE) [Rönkkönen05] propuesto por Price y Storn en 1997, es uno de los enfoques más destacados en optimización continua. La idea central del mismo radica en usar un vector de diferencias para perturbar la población de individuos representados vectorialmente. Tal principio integra un novedoso operador de recombinación entre dos o más soluciones con un operador de mutación auto-referencial.

- El método Opposite Differential Evolution (ODE) [Rahnamayan08], del estado del arte en codificación continua, combina el algoritmo de Evolución Diferencial con una técnica de opuestos para aumentar la diversidad.
- El algoritmo genético Cross generational elitist selection, Heterogeneous recombination and Cataclysmic mutation (CHC) [Eshelman91] es muy competitivo, tanto para codificación real como binaria. Emplea dos formas de selección de los individuos de la generación actual. Una de ellas radica en tomar cierta cantidad de los mejores individuos de la población e insertarlos directamente en la siguiente generación. Según el otro criterio se elige aleatoriamente un grupo de individuos para cruzarlos. A tal fin se asumieron las definiciones de los autores, con un operador de cruce BLX-0.5.
- El método de inteligencia colectiva Linearly Decreasing Inertia Weight in Particle Swarm Optimization (LDWPSO) [Shi98] mantiene la configuración original del PSO de Shi y Ebenhart. Su novedad radica en la introducción de un peso decreciente de inercia, encargado de controlar el balance entre las búsquedas local y global en el método.
- Steady-State Genetic Algorithm (SSGA) [Syswerda89] presenta una combinación ideal de exploración y explotación. En la selección de padres emplea Emparejamiento Variado Inverso [Fernandes01] y reemplazo del peor como estrategia de actualización de la población. Usa BLX-0.5 como operador de cruce y la estrategia de mutación BGA.

1.7 Búsqueda genética

A propósito de los GA, es bien conocido el potencial de los operadores genéticos. Por esta razón, es bastante común que en el campo de la Inteligencia Artificial se obtengan resultados relevantes al hibridar métodos en su estado original con operadores de tal tipo. De ahí que, por su interés para esta investigación, a continuación se presentan algunas estrategias de operadores genéticos [Talbi09, Herrera98, Herrera03] de cruce y mutación. Ambos tipos de operadores son la base de los GA, inspirados en los procesos evolutivos. Más allá de esta clase de métodos, las potencialidades de la búsqueda genética han sido aprovechadas en

distintos contextos. Ello incluye a otros algoritmos evolutivos, así como algunos que sin clasificar como tal, introducen mecanismos propios de los GA.

▪ *Operadores de cruce*

Asumiendo que $C_1 = (c_1^1 \dots c_n^1)$ y $C_2 = (c_1^2 \dots c_n^2)$ son dos cromosomas (soluciones candidatas) elegidas como *padres* para aplicar el operador, a continuación quedan descritos los efectos de aplicar distintos operadores de cruce para Algoritmos Genéticos de Codificación Real (Real-Coded Generic Algorithms, RCGA). No todos los operadores generan igual cantidad de descendientes o hijos (nuevas soluciones potenciales). A partir de ello, en ocasiones se requiere un mecanismo de selección para decidir los descendientes que formarán parte de la población.

- *flat*: se genera un hijo $H = (h_1, \dots, h_i, \dots, h_n)$, donde h_i es un valor escogido con aleatoriedad (uniformemente) en el intervalo $[c_i^1 \dots c_i^2]$.
- *simple*: se escoge una posición $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ de modo aleatorio y se crean los hijos $H_1 = (c_1^1, c_2^1, \dots, c_i^1, c_{i+1}^2, \dots, c_n^2)$ y $H_2 = (c_1^2, c_2^2, \dots, c_i^2, c_{i+1}^1, \dots, c_n^1)$.
- *discreto*: se genera un hijo $H = (h_1, \dots, h_i, \dots, h_n)$, donde h_i es un valor escogido de modo aleatorio (uniformemente) en el conjunto $\{c_i^1, c_i^2\}$.
- *BLX-*: sea C_1 el padre con mayor calidad (evaluación de la *FO*), se obtienen dos hijos $H_k = (h_1^k, \dots, h_i^k, \dots, h_n^k)$ $k = 1, 2$, donde h_i^k toma un valor aleatorio (uniformemente) en el intervalo $[c_i^1 - l\alpha, c_i^2 + l\beta]$ si $c_i^1 \leq c_i^2$, o en $[c_i^1 - l\beta, c_i^2 + l\alpha]$ en el caso contrario. Los valores de α y β son establecidos por el usuario, mientras que $l = C_{\max} - C_{\min}$, donde $C_{\max} = \max(c_i^1, c_i^2)$ y $C_{\min} = \min(c_i^1, c_i^2)$.
- *línea extendida*: se crea un descendiente $H = (h_1, \dots, h_i, \dots, h_n)$, donde $h_i = c_i^1 + \alpha(c_i^2 - c_i^1)$ y α se selecciona de forma aleatoria (uniformemente) en el intervalo $[-0.25, 1.25]$.

- *intermedio extendido*: se crea un descendiente $H = (h_1, \dots, h_i, \dots, h_n)$, donde $h_i = c_i^1 + \alpha_i(c_i^2 - c_i^1)$ y α_i se selecciona de forma aleatoria (uniformemente) en el intervalo $[-0.25, 1.25]$.
- *aritmético*: se generan dos hijos $H_k = (h_1^k, \dots, h_i^k, \dots, h_n^k)$ $k = 1, 2$. En ellos $h_i^1 = \lambda c_i^1 + (1 - \lambda)c_i^2$ y $h_i^2 = \lambda c_i^2 + (1 - \lambda)c_i^1$, siendo λ una constante (cruce aritmético uniforme) o un valor variable según el número actual de generaciones (cruce aritmético no uniforme).

▪ *Operadores de mutación*

Seguidamente se ilustran tres operadores de mutación. Sea $C = (c_1, \dots, c_i, \dots, c_n)$ un cromosoma y $c_i \in [a_i, b_i]$ un gen a mutar, como resultado se obtiene el gen c_i' .

- *no uniforme*: el gen mutado resulta: $c_i' = \begin{cases} c_i + \Delta(t, b_i - c_i) & \text{si } \tau = 0 \\ c_i - \Delta(t, c_i - a_i) & \text{si } \tau = 1 \end{cases}$

donde τ toma valor 0 o 1 aleatoriamente y t es la generación actual.

Además, $\Delta(t, y) = y(1 - r^{(1 - \frac{t}{g_{\max}})^b})$ siendo g_{\max} la cantidad máxima de generaciones permitidas, r un valor aleatorio en el intervalo $[0, 1]$ y b un parámetro establecido por el usuario, que determina el grado de dependencia del número de iteraciones. Esta función retorna un valor en el rango $[0, y]$, tal que la probabilidad de que este sea cercano a 0 aumenta conforme avanza la aplicación del algoritmo. Asimismo, en la misma medida en que esto ocurre debe descender el tamaño del intervalo de generación del gen. De ahí que este operador resulte en una búsqueda uniforme al principio, cuando t es pequeño, y al final intensifique la misma localmente.

- *Mühlenbein*: $c_i' = c_i \pm rang_i \gamma$, donde $rang_i$ define el rango de mutación y se suele fijar en $0.1(b_i - a_i)$. El signo (+ ó -) se escoge con probabilidad 0.5 y

$$\gamma = \sum_{k=0}^{15} \alpha_k 2^{-k}, \text{ donde } \alpha_i \in \{0, 1\} \text{ se elige aleatoriamente con } p(\alpha_i = 1) = \frac{1}{16}.$$

Este operador genera valores en el rango $[c_i - rang_i, c_i + rang_i]$ con una alta probabilidad de generar vecinos de c_i . La proximidad mínima posible se produce con una precisión de $rang_i 2^{-15}$.

- *modal discreto*: este constituye una generalización del operador anterior, diferenciándose únicamente en que $\gamma = \sum_{k=0}^{\Pi} \alpha_k B_m^k$, donde $\Pi = \left\lfloor \frac{\log(rang_{\min})}{\log(B_m)} \right\rfloor$ y $B_m > 1$ se denomina la base de la mutación. Además, $rang_{\min}$ es el límite inferior del rango de mutación relativo.

1.8 Optimización basada en Mallas Variables

La Optimización basada en Mallas Variables es una meta-heurística poblacional, en la que las posibles soluciones se representan por un conjunto de puntos (n_1, n_2, \dots, n_p) llamados nodos. Tales nodos conforman una malla que se mueve por un espacio de búsqueda m -dimensional, donde se lleva a cabo el proceso de optimización de una función objetivo $FO(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Los nodos representan vectores de la forma $n(x_1, x_2, \dots, x_m)$.

El movimiento de la malla tiene un carácter variable, lo cual incluye cambios de tamaño (cantidad de nodos) y en su configuración. Ello le permite, a la vez que explora el espacio de búsqueda, intensificar el proceso en las zonas más promisorias. Lo anterior se deriva de la expansión de la población, según la cual la malla se mueve por el espacio de búsqueda mediante la generación de nodos en dirección a los extremos locales (nl_i) y al extremo global (ng_i), y a partir de los nodos más internos y externos de la malla (nf).

El modelo se rige por los siguientes parámetros:

- cantidad de nodos (S_{IM}) de la malla inicial.
- número máximo ($S_{TM} \mid S_{TM} \geq 3 * S_{IM}$) de nodos de la malla en cada iteración.
- cantidad (k) de nodos que definen una vecindad.

- condición de parada: máximo (M) de iteraciones o evaluaciones de la FO .

1.8.1 La expansión y la contracción en VMO

Para conformar la malla inicial en la primera iteración se generan nodos aleatoriamente, o mediante otro método que asegure la obtención de soluciones diversas. Luego, el modelo VMO garantiza la expansión de la población mediante la generación de nodos en distintas direcciones:

Generación de nodos en dirección a los extremos locales

En este paso se explora intensivamente la k -vecindad de cada nodo de la malla inicial y el vecino de mayor calidad es elegido como extremo local. Si ninguno de los vecinos es mejor que el nodo actual (n_i), este se considera un extremo local (nl_i) y no se generan nodos a partir de él. De lo contrario, se genera un nodo n_f^* entre n_i y nl_i , cuya cercanía a estos depende de un factor r_i calculado a partir de los valores de la FO en tales nodos: a mayor diferencia entre tales valores, mayor cercanía de n_f^* a nl_i . Los valores de las componentes de n_f^* se calculan según:

$$n_f^*(x_j) = f(n_i(x_j), nl_i(x_j), r_i) \quad (1.4)$$

En la ecuación, x_j representa el j -ésimo componente de cada nodo ($j = 1, \dots, m$) y f está muy relacionada con el dominio de cada una de las dimensiones del problema: puede verse como una función de selección de valores para casos discretos o una de aproximación para casos continuos.

Generación de nodos en dirección al extremo global

En esta etapa se explora el espacio de búsqueda hacia el extremo global ng_i , el nodo con mayor calidad hasta el momento. La generación de nuevos nodos n_g^* entre cada nodo n_i de la malla inicial y ng_i se realiza de acuerdo con la ecuación:

$$n_g^*(x_j) = g(n_i(x_j), ng_i(x_j), r_i) \quad (1.5)$$

La función g se define a partir del dominio de cada dimensión y garantiza que, a mayor diferencia entre la calidad del nodo actual y el extremo global, más cercano estará n_g^* de este último.

Generación de nodos a partir de los nodos más internos y externos

En este paso se explora desde los nodos (nf) en las fronteras de la malla inicial, elegidos a partir de cierto criterio, dependiente del espacio solución. Las fronteras se dividen en: interior (nu), donde se ubican los nodos más cercanos al origen del espacio (0^m), y exterior (nv), en la cual se hallan los más distantes del mismo.

Los nuevos nodos se generan mediante la función h (*operador de fronteras*):

$$n_h^*(x_j) = h(nf(x_j), w) \quad (1.6)$$

donde w se define como desplazamiento y su valor decrece con el tiempo según:

$$w = (w_0 - w_f) * \frac{M - j}{M + w_f} \quad (1.7)$$

w_0 representa el valor inicial del mismo y w_f una constante que regula su final. Además, M constituye el número máximo de iteraciones del algoritmo o evaluaciones de la FO , mientras que j es el valor actual de uno de estos criterios.

Por otra parte, el modelo incluye un proceso de contracción de la malla que reduce elitistamente el número de soluciones alcanzadas luego de su expansión. La malla inicial en la próxima iteración estará formada por los S_{IM} nodos de mayor calidad, entre los S_{TM} nodos de la malla resultante en la iteración actual. A efectos de este proceso se introduce un *operador de limpieza adaptable*, que mantiene cierta separabilidad entre los nodos de la malla inicial y así garantiza diversidad en la población. Previo ordenamiento decreciente de los S_{IM} nodos de la malla inicial según su calidad, se comparan secuencialmente con sus sucesores y se eliminan aquellos cuya distancia espacial sea menor que cierta cota. El valor de esta decrece con el tiempo, lo cual permite mayor separabilidad al inicio que al final. De ser necesario, la malla inicial se completa con la generación aleatoria de nodos.

1.8.2 El modelo VMO

Generar los S_{IM} nodos de la malla inicial.

Seleccionar el extremo global (ng_i).

repeat

for each nodo en la malla inicial *do*

 Encontrar los k nodos más cercanos.

 Determinar el mejor de los vecinos (nl_i).

if nl_i es mejor que el nodo actual n_i *then*

 Generar un nuevo nodo según la ecuación (1.4).

end if

end for

for each nodo en la malla inicial *do*

 Generar un nuevo nodo en dirección a ng_i , por medio de la ecuación (1.5).

end for

repeat

 Seleccionar el nodo más interno y el más externo de la malla.

 Generar nuevos nodos a partir de estos, usando la ecuación (1.6).

until $TamañoMalla = S_{TM}$

Ordenar los nodos de la malla en orden decreciente según su calidad.

Aplicar el operador de limpieza adaptable.

Construir la malla inicial para la próxima iteración a partir de los S_{IM} mejores nodos.

while not S_{IM} nodos en la malla inicial

 Generar nodo de modo aleatorio.

until M

1.9 Conclusiones parciales

La toma de decisiones radica en la selección de una acción dentro de un conjunto de acciones posibles. En este marco, los DSS surgen como sistemas para apoyar el proceso de toma de decisiones; no para automatizarlo. Estos están mayormente

orientados a problemas no estructurados y semi-estructurados, en los que el criterio del tomador de decisiones juega un papel importante.

El desarrollo de un DSS se beneficia de los aportes de varias disciplinas. Entre estas se destacan la Investigación de Operaciones y la Inteligencia Artificial. En tal sentido, el desarrollo de técnicas de optimización para la toma de decisiones ha cruzado los límites de la Investigación de Operaciones pura. Ello implica que su alcance actual abarque técnicas propias de la Inteligencia Artificial. Tal es el caso de las meta-heurísticas, que constituyen un enfoque práctico a tal fin.

Muchos problemas de toma de decisiones presentan características particulares, ante las que los métodos exactos se tornan impracticables. De ahí que requieran la aplicación de meta-heurísticas como técnicas aproximadas para problemas de optimización. En este sentido, favorecen la implementación de los DSS.

El estado del arte consta de un amplio número de métodos de este tipo, como resultado de su efectividad en disímiles dominios. La concepción de dichas técnicas ha estado enfocada desde sus inicios hacia la optimización.

La Optimización basada en Mallas Variables es una meta-heurística novedosa y prometedora. Su comportamiento debe ser estudiado en distintos tipos de problemas, a fin de caracterizar el mismo en entornos particulares que demandan especial atención.

Capítulo II. VMO: estudio de desempeño y propuesta de mejora

En este capítulo se presenta un estudio experimental sobre el comportamiento de VMO ante funciones con óptimos tanto en la frontera del espacio de búsqueda, como en su interior. Seguidamente, se introduce el uso de operadores genéticos en la generación de nodos a partir de aquellos en las fronteras de la malla, como una alternativa para mejorar el desempeño del método.

2.1 Generalidades experimentales

Como se explicara con anterioridad, en la resolución heurística de problemas de optimización la posición del óptimo sugiere estrategias particulares. De ahí que en la primera etapa del estudio se analice experimentalmente el comportamiento de VMO, en condiciones de óptimos en la frontera y en el interior del espacio de búsqueda. A fin de mejorar el desempeño de VMO, en una segunda etapa se presentan variantes para el operador de fronteras, basadas en búsqueda genética.

El análisis de desempeño de VMO tanto en la etapa experimental como en la de validación de las alternativas propuestas, está basado en el criterio del error medio alcanzado por el método en la aproximación de funciones bien conocidas en el entorno de la optimización. El error denota la diferencia entre el valor de la FO para la solución s alcanzada por el método y el óptimo de tal función:

$$error = FO(s) - FO(s_{\text{óptima}}) \quad (2.1)$$

A partir de ello, en cada situación se requiere la comparación de los resultados alcanzados por VMO, con los logrados por otros métodos en iguales condiciones. A tal fin se incluyen en el estudio algunas meta-heurísticas relevantes introducidas en la sección 1.6. En cada método se empleó la definición de los autores para sus parámetros. En algunos casos se usaron resultados experimentales reportados por sus autores. La disponibilidad parcial de tales resultados limitó, en ciertos escenarios, las comparaciones de VMO con la totalidad de los métodos. El estudio comprende 25 ejecuciones de los métodos incluidos en él, para cada función en una misma dimensión. Con el fin de evaluar la escalabilidad de VMO, tales métodos se estudian en tres dimensiones: 10, 30 y 50 [Suganthan05].

A continuación se describen las funciones incluidas en el estudio, así como la metodología estadística empleada. Se presenta además, la configuración empleada para VMO, válida para todo el estudio; a excepción del operador de fronteras, que se redefine en la segunda etapa, en función de cada una de las alternativas propuestas para elevar su efectividad.

2.1.1 Funciones de prueba

A partir de que se desea analizar el comportamiento de VMO en problemas con óptimos en la frontera del espacio de búsqueda, así como en aquellos casos donde los óptimos se encuentran en el interior, se incluyen en el estudio funciones de ambos tipos. Las mismas resultan tareas de minimización bien conocidas, de las cuales algunas (F_1 - F_7) quedan descritas a continuación, todas con óptimos en la frontera del espacio de búsqueda (ver Tabla 2.1).

Tabla 2.1. Funciones de prueba (F_1 - F_7)

Función	Óptimo	Dominio
Función Esfera $F_1(x) = \sum_{i=1}^D x_i^2$	(0,...,0)	[0, 100]
Función 7 de Schwefel $F_2(x) = \sum_{i=1}^D -x_i \text{sen}(\sqrt{ x_i })$	(420.968746, ..., ..., 420.968746)	[0, 500]
Función de Rastrigin $F_3(x) = 10D + \sum_{i=1}^D (x_i^2 - 10\cos(2\pi x_i))$	(0,...,0)	[0, 5]
Función 6 de Scaffer $F_4(x) = F(x_D, x_1) + \sum_{i=2}^D F(x_{i-1}, x_i)$ $F(x, y) = 0.5 + \frac{\text{sen}^2(\sqrt{x^2 + y^2}) - 0.5}{(1 + 0.001(x^2 + y^2))^2}$	(0,...,0)	[0, 100]
Función de Rosenbrock $F_5(x) = \sum_{i=1}^{D-1} (100(x_i^2 - x_{i+1})^2 + (x_i - 1)^2)$	(1,...,1)	[0, 100]
Función de Griewank $F_6(x) = \sum_{i=1}^D \frac{x_i^2}{4000} - \prod_{i=1}^D \cos(\frac{x_i}{\sqrt{i}}) + 1$	(0,...,0)	[0, 600]
Función Escalón $F_7(x) = \sum_{i=1}^D \lfloor x_i \rfloor$	$x_i \in [-5.12, -5.0)$	[-5.12, 5.11]

Las funciones ($F_{5^*} - F_{25^*}$) se detallan en [Suganthan05], donde aparecen en igual orden como ($F_5 - F_{25}$). De ellas, las funciones F_{5^*} , F_{8^*} y F_{20^*} tienen sus óptimos en la frontera del espacio de búsqueda. La mayoría de las 28 funciones incluidas en el estudio son multimodales: solo F_1 , F_5 y F_{5^*} son unimodales.

2.1.2 Metodología estadística

En [Demsar06] se presentan algunos tests no paramétricos para comparar resultados en Inteligencia Artificial. El test de Friedman y el de Iman-Davenport permiten determinar la existencia de diferencias significativas en un grupo de métodos. Tal análisis usualmente se complementa con la aplicación de pruebas post hoc, entre las que figuran el test de Bonferroni-Dunn y el de Holm. Asimismo, el test de signos de Wilcoxon [Wilcoxon45] permite detectar diferencias significativas entre dos algoritmos.

Los referidos métodos constituyen la base del análisis estadístico para la validación de los resultados. A lo largo del mismo, las conclusiones presentadas se corresponden con un nivel de significación $\alpha = 0,05$.

2.1.3 Configuración de VMO

El modelo VMO es aplicable tanto a los problemas de optimización continuos como a los discretos. Los parámetros del método para este estudio fueron definidos, casi en su totalidad, de acuerdo con las especificaciones que se realizan en [Puris09] para el caso continuo:

Generación de la malla inicial en cada iteración

Los nodos de la malla inicial se generan del modo descrito con anterioridad. Al aplicar el operador de limpieza adaptable, como medida de distancia entre los nodos se emplea la euclidiana:

$$D_{euclidiana}(n_1, n_2) = \sqrt{\sum_{j=1}^m (n_1(x_j) - n_2(x_j))^2} \quad (2.2)$$

y la cota de distancia D se determina según:

$$D = \begin{cases} \frac{|\max_{value} - \min_{value}|}{4} & \text{si } I < 25\%M \\ \frac{|\max_{value} - \min_{value}|}{8} & \text{si } 25\%M \leq I < 50\%M \\ \frac{|\max_{value} - \min_{value}|}{16} & \text{si } 50\%M \leq I < 66\%M \\ \frac{|\max_{value} - \min_{value}|}{50} & \text{si } 66\%M \leq I < 75\%M \\ \frac{|\max_{value} - \min_{value}|}{100} & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.3)$$

donde \min_{value} y \max_{value} representan los valores extremos del intervalo de búsqueda para cada función; I hace referencia a la evaluación actual y M a la cantidad total de evaluaciones.

Generación de nodos en dirección a los extremos locales

A partir de que las funciones estudiadas son tareas de minimización, el factor r_i para la generación de nodos en dirección a los extremos locales, se define como:

$$r_i = \frac{FO(nl_i) + 1}{FO(n_i) + 1} \quad (2.4)$$

y la función f genera un nodo entre el actual n_i y el extremo local nl_i según:

$$n_f^*(x_j) = \begin{cases} \text{ave}(n_i(x_j), nl_i(x_j)) & \text{si } |\text{ave}(n_i(x_j), nl_i(x_j)) - nl_i(x_j)| > D \text{ y } U[0,1] \leq r_i \\ nl_i(x_j) + w^* U[-D, D] & \text{si } |\text{ave}(n_i(x_j), nl_i(x_j)) - nl_i(x_j)| \leq D \\ U[\text{ave}(n_i(x_j), nl_i(x_j)), nl_i(x_j)] & \\ \text{en otro caso} & \end{cases} \quad (2.5)$$

siendo $\text{ave}(n_i(x_j), nl_i(x_j))$ el valor medio entre n_i y nl_i para la j -ésima dimensión:

$$\text{ave}(n_i(x_j), nl_i(x_j)) = \frac{n_i(x_j) + nl_i(x_j)}{2} \quad (2.6)$$

y $U[a(x_j), b(x_j)]$ un valor aleatorio (uniforme) en $[a, b]$ para la j -ésima dimensión.

Si $n_f^*(x_j) \notin [\min_{value}, \max_{value}]$ su valor se corrige mediante las siguientes reglas:

$$\begin{aligned} n_f^*(x_j) < \min_{value} &\Rightarrow n_f^*(x_j) \leftarrow \min_{value} \\ n_f^*(x_j) > \max_{value} &\Rightarrow n_f^*(x_j) \leftarrow \max_{value} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Generación de nodos en dirección al extremo global

En la generación de nodos en dirección al extremo global el factor r_i se calcula:

$$r_i = \frac{FO(ng_i) + 1}{FO(n_i) + 1} \quad (2.8)$$

y la función g queda definida por:

$$n_g^*(x_j) = \begin{cases} \text{ave}(n_i(x_j), ng_i(x_j)) & \text{si } U[0,1] \leq r_i \\ U[\text{ave}(n_i(x_j), ng_i(x_j)), ng_i(x_j)] & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.9)$$

donde, en analogía con las ecuaciones (2.5) y (2.6), $\text{ave}(n_i(x_j), ng_i(x_j))$ denota el valor medio entre el nodo actual n_i y el extremo global ng_i :

$$\text{ave}(n_i(x_j), ng_i(x_j)) = \frac{n_i(x_j) + ng_i(x_j)}{2} \quad (2.10)$$

Generación de nodos a partir de los nodos más internos y externos

Los nodos más internos (nu) y externos (nv) de la malla se determinan a partir del valor de su norma, tomando como tal los de menor y mayor norma respectivamente. Tal medida se define como:

$$\|n_i\| = \sqrt{\sum_{j=1}^m (n_i(x_j))^2} \quad (2.11)$$

Para los nodos en la frontera exterior, la función h queda definida como:

$$n_h^*(x_j) = \begin{cases} nv_i(x_j) + w * U[0,1] * halfA_j & \text{si } nv_i(x_j) > 0 \\ nv_i(x_j) - w * U[0,1] * halfA_j & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.12)$$

y para los que se encuentran en la frontera interior:

$$n_h^*(x_j) = \begin{cases} nu_i(x_j) - w * U[0,1] * halfA_j & \text{si } nu_i(x_j) > 0 \\ nu_i(x_j) + w * U[0,1] * halfA_j & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.13)$$

En las expresiones (2.12) y (2.13) $halfA_j$ denota la amplitud media entre \min_{value} y \max_{value} para la j -ésima dimensión, y su valor se determina según:

$$halfA_j = \frac{\max_{value} - \min_{value}}{2} \quad (2.14)$$

Si $n_h^*(x_j) \notin [\min_{value}, \max_{value}]$ su valor se corrige según las siguientes reglas:

$$\begin{aligned} n_h^*(x_j) < \min_{value} &\Rightarrow n_h^*(x_j) \leftarrow U[\min_{value}, halfP_j] \\ n_h^*(x_j) > \max_{value} &\Rightarrow n_h^*(x_j) \leftarrow U[halfP_j, \max_{value}] \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde $halfP_j$ refiere el punto medio entre los extremos del dominio (\min_{value} y \max_{value}) para la j -ésima dimensión, y su valor se calcula como:

$$halfP_j = \frac{\min_{value} + \max_{value}}{2} \quad (2.16)$$

Parámetros del modelo

A partir de los resultados experimentales reportados en [Puris10] se fijó $S_{IM} = 50$ y $S_{TM} = 175$, mientras que para la definición de las vecindades $k = 3$.

La condición de parada utilizada es el número máximo de evaluaciones de la función objetivo: $M = Dim * 10000$, donde *Dim* refiere a la dimensión.

2.2 Análisis de comportamiento de VMO: estudio experimental

De acuerdo con la intención de evaluar el desempeño de VMO tanto en condiciones donde las soluciones se hallan en la frontera del espacio de búsqueda como en su interior, el análisis se presenta en dos etapas correspondientes a tales situaciones. Como fue aclarado con anterioridad, la segunda de estas etapas es válida para problemas que presenten cualquiera de las últimas dos características. Los resultados de cada método en ambas etapas, para dimensiones 10, 30 y 50 se muestran en las tablas de Anexo I.1, Anexo I.2 y Anexo I.3, respectivamente.

Comportamiento de VMO en problemas con óptimos en la frontera

Los resultados de VMO ante problemas con óptimos en la frontera ($F_1 - F_7$, F_{5^*} , F_{8^*} y F_{20^*}) se compararon estadísticamente con los de CHC, ODE, LDWPSO y SSGA, en igual situación. Los tests de Friedman e Iman-Davenport revelan diferencias significativas (*valor p* < 0,05) entre los métodos en las tres dimensiones.

Tabla 2.2. Tests de Friedman e Iman-Davenport (VMO, CHC, ODE, LDWPSO y SSGA) en Dim 10, Dim 30 y Dim 50

Dim	Friedman	valor p	Iman-Davenport	valor p	Hipótesis
10	18,840	8,450E-04	8,013	9,975E-05	Rechazada
30	16,400	0,003	6,254	6,289E-04	Rechazada
50	10,580	0,032	3,237	0,023	Rechazada

En todos los casos, VMO se comporta competitivamente, solo superado por ODE en dimensiones 10 y 30, y en dimensión 50 por el referido método así como por SSGA. Sin embargo, el test de Bonferroni-Dunn (ver Figura 2.1) indica que en ningún caso los métodos se comportan significativamente superiores a VMO. Asimismo, este solo supera significativamente a LDWPSO y únicamente en dimensión 30. Todo ello es prueba de su escalabilidad en este tipo de problemas.

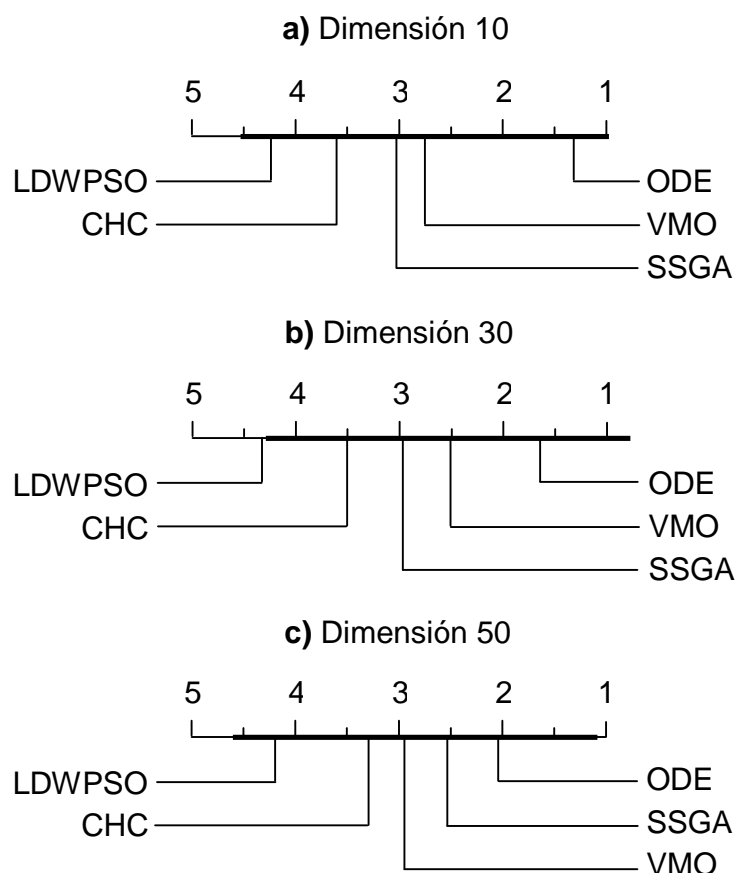


Figura 2.1. Test de Bonferroni-Dunn (VMO, CHC, ODE, LDWPSO y SSGA) con VMO como control: los algoritmos fuera del intervalo marcado difieren significativamente de VMO

Comportamiento de VMO en problemas con óptimos en el interior

Por otra parte, en condiciones de óptimos en el interior del espacio de búsqueda (F_6^* , F_7^* , F_9^* - F_{19}^* y F_{21}^* - F_{25}^*), los tests de Friedman e Iman-Davenport (ver Tabla 2.3) revelan diferencias significativas, en las tres dimensiones, entre los métodos: VMO, CHC, ODE, LDWPSO, SSGA, G-CMA-ES, DE y K-PCX. En esta ocasión VMO también muestra resultados competitivos, particularmente en dimensiones 30 y 50 (ver Figura 2.2), dando fe de su escalabilidad, también ante problemas con óptimos en el interior del espacio de búsqueda. El test de Bonferroni-Dunn permite afirmar la superioridad significativa de VMO respecto a LDWPSO y SSGA en las tres dimensiones estudiadas.

Tabla 2.3. Tests de Friedman e Iman-Davenport (VMO, CHC, ODE, LDWPSO, SSGA, G-CMA-ES, DE y K-PCX) en Dim 10, Dim 30 y Dim 50

Dim	Friedman	valor p	Iman-Davenport	valor p	Hipótesis
10	72,990	4,458E-11	23,408	9,847E-20	Rechazada
30	62,921	8,890E-11	16,958	2,144E-15	Rechazada
50	52,659	4,340 E-10	23,973	5,551 E-15	Rechazada

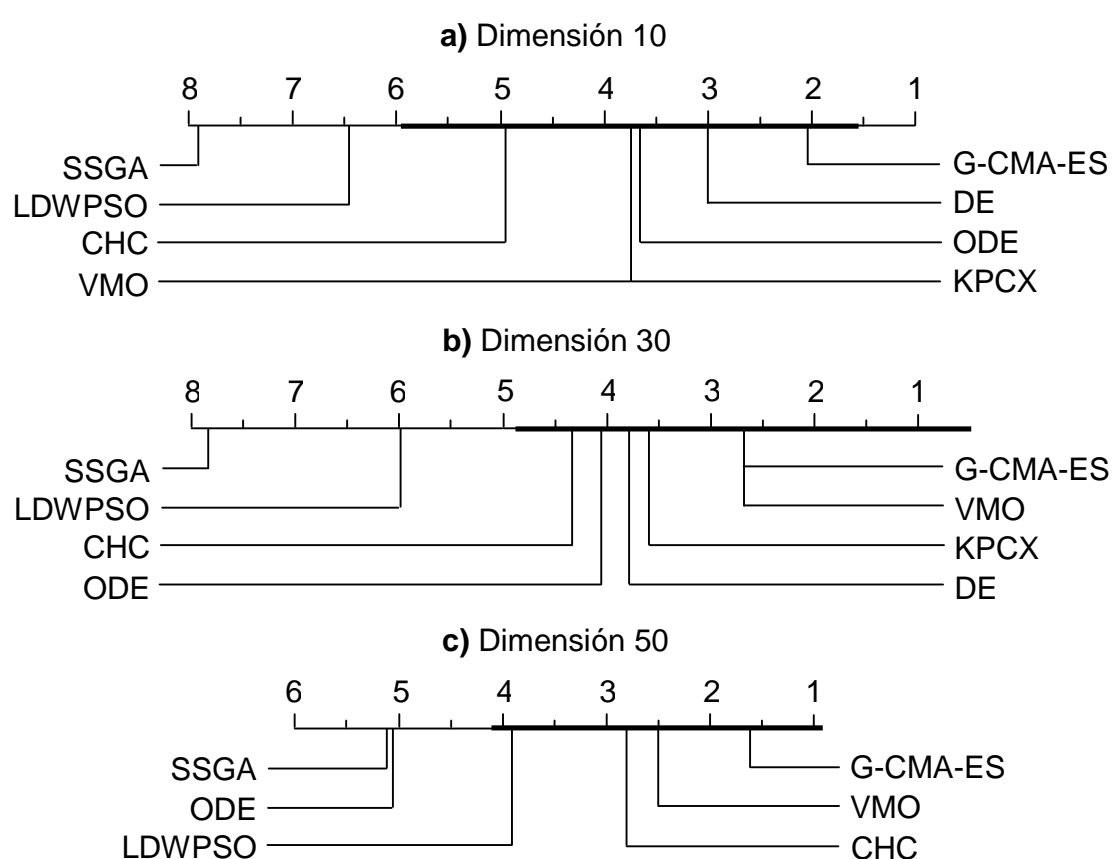


Figura 2.2. Test de Bonferroni-Dunn (VMO, CHC, ODE, LDWPSO, SSGA, K-PCX, G-CMA-ES y DE) con VMO como control

2.3 VMO con operador de fronteras basado en búsqueda genética

Los resultados anteriores apoyan las conclusiones arrojadas por estudios previos [Puris11] respecto a la competitividad de VMO. A pesar de la valoración positiva

del mismo, su desempeño dista aún de los evidenciados por otros métodos, como los propios ODE y G-CMA-ES.

Como parte del proceso de expansión de VMO, en la sección 1.8.1 se introduce el operador de fronteras, cuya configuración se detalla en la sección 2.1.3. Estudios previos [Puris10, Puris11] muestran sus potencialidades. En este sentido, se comparó el desempeño de VMO en situaciones opuestas: usando tal operador (VMO) y sin emplearlo (VMO_SF). El único fin en ello es evaluar su efectividad en los problemas tratados, pues este operador (sea esta o no la configuración a emplear) es parte imprescindible del modelo VMO.

Los resultados del método en ambas situaciones para las dimensiones 10, 30 y 50 se detallan en las Tablas Anexo I.1, Anexo I.2 y Anexo I.3, respectivamente. En cada tipo de problemas y en las tres dimensiones, el test de Wilcoxon revela diferencias significativas entre VMO_SF y VMO, a favor de este último (ver Tabla 2.4). Ello avala la efectividad del operador de fronteras en ambos casos.

Tabla 2.4. VMO vs VMO_SF: test de Wilcoxon

VMO vs VMO_SF		R-	R+	valor p	Hipótesis
Frontera	10	44	1	0,011	Rechazada
	30	52	3	0,013	Rechazada
	50	52	3	0,013	Rechazada
Interior	10	162	9	0,001	Rechazada
	30	154	17	0,003	Rechazada
	50	121	32	0,035	Rechazada

Sin embargo, la cantidad de nodos de buena calidad ³ entre los generados por el operador de fronteras, queda muy por debajo de ese indicador medido entre los generados en dirección a los extremos locales y al global (ver Tabla 2.5). Tal

³ Los nodos de buena calidad constituyen aquellos seleccionados para formar parte de la malla inicial en la próxima iteración.

situación sugiere la necesidad de realizar mejoras en dicho operador, incluso antes de intentar mejorar los otros dos operadores del VMO.

Tabla 2.5. Cantidad de nodos de buena calidad generados por cada operador (Op) en condiciones de óptimos en frontera (dimensión 10)

Op	Función									
	F ₁	F ₂	F ₃	F ₄	F ₅	F ₆	F ₇	F ₅ *	F ₈ *	F ₂₀ *
f	35680	31196	31831	24694	29933	34484	30416	34445	8398	33832
g	4304	8319	7375	15120	10051	5500	9339	5383	15422	5455
h	3	463	783	70	1	2	236	161	15952	701

De ahí que para potenciar el operador de fronteras se implementaron alternativas basadas en búsqueda genética, a partir de la bien conocida efectividad de los operadores genéticos de cruce y mutación. Al respecto se tuvo en cuenta un total de 8 operadores de cruce [Herrera03, Herrera98]: flat, simple, aritméticos uniforme ($\lambda = 0,5$) y no uniforme, discreto, BLX- ($\alpha = 0,5$ y $\beta = 0$), línea extendida e intermedio extendido; así como 3 operadores de mutación [Herrera98]: no uniforme ($g_{\max} = 5$), de Mühlenbein y modal discreto $B_m = 2$ y $rang_{\min} = 0,00001$.⁴ Los parámetros requeridos en algunos operadores se fijaron, en su mayoría, según otros estudios [Herrera03, Herrera98].

A partir de ellos y del propio operador de fronteras originalmente propuesto para VMO, se definieron 36 variantes de prueba. Como estrategia de selección de padres se empleó Emparejamiento Variado Inverso (Negative Assortative Mating, NAM) [Fernandes01] con $N_{nam} = 3$ y la probabilidad de mutación se fijó en 0,005.

2.3.1 Análisis de las estrategias de mutación por cada cruce

Para estudiar el comportamiento de VMO al aplicar tales variantes como operador de frontera, se experimentó sobre 9 funciones con óptimos en la frontera del

⁴ Se probaron otros operadores de ambos tipos, aunque solo se reportan los más destacados.

espacio de búsqueda, introducidas en la sección 2.1.1. En todos los casos las pruebas fueron realizadas solamente en dimensión 10 (ver tabla de Anexo I.4).

Los tests de Friedman e Iman-Davenport (ver Tabla 2.6) sugieren que no existen diferencias significativas entre ninguna de las estrategias de cruce aplicadas por sí solas y sus combinaciones con los operadores de mutación seleccionados. Es decir, ninguna estrategia de mutación marca diferencia notable respecto al desempeño de VMO con las respectivas variantes donde no se tiene en cuenta.

Tabla 2.6. Tests de Friedman e Iman-Davenport (grupos de operadores de fronteras basados en cruce genético y la función h original de VMO)

Operador de fronteras	Friedman valor p		Iman-Davenport valor p		Hipótesis
original	1,349	0,717	0,424	0,737	Aceptada
flat	2,610	0,456	0,858	0,475	Aceptada
simple	2,460	0,483	0,804	0,503	Aceptada
aritmético uniforme	3,870	0,276	1,333	0,284	Aceptada
aritmético no uniforme	1,260	0,739	0,395	0,758	Aceptada
discreto	4,380	0,223	1,539	0,227	Aceptada
BLX-	1,980	0,577	0,636	0,598	Aceptada
línea extendida	1,830	0,608	0,585	0,630	Aceptada
intermedio extendido	3,450	0,327	1,169	0,340	Aceptada

No obstante, a fin de seleccionar la mejor estrategia, permanece en estudio solamente cada combinación más destacada entre las que emplean un mismo operador de cruce. Es decir, entre todas las combinaciones con igual estrategia de cruce se escogió aquella con la que se lograron mejores resultados (menor posición en el ranking). En la Tabla 2.7 se especifican las combinaciones elegidas.

Tabla 2.7. Ranking medio (test de Friedman) para cada grupo de variantes de operador de frontera, definido por la estrategia de cruce empleada

Estrategia de mutación	Estrategia de cruce								
	original	flat	simple	aritmético uniforme	aritmético no uniforme	discreto	BLX-	línea extendida	intermedio extendido
no uniforme	2,90	2,55	2,55	2,90	2,25	2,55	2,45	2,45	2,15
Mühlenbein	2,35	2,70	2,05	1,85	2,85	1,85	2,95	2,40	2,20
modal discreta	2,45	1,95	2,45	2,75	2,55	2,55	2,45	2,20	2,55
no mutar	2,30	2,80	2,95	2,50	2,35	3,05	2,15	2,95	3,10

2.3.2 Selección de la mejor estrategia de búsqueda genética

Entre las alternativas de búsqueda genética seleccionadas en la etapa anterior existen diferencias significativas, reveladas a partir de la aplicación de los tests de Friedman e Iman-Davenport.

Tabla 2.8. Tests de Friedman e Iman-Davenport (variantes más destacadas de operador de fronteras)

Friedman	valor p	Iman-Davenport	valor p	Hipótesis
39,473	4,015E-06	8,766	2,783E-08	Rechazada

Los resultados ubican a la variante de VMO que emplea como operador de fronteras la estrategia “BLX- + no mutar”, por encima de las restantes alternativas correspondientes a los demás operadores de cruce seleccionados (ver Figura Anexo II.1). A raíz de ello, se realizó un test de Holm con la referida estrategia como algoritmo de control. Dicha prueba evidencia que con esta alternativa como operador de fronteras VMO alcanza resultados significativamente superiores a la mayoría de los demás casos.

Tabla 2.9. Test de Holm con estrategia “BLX- + no mutar” como control

i	BLX- + no mutar vs	$z = \frac{(R_0 - R_i)}{SE}$	p	Holm	Hipótesis
8	aritmético uniforme + Mühlenbein	5,103	3,341E-07	0,006	Rechazada
7	aritmético no uniforme + no uniforme	3,878	1,051E-04	0,007	Rechazada
6	intermedio extendido + no uniforme	3,184	0,001	0,008	Rechazada
5	línea extendida + modal discreta	2,939	0,003	0,010	Rechazada
4	discreto + Mühlenbein	2,572	0,010	0,013	Rechazada
3	simple + Mühlenbein	1,633	0,102	0,017	Aceptada
2	flat + modal discreta	1,225	0,221	0,025	Aceptada
1	original + no mutar	1,143	0,253	0,050	Aceptada

Aunque no supera significativamente a VMO, tal estrategia es la única con resultados superiores a los de VMO en su estado original. Por tanto, se valoró en los restantes escenarios, que incluyen problemas con óptimos en el interior en la propia dimensión 10, así como ambos tipos de problemas en dimensiones 30 y 50. En lo adelante, el método con empleo de la estrategia “BLX- + no mutar” como operador de fronteras, será referido como VMOBLX .

A tal efecto, mediante un test de Wilcoxon se comparan VMOBLX y VMO en cada escenario (ver Tabla 2.10). Los resultados evidencian que VMOBLX es significativamente superior a VMO en dimensión 10 ante problemas con óptimos en el interior. Sin embargo, en dimensión 30 VMOBLX se comporta inferior a VMO para ambos tipos de funciones, aunque en ningún caso significativamente.

Por otra parte, en dimensión 50 ante problemas con óptimos en la frontera, ambos métodos se comportan de manera muy similar, destacándose VMO aunque tampoco de modo significativo. Asimismo, en la propia dimensión 50 y ante problemas con óptimos en el interior del espacio de búsqueda, no se detectan diferencias significativas ($\alpha = 0,05$) entre los desempeños de ambos métodos. A pesar de ello, el desempeño de VMOBLX es notablemente mejor al de VMO en dicha situación: tal diferencia puede catalogarse como significativa para $\alpha = 0,1$.

Tabla 2.10. VMOBLX vs VMO: test de Wilcoxon

VMOBLX	vs VMO	R-	R+	valor p	Hipótesis
	10I	136	35	0,028	Rechazada
	30F	21	34	0,508	Aceptada
Escenario	30I	66	87	0,619	Aceptada
	50F	20	25	0,767	Aceptada
	50I	129	42	0,058	Aceptada

2.3.3 Validación de la alternativa elegida

El análisis expuesto de los resultados evidencia que VMOBLX es una variante prometedora de VMO. Por tanto, resulta interesante comprobar su repercusión en la competitividad y escalabilidad del método, sobre todo a partir del ligero deterioro experimentado en dimensión 30. En este sentido, a fin de validar la alternativa propuesta, seguidamente se ilustra un análisis del comportamiento de VMOBLX para ambas clases de problemas, en analogía al ya presentado para VMO.

Desempeño de VMOBLX en problemas con óptimos en la frontera

En esta ocasión, los tests de Friedman e Iman-Davenport muestran diferencias significativas entre los métodos en cada dimensión (ver Tabla 2.11). Como ya se analizara, el desempeño de VMOBLX no supera significativamente al de VMO en problemas con óptimos en la frontera, en dimensión 10. No obstante, la ventaja lograda le permite aumentar la competitividad frente a los métodos estudiados (ver Figura 2.3), hasta llegar a comportarse significativamente superior a LDWPSO.

Tabla 2.11. Tests de Friedman e Iman-Davenport (VMOBLX, CHC, ODE, LDWPSO y SSGA) en Dim 10, Dim 30 y Dim 50

D	Friedman	valor p	Iman-Davenport	valor p	Hipótesis
10	20,980	3,196E-04	9,927	1,612E-05	Rechazada
30	15,440	0,004	5,658	0,001	Rechazada
50	10,280	0,036	3,113	0,027	Rechazada

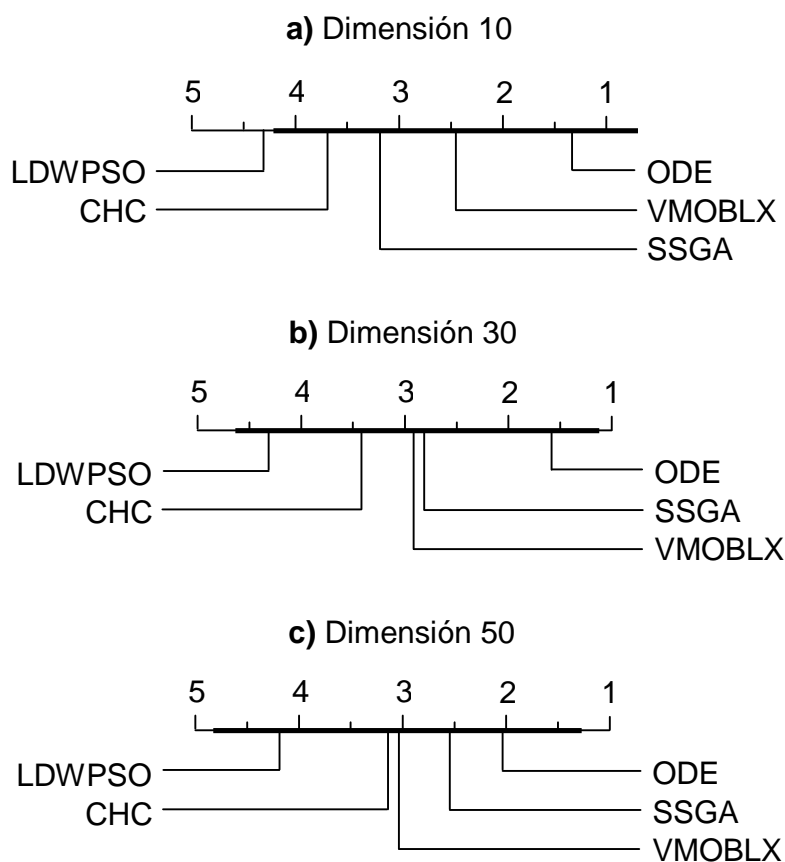


Figura 2.3. Test de Bonferroni-Dunn (VMOBLX , CHC, ODE, LDWPSO y SSGA): con VMOBLX como control

Por otra parte, en correspondencia con el descenso de su desempeño en dimensión 30 para el referido tipo de problemas, VMOBLX se ve superado por SSGA, a diferencia de VMO, aunque no significativamente (ver Figura 2.3). En general, la situación en este escenario es similar a la de VMO, lo cual permite afirmar que el método mantiene su comportamiento competitivo en tal caso. También en dimensión 50 VMOBLX reporta similar competitividad que VMO.

Desempeño de VMOBLX en condiciones de óptimos en el interior

En condiciones de óptimos en el interior del espacio de búsqueda, de acuerdo con los tests de Friedman e Iman-Davenport, existen diferencias significativas entre los métodos en las tres dimensiones (ver Tabla 2.12). La mejora significativa lograda

por VMOBLX sobre VMO en dimensión 10, conlleva al método a elevar su competitividad en dicho escenario (ver Figura 2.4).

Tabla 2.12. Tests de Friedman e Iman-Davenport (VMOBLX, CHC, LDWPSO, ODE, SSGA, G-CMA-ES, DE y K-PCX) en Dim 10, Dim 30 y Dim 50

D	Friedman	valor p	Iman-Davenport	valor p	Hipótesis
10	72,167	6,039E-11	22,789	2,399E-19	Rechazada
30	59,042	2,802E-10	14,990	6,432E-14	Rechazada
50	50,817	1,004E-09	22,048	4,253E-14	Rechazada

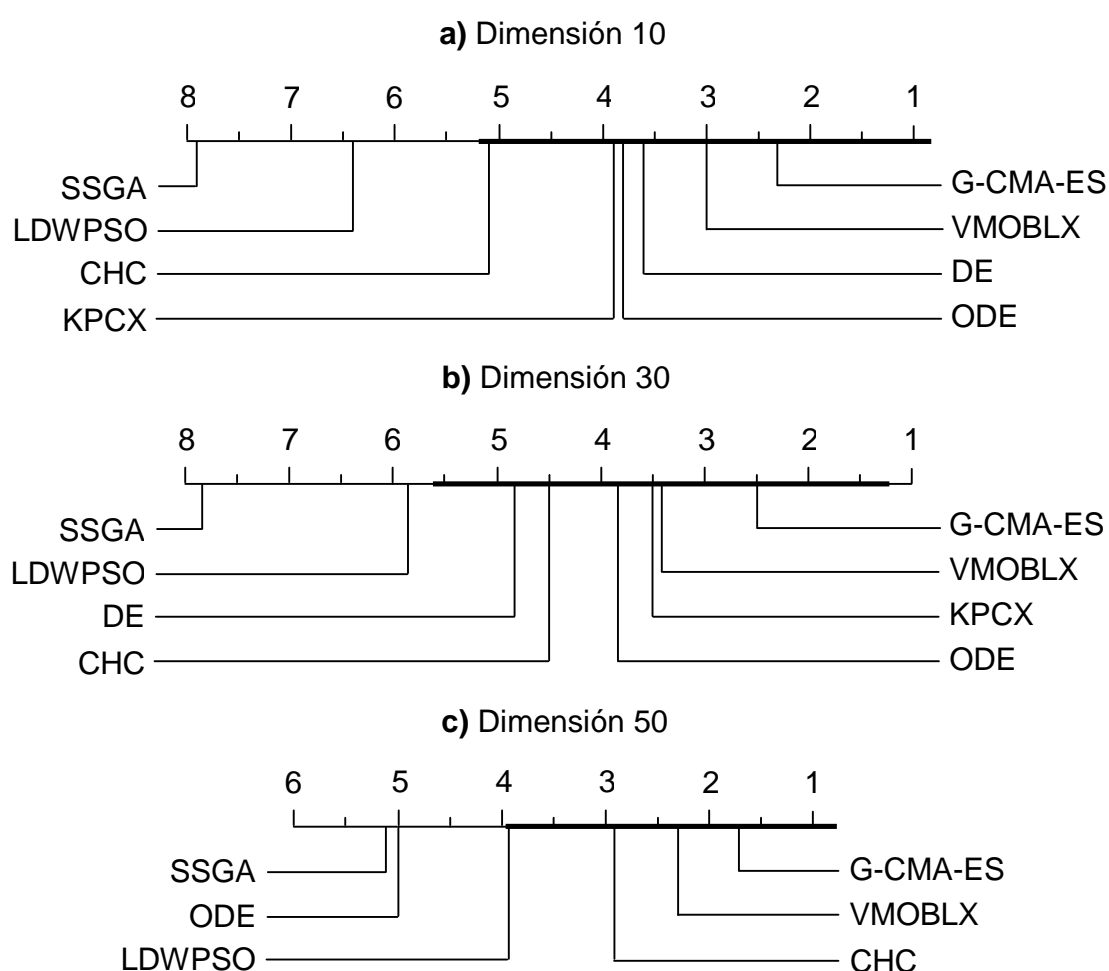


Figura 2.4. Test de Bonferroni-Dunn (VMOBLX, CHC, ODE, LDWPSO, SSGA, DE, K-PCX y G-CMA-ES) con VMOBLX como control

En este sentido, según el test de Bonferroni-Dunn, VMOBLX amplía la ventaja significativa lograda por VMO con relación a LDWPSO y SSGA. Además, a diferencia de VMO, se comporta superior a CHC, KPCX, ODE y DE; y únicamente G-CMA-ES lo supera, aunque en ninguno de los últimos casos las diferencias son significativas.

Por otra parte, si bien el comportamiento de VMOBLX es inferior al de VMO en dimensión 30 para funciones con óptimos en el interior, ello no impide que VMOBLX mantenga similar competitividad a la de VMO en este escenario. Al respecto, se comporta significativamente superior a LDWPSO y SSGA, y resulta superado solo por G-CMA-ES, aunque no significativamente.

Asimismo, como ya fue discutido, el desempeño de VMOBLX es significativamente superior al de VMO en dimensión 50 ante los referidos tipos de problemas. En consecuencia, VMOBLX evidencia un aumento en la competitividad en tal escenario.

2.4 VMOBLX : aporte a la toma de decisiones

Con bastante frecuencia, en el entorno empresarial se hace necesario tomar decisiones. Asimismo, es bastante común que durante tal proceso se esté en presencia de una tarea de optimización continua (las variables de decisión toman valores reales). En tal sentido, la Ayuda a la Decisión ha evolucionado como disciplina, en la medida en que lo han hecho algunas ramas computacionales. Entre las mismas se destaca la Inteligencia Artificial, donde sobresalen las técnicas meta-heurísticas como métodos aproximados de optimización.

Las meta-heurísticas complementan la necesidad de tomar decisiones orientadas a *satisfacer* criterios, que a menudo suelen derivarse de exigencias de tiempo. Ello se debe a que muchos problemas prácticos no son solucionables por los métodos exactos de optimización. Además, existen otros problemas para los cuales encontrar una solución algorítmica es altamente costoso. Esto implica que dicha solución sea alcanzada mucho después de ser requerida por la dinámica de los procesos empresariales en cuestión. Ante tal problemática, las técnicas meta-

heurísticas se han apropiado de una posición privilegiada, al garantizar una solución al menos cuasi óptima en un período de tiempo aceptable.

Entre las técnicas meta-heurísticas más novedosas se encuentra la Optimización basada en Mallas Variables. Su buen comportamiento ha sido avalado a partir de su comparación con otras técnicas de igual tipo destacadas en el estado del arte. Todas ellas encuentran un marco propicio de aplicación en entornos de toma de decisiones que se correspondan con las situaciones anteriormente expuestas. En tales casos, el tiempo constituye un factor esencial. Por tal razón, conocer a priori la ubicación probable de la solución óptima en el espacio de búsqueda permite elevar la eficiencia del proceso, al abordar el problema con técnicas que hayan demostrado ser efectivas en escenarios específicos. Por ejemplo, es un hecho conocido que siempre que se pretenda optimizar una función lineal, cuyas variables estén definidas en un espacio de búsqueda convexo, la solución óptima se encuentra en la frontera de tal espacio. De ahí que se haga necesario estudiar el comportamiento de las técnicas meta-heurísticas en situaciones particulares, con el propósito adicional de potenciar su desempeño en aquellos entornos donde se muestran más prometedoras.

De acuerdo con la posición del óptimo es posible encontrar problemas de frontera y problemas con soluciones óptimas en el interior del espacio de búsqueda. El estudio de VMO ante ambos tipos de funciones evidencia que el método se muestra competitivo en ambas situaciones, aunque su desempeño es inferior a los de algunas técnicas destacadas en el estado del arte. Para contrarrestar tal situación se introduce una nueva variante del método (VMOBLX), a partir del empleo de búsqueda genética en el operador de fronteras del modelo VMO.

En consecuencia, se obtiene una mejora del método VMO original para problemas de optimización continuos. Esta constituye la principal contribución hecha por este estudio al campo de la toma de decisiones. El empleo de VMOBLX se recomienda particularmente en problemas con óptimos en el interior del espacio y con pequeña o mediana dimensión (10 - 50 variables), así como en problemas con óptimos en la frontera y de pequeña dimensión (alrededor de 10 variables). Todo

ello se deriva de la experimentación realizada y con base únicamente en la efectividad lograda por el método.

Por otra parte, un análisis de eficiencia entre VMO y VMOBLX evidencia diferencias entre ellos. Es válido aclarar que la unidad de tiempo usada como criterio comparativo fue la cantidad media de evaluaciones de la función objetivo realizadas antes de alcanzar la solución. Ello responde a que los experimentos no fueron realizados bajo las mismas condiciones (ej. prestaciones de hardware).

Tabla 2.13. VMOBLX vs VMO: test de Wilcoxon para análisis de eficiencia

VMOBLX	vs VMO	R-	R+	valor p	Hipótesis
Frontera	10	41	14	0,169	Aceptada
	30	38	17	0,285	Aceptada
	50	31	24	0,721	Aceptada
Interior	10	126	45	0,078	Aceptada
	30	102	69	0,472	Aceptada
	50	112	59	0,248	Aceptada

Tal como muestra la tabla anterior, el tiempo consumido por VMOBLX es menor al empleado por VMO para ambos tipos de funciones y en las tres dimensiones estudiadas. No obstante, de acuerdo con el test de Wilcoxon la superioridad de VMOBLX con respecto a VMO, solo es significativa (para $\alpha = 0,1$) en problemas con óptimos en el interior del espacio y con dimensión 10. Sin embargo, todo ello es muestra de que la nueva variante de VMO puesta en función de los procesos de toma de decisiones que requieran el empleo de técnicas meta-heurísticas, es más eficiente que el propio método en su estado original.

Disímiles son los escenarios donde es posible encontrar esta clase de problemas. En el territorio holguinero sobresalen algunos por su importancia para la economía nacional. Entre ellos, en la construcción de parques eólicos como fuente de energía renovables, al ser considerada para la ubicación de los generadores la prospección eólica realizada y proyectada en un mapa a tal fin. Tal tarea es objeto de estudio actualmente del *Centro de Estudios de Energía y Tecnología Avanzada*

del Instituto Superior Minero Metalúrgico de Moa, por considerarse este municipio una de las 32 áreas de mayores vientos sostenidos registrados en el país. Asimismo, otro ejemplo destacado lo constituyen las acciones requeridas sobre los recursos energéticos de las empresas de níquel de la provincia Holguín, en aras de garantizar la generación eléctrica en las mismas, y con ello la continuidad de sus procesos productivos. Se prevé abordar ambos procesos de toma de decisiones anteriormente introducidos, a partir de la aplicación de técnicas meta-heurísticas de optimización.

2.5 Conclusiones parciales

El estudio del comportamiento de VMO demuestra su competitividad en los dos tipos de problemas abordados. Sin embargo, su desempeño dista aún de los mostrados por algunas técnicas destacadas en el estado del arte. A fin de elevar el mismo, se emplearon operadores genéticos en la generación de nodos a partir de aquellos en las fronteras de la malla. De ello derivó una nueva y prometedora variante del método (VMOBLX).

Un balance de los resultados expuestos ubica a VMOBLX en una posición ventajosa respecto a VMO en dimensión 10. En tal sentido, se destacan los resultados alcanzados ante problemas con óptimos en el interior. También en la propia dimensión 10, pero en menor magnitud, se mejora el desempeño del método ante funciones con óptimos en la frontera.

Aunque para cada tipo de problemas la variante de VMO propuesta evidencia resultados inferiores a los de este en dimensión 30, la misma mantiene la competitividad en tales escenarios. Asimismo, en dimensión 50 los resultados de VMOBLX son similares a los de VMO ante funciones con óptimos en la frontera. Ante aquellas con soluciones en el interior del espacio de búsqueda, evidencia superioridad significativa respecto a VMO.

Del análisis realizado se deriva que la búsqueda genética constituye una alternativa prometedora como operador de fronteras de VMO, para los dos tipos de problemas estudiados. A pesar de que los mejores resultados se experimentan

en dimensión 10, los alcanzados en dimensiones 30 y 50 dan fe de la escalabilidad del método en su nueva variante. En adición a ello, con la nueva variante propuesta de VMO se logra elevar la eficiencia del método.

Conclusiones

Los resultados experimentales evidencian la competitividad de la meta-heurística VMO, tanto en problemas con óptimos en la frontera, como en aquellos con óptimos en el interior del espacio de búsqueda. Su operador de fronteras demostró ser efectivo en ambos tipos de funciones.

En tal sentido, a partir de la búsqueda genética se proponen mejoras para elevar el desempeño de VMO. Se destacan los resultados logrados con el cruce BLX- (con configuración $\alpha = 0,5$ y $\beta = 0$) como operador de fronteras. En su nueva variante, VMO es particularmente más competitivo en dimensión 10, mientras que los resultados en dimensiones 30 y 50 avalan su escalabilidad. Además, resulta más eficiente que el método original.

Se favorece así la aplicación de técnicas meta-heurísticas a problemas de toma de decisiones que requieran de métodos aproximados de optimización. Como consecuencia de todo lo antes expuesto, se considera cumplido el objetivo originalmente declarado para esta investigación.

Recomendaciones

Los resultados de la alternativa propuesta (VMOBLX) a partir de la introducción de la búsqueda genética como operador de fronteras de VMO, muestran un particular aumento de la competitividad del método en dimensión 10. De ahí que sea necesario:

- Analizar los efectos de otras configuraciones para el propio operador de cruce BLX- .
- Extender el estudio a otros operadores de cruce y mutación, así como a estrategias de selección de padres distintas a la empleada.
- Aplicar búsqueda genética a los restantes operadores de VMO (f y g).

Se propone además:

- Estudiar el comportamiento de VMO en otros tipos de problemas de optimización como los multimodales y los dinámicos.
- Analizar el desempeño de VMO ante problemas de grandes dimensiones.
- Comprobar el comportamiento de VMO en aplicaciones empresariales.

Referencias bibliográficas

- [Auger05] Auger A., Kern S., Hansen N., "A Restart CMA Evolution Strategy With Increasing Population Size", 2005 Special Session on Real-Parameter Optimization, 2005.
- [Alter80] Alter S.L., Decision support systems: current practice and continuing challenges, Addison-Wesley Publishing Company, 1980.
- [Anthony65] Anthony R.N., "Planning and Control Systems: A Framework for Analysis", Harvard University Graduate School of Business Administration, Cambridge, MA, 1965.
- [Bonczek81] Bonczek R.H., Holsapple C.W., Whinston A.B., Foundations of Decision Support Systems, Academic Press, New York, 1981.
- [Breese92] Breese J.S., "Construction of belief and decision networks", Computational intelligence, vol. 8, (4), 1992.
- [Breese96] Breese J.S., Heckermann D., "Decision-theoretic case-based reasoning", IEEE Transactions on systems, man and cybernetics-Part A: systems and humans, vol. 26, (6), 1996.
- [Cheng07] Cheng Y.M., Li L., Chi S.C., "Performance studies on six heuristic global optimization methods in the location of critical slip surface", Computers and Geotechnics, 2007.
- [Cohen88] Cohen M.E., Hudson D.L., "The use of fuzzy variables in medical decision making", en Fuzzy computing, Ed. Gupta M.M. y Yamakawa T., Elsevier Science Publishers, 1988.
- [Courtney93] Courtney J.F., Paradise D.B., "Studies in managerial problem formulation systems", Decision Support Systems, vol. 9, 1993, pp. 413-423.
- [Deb05] Deb K., "A population-based algorithm-generator for real parameter optimization", Soft Computing, vol. 9, 2005, pp. 236 -253.

- [Demsar06] Demsar J., "Statistical Comparisons of Classifiers over Multiple Data Sets", *Journal of Machine Learning Research*, vol. 7, 2006, pp. 1-30.
- [Dorigo04] Dorigo M., Stützle T., *Ant Colony Optimization*, MIT Press, Cambridge, 2004.
- [Eshelman91] Eshelman L., "The CHC adaptive search algorithm. How to have safe search when engaging in nontraditional genetic recombination", *Foundations of Genetic Algorithms*, vol. 1, 1991, pp. 256-283.
- [Fayyad96a] Fayyad U., Piatetsky-Shapiro G., Smyth P., "From Data Mining to Knowledge Discovery in Databases", *AI Magazine*, 1996, pp. 37-54.
- [Fayyad96b] Fayyad U., Piatetsky-Shapiro G., Smyth P., "The KDD process for extracting useful knowledge from volumes of data", *CACM*, vol. 39, (11), 1996.
- [Fernandes01] Fernandes C., Rosa A., "A Study of non-Random Matching and Varying Population Size in Genetic Algorithm using a Royal Road Function", en *Proc. Congress on Evolutionary Computation*, 2001. pp. 60-66.
- [García09b] García S., Molina D., Lozano M., Herrera F., "A study on the use of non-parametric tests for analyzing the evolutionary algorithms' behavior: a case study on the CEC' 2005 Special Session on Real Parameter Optimization", *Journal of Heuristics*, vol. 15, 2009, pp. 617-644.
- [Goldberg98] Goldberg D. E., *Genetic Algorithms in Search*. University of Alabama: Addison-Wesley Publishing Company, 1998.
- [Gorry71] Gorry G.A., Scott Morton M.S., "A framework for management information systems", *Sloan Management Review*, vol. 13, (1), 1971, pp. 50-70.
- [HBMH10] *Handbook of Metaheuristics*, Ed. Gendreau M. y Potvin J.Y., Springer, Segunda Edición, 2010, ISBN: 978-1-4419-1663-1.
- [Hansen06] Hansen N., "Compilation of Results on the 2005 CEC Benchmark Function Set", 2006.
- [Harper88] Harper W., "Decisions, games and equilibrium solutions", *PSA*, vol. 2, 1988.

- [Harkey96] Harkey J., Edwards J., The essential client/server survival guide, John Wiley & Sons, 1996.
- [Heckerman95] Heckerman D., Breese J.S., Rommelse K., "Decision-theoretic troubleshooting", CACM, vol. 38, (3), 1995.
- [Herrera03] Herrera F., Lozano M., Sánchez, A., "A taxonomy for the crossover operator for real-coded genetic algorithms: An experimental study", International Journal of Intelligent Systems, vol. 18, (3), 2003, pp. 309-338.
- [Herrera98] Herrera F., Lozano M., Verdegay J.L., "Tackling RealCoded Genetic Algorithms: Operators and Tools for Behavioural Analysis", Artificial Intelligence Review, vol. 12, Kluwer Academic Publishers, 1998, pp. 265-319.
- [Inmon96] Inmon W.H., "The data warehouse and data mining", CACM, vol. 39, (11), 1996.
- [Jantke97] Jantke K.P., "Towards validation of data mining systems", en Leipziger Informatik-Tage, 1997.
- [Keen78] Keen P.G., Scott M., Decision support systems and organizational perspective. Addison-Wesley Publishing Company, 1978.
- [Keen87] Keen P.G., "Decision support systems: the next decade", Decision Support Systems, vol. 3, (3), 1987, pp. 253-265.
- [Kennedy95] Kennedy J., Eberhart R., "Particle swarm optimization", en Proc. of On Neural Networks, Piscataway, 1995, pp. 1942-1948.
- [Mathur96] Mathur K., Solow D., Investigación de operaciones: conceptos básicos de análisis de decisión. Prentice Hall, 1996.
- [Pearson95] Pearson J.M., Shim J.P., "An empirical investigation into DSS structures and environments", Decision Support Systems, vol. 13, 1995, 141-158.
- [Price05] Price K. V., Rainer R. M., Lampinen J. A., Differential Evolution: A Practical Approach to Global Optimization. London, UK: Springer-Verlag, 2005.

- [Puris10] Puris A., “Desarrollo de meta-heurísticas poblacionales para la solución de problemas complejos”, Tesis Doctoral, Departamento de Ciencia de la Computación, Facultad de Física, Matemática y Computación, Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas, Santa Clara, Cuba, 2010.
- [Puris09] Puris A., Bello R., “Optimización basada en Mallas Dinámicas. Su aplicación en la solución de problemas de optimización continuos”, en Proc. of Memorias del VI Congreso Español sobre Metaheurísticas, Algoritmos Evolutivos y Bioinspirados, 2009, pp. 441-448.
- [Puris11] Puris A., Bello R., Herrera F., Molina D., “Variable Mesh Optimization for Continuous Optimization Problems”, *Soft Computing*, (753), 2011.
- [Rahnamayan08] Rahnamayan S., Tizhoosh H., Salama M., “Solving large scale optimization problems by Opposition-Based Differential Evolution”, *IEEE Transactions on Computation*, vol. 7, (10), 2008, pp. 1792-1804.
- [Rönkkönen05] Rönkkönen J., Kukkonen S., Price K.V., “Real-Parameter Optimization with Differential Evolution”, *CEC 2005 Special Session on Real-Parameter Optimization*, 2005.
- [Russell96] Russell S., Norvig P., *Inteligencia Artificial un enfoque moderno*. Prentice Hall, 1996.
- [Shapiro90] Shapiro S.C., *Encyclopedia of Artificial Intelligence Vol. 1*, Jhon Wiley & Sons, 1990.
- [Shi98] Shi Y., Eberhart R., “A Modified Particle Swarm Optimizer”, en Proc. IEEE International Conference on Evolutionary Computation, 1998, pp. 69-73.
- [Shi-quan88] Shi-quan C., “Fuzzy equivalence and multiobjective decision making”, en *Fuzzy computing*, Ed. Gupta M.M. y Yamakawa T., Elsevier Science Publishers, 1988.
- [Silverman94] Silverman B.G., “Unifying expert systems and the decision sciences”, *Operations research*, vol. 42, (3), 1994.

- [Simon60] Simon H.A., The New Science of Management Decision, Harper Brothers, New York, 1960.
- [Sinha05] Sinha A., Tiwari S., Deb K., "A Population-Based, Steady-State Procedure for Real-Parameter Optimization", 2005 Special Session on Real-Parameter Optimization, 2005.
- [Stael71] Stael C., "A tutorial in decision analysis", en Third research conference on subjective probability, utility, and decision making, 1971.
- [Suganthan05] Suganthan P. N., Hansen N., Liang J. J., Deb K., Chen Y. P., Auger A., Tiwari S., "Problem Definitions and Evaluation Criteria for the CEC 2005 Special Session on Real-Parameter Optimization", 2005.
- [Syswerda89] Syswerda G., "Uniform Crossover in Genetic Algorithms", en Proc. of Third International Conference on Genetic Algorithms, Schaffer J., Ed. Morgan Kaufmann, San Mateo, 1989.
- [Talbi09] Talbi E.G., Metaheuristics from design to implementation, John Wiley & Sons, 2009.
- [White] White D.A., Chatterjee S., Jain R., "Similarity indexing for data mining applications".
- [Wilcoxon45] Wilcoxon F., "Individual comparisons by ranking methods", Biometrics, vol. 1, 1945.
- [Wilke] Wilke W., Bergmann R., Wess S., "Negotiation during intelligence sales support with case-based reasoning".

Bibliografía

- Alter S.L., Decision support systems: current practice and continuing challenges, Addison-Wesley Publishing Company, 1980.
- Anthony R.N., "Planning and Control Systems: A Framework for Analysis", Harvard University Graduate School of Business Administration, Cambridge, MA, 1965.
- Bonczek R.H., Holsapple C.W., Whinston A.B., Foundations of Decision Support Systems, Academic Press, New York, 1981.
- Bramer M., Principles of Data Mining, Springer, 2007, ISBN-10: 1-84628-765-0.
- Breese J.S., "Construction of belief and decision networks", Computational intelligence, vol. 8, (4), 1992.
- Breese J.S., Heckermann D., "Decision-theoretic case-based reasoning", IEEE Transactions on systems, man and cybernetics-Part A: systems and humans, vol. 26, (6), 1996.
- Carter M.W., Price C.C., Model Operations Research: A practical Introduction, CRC Press, 2000.
- Castillo E., Conejo A.J., Pedregal P., García R., Alguacil N., Formulación y Resolución de Modelos de Programación Matemática en Ingeniería y Ciencia, 2002.
- Cheng Y.M., Li L., Chi S.C., "Performance studies on six heuristic global optimization methods in the location of critical slip surface", Computers and Geotechnics, 2007.
- Cohen M.E., Hudson D.L., "The use of fuzzy variables in medical decision making", en Fuzzy computing, Ed. Gupta M.M. y Yamakawa T., Elsevier Science Publishers, 1988.
- Courtney J.F., Paradise D.B., "Studies in managerial problem formulation systems", Decision Support Systems, vol. 9, 1993, pp. 413-423.
- Dorigo M., Stützle T., Ant Colony Optimization, MIT Press, Cambridge, 2004.

- Fayyad U., Piatetsky-Shapiro G., Smyth P., "From Data Mining to Knowledge Discovery in Databases", *AI Magazine*, 1996, pp. 37-54.
- Fayyad U., Piatetsky-Shapiro G., Smyth P., "The KDD process for extracting useful knowledge from volumes of data", *CACM*, vol. 39, (11), 1996.
- García S., Molina D., Lozano M., Herrera F., "A study on the use of non-parametric tests for analyzing the evolutionary algorithms' behavior: a case study on the CEC' 2005 Special Session on Real Parameter Optimization", *Journal of Heuristics*, vol. 15, 2009, pp. 617-644.
- Goldberg D. E., *Genetic Algorithms in Search*. University of Alabama: Addison-Wesley Publishing Company, 1998.
- Gorry G.A., Scott Morton M.S., "A framework for management information systems", *Sloan Management Review*, vol. 13, (1), 1971, pp. 50-70.
- Handbook of Metaheuristics, Ed. Gendreau M. y Potvin J.Y., Springer, Segunda Edición, 2010, ISBN: 978-1-4419-1663-1.
- Haque B., "Towards the application of case-based reasoning to decision making in concurrent product development (concurrent engineering)", *Knowledge-based systems*, vol. 13, (2-3), 2000, pp. 101-112.
- Harper W., "Decisions, games and equilibrium solutions", *PSA*, vol. 2, 1988.
- Harkey J., Edwards J., *The essential client/server survival guide*, John Wiley & Sons, 1996.
- Heckerman D., Breese J.S., Rommelse K., "Decision-theoretic troubleshooting", *CACM*, vol. 38, (3), 1995.
- Herrera F., Lozano M., Sánchez A., "A taxonomy for the crossover operator for real-coded genetic algorithms: An experimental study", *International Journal of Intelligent Systems*, vol. 18, (3), 2003, pp. 309-338.
- Herrera F., Lozano M., Verdegay J.L., "Tackling RealCoded Genetic Algorithms: Operators and Tools for Behavioural Analysis", *Artificial Intelligence Review*, vol. 12, Kluwer Academic Publishers, 1998, pp. 265-319.

- Hillier F., Hillier M., Lieberman G.J., Introduction to Management Science, Irwin McGraw-Hill, 1999.
- Hillier F.S., Lieberman G.J., Introducción a la Investigación de Operaciones, McGraw Hill, Sexta Edición, 1997.
- Hullermeier E., "Case-based probability and Case-based decision making".
- Inmon W.H., "The data warehouse and data mining", CACM, vol. 39, (11), 1996.
- Jantke K.P., "Towards validation of data mining systems", en Leipziger Informatik-Tage, 1997.
- Keen P.G., Scott Morton M.S., Decision support systems and organizational perspective. Addison-Wesley Publishing Company, 1978.
- Keen P.G., "Decision support systems: the next decade", Decision Support Systems, vol. 3, (3), 1987, pp. 253-265.
- Kennedy J., Eberhart R., "Particle swarm optimization", en Proc. of On Neural Networks, Piscataway, 1995, pp. 1942-1948.
- Mathur K., Solow D., Investigación de operaciones: conceptos básicos de análisis de decisión. Prentice Hall, 1996.
- Moss L.T., Atre S., Business Intelligence Roadmap: The Complete Project Lifecycle for Decision-Support Applications, Addison Wesley, 2003, ISBN: 0-201-78420-3.
- Navarro R., Puris A., Bello R., Herrera F., "Estudio del desempeño de la Optimización basada en Mallas Variables en problemas con óptimos en las fronteras del espacio de búsqueda", Revista Cubana de Ciencias Informáticas, vol. 3, (3-4), 2009, pp. 57-65.
- Navarro R., Puris A., Bello R., "Optimización basada en Mallas Variables: estudio de comportamiento en problemas con óptimos en las fronteras del espacio de búsqueda", en Conferencia Internacional de Ciencias Computacionales e Informáticas, 2011.

- Navarro R., Puris A., Bello R., "Optimización basada en Mallas Variables con cruce BLX- como operador de fronteras", VI Conferencia Internacional de Matemática y Computación, COMPUMAT 2011.
- Nocedal J., Wright S.J., Numerical Optimization, Springer Series in Operations Research, 1999, ISBN: 0-387-98793-2.
- Paradice D.B., Courtney J.F., "Organizational knowledge management", Information Resources Management Journal, vol. 2, (3), 1989, 1-13.
- Pearson J.M., Shim J.P., "An empirical investigation into DSS structures and environments", Decision Support Systems, vol. 13, 1995, 141-158.
- Puris A., Bello R., "Optimización basada en Mallas Dinámicas. Su aplicación en la solución de problemas de optimización continuos", en Proc. of Memorias del VI Congreso Español sobre Metaheurísticas, Algoritmos Evolutivos y Bioinspirados, 2009, pp. 441-448.
- Russell S., Norvig P., Inteligencia Artificial un enfoque moderno, Prentice Hall, 1996.
- Search Methodologies Introductory Tutorials in Optimization and Decision Support Techniques, Ed. Burke E.K. y Kendall G., Springer, 2005, ISBN-10: 0-387-23460-8.
- Shapiro S.C., Encyclopedia of Artificial Intelligence Vol. 1, Jhon Wiley & Sons, 1990.
- Shi-quan C., "Fuzzy equivalence and multiobjective decision making", en Fuzzy computing, Ed. Gupta M.M. y Yamakawa T., Elsevier Science Publishers, 1988.
- Silverman B.G., "Unifying expert systems and the decision sciences", Operations research, vol. 42, (3), 1994.
- Simon H.A., The New Science of Management Decision, Harper Brothers, New York, 1960.

- Stael C., "A tutorial in decision analysis", en Third research conference on subjective probability, utility, and decision making, 1971.
- Taha H.A., Investigación de Operaciones: una introducción, Prentice Hall, México, Sexta Edición, 1998.
- Talbi E.G., Metaheuristics from design to implementation, John Wiley & Sons, 2009.
- Vercellis C., Business Intelligence: Data Mining and Optimization for Decision Making, John Wiley & Sons, 2009, ISBN: 978-0-470-51138-1.
- Watson H., Gray P., Decision Support in the Data Warehouse, Prentice-Hall, Englewood-Cliffs, NJ, 1997.
- White D.A., Chatterjee S., Jain R., "Similarity indexing for data mining applications".
- Wilke W., Bergmann R., Wess S., "Negotiation during intelligence sales support with case-based reasoning".
- Winston W.L., Albright S.C., Broadie M., Practical Management Science: Spreadsheet Modeling and Applications, International Thomson Publishing Company, 1997.

Glosario de términos

convexo: un espacio de búsqueda clasifica como tal cuando al trazar una recta entre cualquier par de puntos del mismo, la misma está completamente contenida en dicho espacio.

dimensión: cantidad de variables del problema; tamaño del mismo.

escalabilidad: refiere la capacidad de un método de mantener su carácter competitivo al crecer la dimensión del problema.

función multimodal: aquella con varios óptimos, sean estos globales y/o locales.

función unimodal: aquella con un único óptimo, que por tanto es global.

heurística voraz (greedy): un algoritmo voraz elige en cada paso local la opción óptima, con la esperanza de llegar a una solución global óptima.

NP-completo: tipo de problemas para los cuales no se conoce una solución algorítmica con tiempo polinomial en el peor de los casos.

óptimo local: una solución $s^* \in S$ es un óptimo local si para cada s factible suficientemente cerca de s^* , se cumple que $f(s^*) \leq f(s)$ para el caso de minimización y $f(s^*) \geq f(s)$ para el de maximización.

padre: cada uno de los dos individuos (soluciones) seleccionados para aplicar un operador de cruce genético.

post hoc: luego de haber identificado diferencias significativas entre las medias, las pruebas post hoc permiten determinar cuáles medias difieren.

test no paramétrico: refiere aquellas pruebas cuyos modelos estadísticos no se basan en los supuestos sobre la población.

Anexos

Anexo I. Resultados experimentales

Tabla Anexo I.1. Errores medios de cada variante de VMO en dimensión 10

F	Dimensión 10									
	CHC	ODE	LDWPSO	SSGA	VMO_SF	VMO	VMOBLX	G-CMA-ES	DE	K-PCX
F ₁	3,74E+01	6,62E-09	5,26E-01	8,94E-09	1,07E-01	3,54E-02	2,91E-02			
F ₂	1,01E+02	1,27E-04	9,46E+02	1,73E+01	1,12E+03	5,62E-03	4,69E-03			
F ₃	1,82E+01	0,00E+00	2,72E+01	1,04E+01	4,43E+01	4,35E+00	2,13E+00			
F ₄	1,77E+00	0,00E+00	3,19E+00	2,59E-01	4,13E+00	2,23E+00	1,90E-01			
F ₅	2,70E+06	2,80E-01	2,28E+03	5,10E+01	4,00E+01	1,81E+01	6,87E+00			
F ₆	1,13E-01	3,72E-10	3,88E-01	8,01E-02	2,39E-01	2,84E-01	1,98E-01			
F ₇	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	3,07E+01	2,40E-01	0,00E+00			
F _{5*}	1,62E+03	8,36E-09	9,14E+02	1,03E+02	2,19E+02	2,71E+01	2,58E+01			
F _{6*}	5,79E+04	1,59E-01	5,68E+04	3,65E+04	7,64E+00	6,02E+01	1,92E+01	4,87E-09	0,00E+00	4,78E-01
F _{7*}	1,27E+03	1,27E+03	3,02E+00	3,36E+04	6,38E+02	6,39E+02	1,27E+03	3,31E-09	1,52E-01	2,31E-01
F _{8*}	2,03E+01	2,04E+01	2,05E+01	3,21E+04	2,03E+01	2,03E+01	2,04E+01			
F _{9*}	6,45E+00	7,67E-09	2,98E+01	3,06E+04	7,38E+00	3,10E+00	5,74E-01	2,39E-01	0,00E+00	1,19E-01
F _{10*}	6,81E+00	1,37E+01	3,46E+01	2,99E+04	3,91E+01	4,79E+00	3,79E+00	7,96E-02	3,60E+01	2,39E-01
F _{11*}	1,76E+00	1,75E+00	7,19E+00	2,92E+04	6,57E+00	5,12E+00	4,73E-01	9,34E-01	4,67E+00	6,65E+00
F _{12*}	1,07E+03	2,13E+01	1,44E+03	2,62E+04	5,26E+02	7,55E+01	1,26E+01	2,93E+01	7,24E+02	1,49E+02
F _{13*}	8,59E-01	6,47E-01	2,47E+00	2,65E+04	1,52E+00	7,48E-01	5,55E-01	6,96E-01	1,81E+00	6,53E-01
F _{14*}	1,96E+00	3,24E+00	3,62E+00	2,63E+04	3,88E+00	2,74E+00	2,13E+00	3,01E+00	3,52E+00	2,35E+00
F _{15*}	3,12E+02	3,04E+02	4,28E+02	2,63E+04	4,44E+02	2,14E+02	1,63E+02	2,28E+02	2,70E+02	5,10E+02
F _{16*}	9,72E+01	1,09E+02	1,72E+02	2,63E+04	2,56E+02	1,03E+02	9,56E+01	9,13E+01	1,73E+02	9,59E+01
F _{17*}	1,21E+02	1,34E+02	2,03E+02	2,57E+04	1,86E+02	1,20E+02	9,82E+01	1,23E+02	1,72E+02	9,73E+01
F _{18*}	9,11E+02	4,88E+02	9,34E+02	2,58E+04	1,20E+03	7,46E+02	5,65E+02	3,32E+02	3,00E+02	7,52E+02
F _{19*}	8,87E+02	4,84E+02	9,26E+02	2,43E+04	1,15E+03	6,98E+02	5,64E+02	3,26E+02	3,00E+02	7,51E+02
F _{20*}	9,07E+02	5,08E+02	9,27E+02	2,44E+04	1,15E+03	7,87E+02	5,80E+02			
F _{21*}	7,55E+02	5,40E+02	1,02E+03	2,37E+04	1,19E+03	5,53E+02	4,50E+02	5,00E+02	5,00E+02	1,05E+03
F _{22*}	7,62E+02	7,70E+02	8,57E+02	2,42E+04	9,94E+02	7,51E+02	6,62E+02	7,29E+02	7,34E+02	6,59E+02
F _{23*}	1,07E+03	5,66E+02	1,11E+03	2,39E+04	1,28E+03	6,45E+02	5,92E+02	5,59E+02	5,59E+02	1,06E+03
F _{24*}	3,24E+02	2,00E+02	5,29E+02	2,32E+04	1,31E+03	4,06E+02	2,48E+02	2,00E+02	2,00E+02	4,06E+02
F _{25*}	1,78E+03	1,74E+03	5,06E+02	2,36E+04	1,85E+03	3,88E+02	1,75E+03	3,74E+02	9,28E+02	4,06E+02

Tabla Anexo I.2. Errores medios de cada variante de VMO en dimensión 30

F	Dimensión 30									
	CHC	ODE	LDWPSO	SSGA	VMO_SF	VMO	VMOBLX	G-CMA-ES	DE	K-PCX
F ₁	9,34E+01	8,53E-09	1,93E+03	9,55E-09	1,43E-01	1,14E-01	1,06E-01			
F ₂	1,77E+03	3,18E-04	5,76E+03	4,60E+02	4,10E+03	3,13E+02	1,38E+03			
F ₃	7,24E+01	6,60E-09	1,77E+02	4,73E+01	1,71E+02	6,03E+01	6,35E+01			
F ₄	1,01E+01	0,00E+00	1,23E+01	1,24E+00	1,33E+01	9,93E+00	5,40E+00			
F ₅	4,15E+07	2,40E-01	3,96E+07	5,13E+01	4,09E+01	2,88E+01	6,96E+01			
F ₆	7,80E-01	8,68E-09	1,84E+01	4,04E-03	2,99E-01	4,31E-01	4,44E-01			
F ₇	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	1,20E+02	2,44E+00	0,00E+00			
F _{5*}	5,72E+03	2,26E+02	1,35E+04	2,74E+03	3,80E+03	1,99E+03	8,15E+02			
F _{6*}	1,10E+07	1,31E-05	1,58E+09	1,37E+05	3,36E+02	2,82E+02	1,38E+02	5,90E-09	3,77E+00	1,75E+00
F _{7*}	4,70E+03	4,70E+03	2,84E+02	1,36E+05	2,72E+03	2,72E+03	4,70E+03	5,31E-09	9,65E-01	1,50E-02
F _{8*}	2,09E+01	2,10E+01	2,10E+01	1,32E+05	2,10E+01	2,09E+01	2,10E+01			
F _{9*}	4,41E+01	3,98E-02	2,42E+02	1,33E+05	1,48E+02	1,04E+02	2,85E+01	9,38E-01	0,00E+00	2,79E-01
F _{10*}	4,72E+01	1,17E+02	2,91E+02	1,32E+05	7,69E+01	5,31E+00	3,10E+01	1,65E+00	6,16E+01	5,17E-01
F _{11*}	1,92E+01	3,09E+01	3,73E+01	1,28E+05	3,21E+01	1,41E+01	7,15E+00	5,48E+00	3,26E+01	2,95E+01
F _{12*}	1,04E+04	4,94E+04	2,94E+05	1,26E+05	7,24E+03	1,05E+04	9,04E+03	4,43E+04	8,43E+03	1,68E+03
F _{13*}	4,30E+00	2,61E+00	1,40E+02	1,29E+05	3,49E+01	4,52E+00	3,27E+00	2,49E+00	4,51E+00	1,19E+01
F _{14*}	1,12E+01	1,32E+01	1,36E+01	1,26E+05	1,32E+01	1,01E+01	1,12E+01	1,29E+01	1,33E+01	1,38E+01
F _{15*}	3,36E+02	3,48E+02	7,11E+02	1,27E+05	1,04E+03	3,36E+02	3,07E+02	2,08E+02	4,84E+02	8,76E+02
F _{16*}	1,75E+02	1,51E+02	4,36E+02	1,25E+05	6,31E+02	4,68E+02	1,99E+02	3,50E+01	2,82E+02	7,15E+01
F _{17*}	2,54E+02	2,01E+02	5,48E+02	1,27E+05	7,11E+02	1,97E+02	2,06E+02	2,91E+02	3,09E+02	1,56E+02
F _{18*}	9,11E+02	9,05E+02	9,06E+02	1,24E+05	1,33E+03	8,07E+02	9,05E+02	9,04E+02	9,13E+02	8,30E+02
F _{19*}	8,99E+02	9,05E+02	9,02E+02	1,21E+05	1,37E+03	8,06E+02	9,05E+02	9,04E+02	9,13E+02	8,31E+02
F _{20*}	8,96E+02	9,05E+02	9,05E+02	1,24E+05	1,33E+03	8,06E+02	9,05E+02			
F _{21*}	5,38E+02	5,00E+02	1,04E+03	1,20E+05	1,40E+03	5,00E+02	5,40E+02	5,00E+02	5,81E+02	8,59E+02
F _{22*}	9,72E+02	8,68E+02	7,15E+02	1,20E+05	1,46E+03	5,07E+02	8,85E+02	8,03E+02	9,64E+02	1,56E+03
F _{23*}	5,87E+02	5,34E+02	1,09E+03	1,19E+05	1,41E+03	5,35E+02	5,96E+02	5,34E+02	6,21E+02	8,66E+02
F _{24*}	2,16E+02	4,17E+02	2,36E+02	1,18E+05	1,42E+03	2,00E+02	2,00E+02	9,10E+02	3,14E+02	2,13E+02
F _{25*}	1,65E+03	1,63E+03	2,61E+02	1,21E+05	1,86E+03	2,01E+02	2,00E+02	2,11E+02	7,86E+02	2,13E+02

Tabla Anexo I.3. Errores medios de cada variante de VMO en dimensión 50

F	Dimensión 50							
	CHC	ODE	LDWPSO	SSGA	VMO_SF	VMO	VMOBLX	G-CMA-ES
F ₁	1,43E+02	8,80E-09	9,51E+03	9,58E-09	2,86E-01	2,33E-01	2,48E-01	
F ₂	3,76E+03	6,36E-04	1,20E+04	1,48E+03	7,24E+03	4,86E+02	4,23E+03	
F ₃	1,36E+02	7,90E-09	3,52E+02	8,85E+01	3,00E+02	1,07E+02	1,79E+02	
F ₄	1,69E+01	0,00E+00	2,18E+01	3,37E+00	2,28E+01	1,91E+01	1,69E+01	
F ₅	7,24E+06	5,54E+00	4,80E+08	5,33E+01	5,54E+01	5,48E+01	5,78E+02	
F ₆	2,12E+00	9,08E-09	8,54E+01	1,18E-03	2,64E-01	4,27E-01	5,17E-01	
F ₇	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	2,15E+02	8,72E+00	4,00E-02	
F _{5*}	1,02E+04	8,63E+03	2,92E+04	4,96E+03	1,05E+04	5,56E+03	3,88E+03	
F _{6*}	4,88E+06	1,21E+05	1,20E+10	2,52E+05	1,14E+02	1,78E+03	4,47E+02	7,13E-09
F _{7*}	6,16E+03	2,31E+06	8,29E+02	2,54E+05	3,71E+03	3,71E+03	6,20E+03	7,22E-09
F _{8*}	2,11E+02	4,79E+04	2,11E+02	2,49E+05	2,12E+01	2,11E+01	2,11E+01	
F _{9*}	8,65E+01	9,05E-02	5,10E+02	2,40E+05	4,10E+02	2,28E+02	1,46E+02	1,39E+00
F _{10*}	1,20E+01	1,24E+01	2,45E+02	2,42E+05	7,46E+01	1,07E+01	7,24E+01	1,72E+00
F _{11*}	5,85E+02	3,32E+05	6,21E+02	2,35E+05	6,19E+01	4,24E+01	1,99E+01	1,17E+01
F _{12*}	3,07E+04	3,34E+09	2,15E+06	2,33E+05	9,56E+04	9,67E+04	6,37E+04	2,27E+05
F _{13*}	1,79E+02	3,14E+06	2,40E+03	2,33E+05	1,21E+02	8,03E+00	1,07E+01	4,59E+00
F _{14*}	3,96E+02	3,13E+02	3,96E+02	2,33E+05	2,36E+01	2,19E+01	2,06E+01	2,29E+01
F _{15*}	3,48E+02	2,25E+02	7,81E+02	2,31E+05	9,59E+02	4,26E+02	3,70E+02	2,04E+02
F _{16*}	1,47E+02	5,36E+05	5,27E+02	2,31E+05	7,42E+02	2,00E+02	2,07E+02	3,09E+01
F _{17*}	2,70E+02	2,15E+06	7,08E+02	2,30E+05	9,89E+02	2,72E+02	1,60E+02	2,34E+02
F _{18*}	9,43E+02	7,56E+05	1,04E+03	2,30E+05	1,32E+03	9,26E+02	9,21E+02	9,13E+02
F _{19*}	9,45E+02	7,01E+05	1,09E+03	2,28E+05	1,35E+03	9,41E+02	9,21E+02	9,12E+02
F _{20*}	5,90E+02	2,75E+06	7,17E+02	2,27E+05	1,34E+03	9,29E+02	9,20E+02	
F _{21*}	5,39E+02	5,55E+05	9,93E+02	2,24E+05	1,02E+03	9,60E+02	5,36E+02	1,00E+03
F _{22*}	9,77E+02	3,01E+05	5,41E+02	2,24E+05	1,49E+03	9,83E+02	9,35E+02	8,05E+02
F _{23*}	8,03E+02	4,81E+06	1,14E+03	2,23E+05	1,47E+03	1,02E+03	6,37E+02	1,01E+03
F _{24*}	8,19E+02	9,74E+05	1,16E+03	2,22E+05	1,52E+03	2,00E+02	2,39E+02	9,55E+02
F _{25*}	1,95E+03	3,90E+07	5,41E+02	2,19E+05	1,89E+03	1,68E+03	1,67E+03	2,15E+02

Tabla Anexo I.4. Errores medios de las alternativas de cruce y mutación

Operador fronteras		Función									
cruce	EM ⁵	F ₁	F ₂	F ₃	F ₄	F ₅	F ₆	F ₇	F _{5*}	F _{8*}	F _{20*}
original de VMO	EM1	3,54E-02	5,62E-03	4,35E+00	2,23E+00	1,81E+01	2,84E-01	2,40E-01	2,71E+01	2,03E+01	3,60E+02
	EM2	4,84E-02	5,59E-03	4,63E+00	2,24E+00	1,70E+01	2,78E-01	2,80E-01	2,88E+01	2,04E+01	3,60E+02
	EM3	4,43E-02	4,93E-03	3,44E+00	2,32E+00	1,33E+01	2,81E-01	2,40E-01	2,90E+01	2,04E+01	4,20E+02
	EM4	4,57E-02	5,16E-03	4,27E+00	2,41E+00	1,50E+01	2,95E-01	2,40E-01	2,63E+01	2,03E+01	3,80E+02
flat	EM1	5,22E-02	7,82E+01	2,69E+00	1,95E+00	2,67E+01	2,77E-01	0,00E+00	2,90E+01	2,04E+01	6,75E+02
	EM2	5,73E-02	5,85E-03	2,93E+00	1,79E+00	2,57E+01	3,09E-01	0,00E+00	3,10E+01	2,04E+01	6,04E+02
	EM3	5,45E-02	4,34E+01	2,22E+00	1,95E+00	3,00E+01	2,81E-01	0,00E+00	2,92E+01	2,03E+01	6,64E+02
	EM4	5,92E-02	3,47E+01	1,89E+00	1,93E+00	2,46E+01	2,74E-01	0,00E+00	2,88E+01	2,04E+01	6,08E+02
simple	EM1	1,30E-01	1,30E-01	1,68E-01	5,60E-01	1,64E+01	2,79E-01	0,00E+00	5,48E+03	2,04E+01	9,47E+02
	EM2	1,22E-01	1,26E-01	4,90E+00	8,49E-01	1,46E+01	2,96E-01	0,00E+00	6,08E+03	2,03E+01	8,68E+02
	EM3	1,26E-01	1,01E-01	2,57E-01	2,76E-01	1,51E+01	2,60E-01	0,00E+00	5,81E+03	2,04E+01	8,97E+02
	EM4	1,28E-01	1,08E-01	2,25E-02	1,13E-01	1,58E+01	2,83E-01	0,00E+00	5,95E+03	2,04E+01	9,24E+02
aritmético uniforme	EM1	1,45E+00	8,73E+02	1,41E+01	4,38E+00	4,18E+01	1,12E+00	1,35E+01	2,18E+02	2,04E+01	9,81E+02
	EM2	1,82E+00	7,74E+02	1,49E+01	4,26E+00	4,71E+01	1,22E+00	1,41E+01	2,25E+02	2,04E+01	9,76E+02
	EM3	1,64E+00	9,64E+02	1,39E+01	4,29E+00	3,84E+01	1,20E+00	1,34E+01	1,92E+02	2,04E+01	9,75E+02
	EM4	1,71E+00	7,22E+02	1,41E+01	4,35E+00	3,71E+01	1,33E+00	1,46E+01	2,36E+02	2,04E+01	9,76E+02
aritmético no uniforme	EM1	4,20E-01	4,17E+02	1,34E+01	3,76E+00	3,94E+01	6,25E-01	7,40E+00	9,33E+01	2,04E+01	9,50E+02
	EM2	4,46E-01	3,94E+02	1,24E+01	3,81E+00	3,74E+01	6,33E-01	7,64E+00	7,87E+01	2,04E+01	9,44E+02
	EM3	4,58E-01	4,29E+02	1,08E+01	3,90E+00	4,52E+01	5,83E-01	7,76E+00	1,07E+02	2,04E+01	9,39E+02
	EM4	4,73E-01	4,55E+02	1,05E+01	3,87E+00	3,98E+01	6,09E-01	7,48E+00	9,31E+01	2,04E+01	9,42E+02
discreto	EM1	2,20E-01	5,25E+01	3,91E+00	2,83E+00	5,74E+01	4,37E-01	6,40E-01	6,35E+01	2,04E+01	6,15E+02
	EM2	1,83E-01	8,72E+01	4,29E+00	2,59E+00	5,53E+01	4,18E-01	6,80E-01	5,54E+01	2,04E+01	6,13E+02
	EM3	1,70E-01	9,38E+01	3,22E+00	2,50E+00	5,61E+01	4,32E-01	4,00E-01	5,51E+01	2,04E+01	5,54E+02
	EM4	2,09E-01	8,52E+01	3,21E+00	2,46E+00	6,18E+01	4,38E-01	4,80E-01	5,52E+01	2,04E+01	6,84E+02
BLX-	EM1	2,91E-02	4,69E-03	2,13E+00	1,90E-01	6,87E+00	1,98E-01	0,00E+00	2,58E+01	2,04E+01	5,80E+02
	EM2	3,24E-02	4,32E-03	2,60E+00	2,12E-01	5,88E+00	1,92E-01	0,00E+00	2,87E+01	2,04E+01	6,00E+02
	EM3	3,79E-02	4,53E-03	2,84E+00	1,45E-01	6,91E+00	1,98E-01	0,00E+00	2,80E+01	2,04E+01	6,20E+02
	EM4	2,85E-02	4,81E-03	2,40E+00	1,51E-01	6,43E+00	2,04E-01	0,00E+00	2,64E+01	2,04E+01	6,00E+02
línea extendida	EM1	1,15E-02	6,91E+02	1,33E+01	4,10E+00	6,19E+01	1,04E-02	4,00E-02	1,32E+02	2,03E+01	8,64E+02
	EM2	5,10E-03	4,98E+02	1,43E+01	4,07E+00	6,38E+01	0,00E+00	1,20E-01	1,11E+02	2,04E+01	8,06E+02
	EM3	9,39E-02	5,49E+02	1,27E+01	4,18E+00	5,78E+01	2,03E-02	0,00E+00	1,22E+02	2,03E+01	7,58E+02
	EM4	4,28E-02	6,71E+02	1,14E+01	4,02E+00	5,15E+01	2,70E-02	0,00E+00	1,10E+02	2,04E+01	8,16E+02
intermedio extendido	EM1	7,31E-01	2,13E+02	1,00E+01	4,10E+00	4,84E+01	6,01E-01	4,40E+00	1,15E+02	2,04E+01	6,80E+02
	EM2	6,33E-01	2,06E+02	1,02E+01	3,95E+00	4,56E+01	6,17E-01	4,52E+00	1,02E+02	2,03E+01	6,38E+02
	EM3	6,37E-01	2,02E+02	9,90E+00	3,96E+00	4,71E+01	6,60E-01	3,92E+00	1,01E+02	2,04E+01	6,66E+02
	EM4	7,29E-01	2,05E+02	9,69E+00	3,88E+00	5,18E+01	6,51E-01	4,52E+00	9,90E+01	2,04E+01	7,42E+02

⁵ Leyenda de las estrategias de mutación (EM):EM1: **no mutar**, EM2: **no uniforme**, EM3: **Mühlenbein** y EM4: **modal discreto**

Anexo II. Análisis estadístico

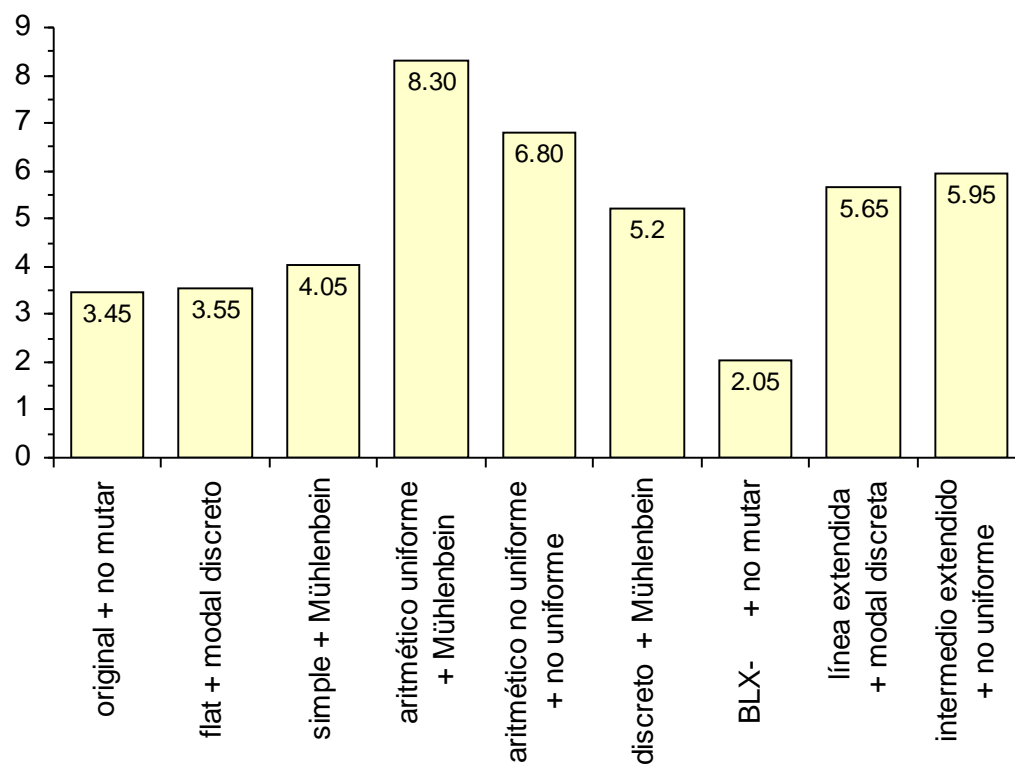
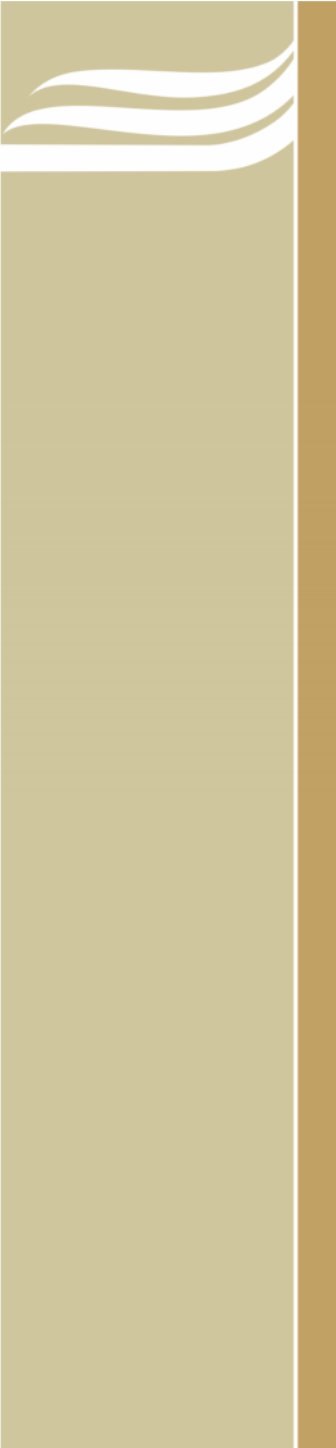


Figura Anexo II.1. Ranking medio (test de Friedman) de las variantes seleccionadas de operador de fronteras, basadas en búsqueda genética



Optimización basada en Mallas Variables con operador de fronteras basado en búsqueda genética