Instituto Superior Pedagógico
“*José de la Luz y Caballero*”

ESTRATEGIA METACOGNITIVA EN LA FORMULACIÓN DE PROBLEMAS PARA LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

TESIS EN OPCIÓN AL GRADO CIENTÍFICO DE
DOCTOR EN CIENCIAS PEDAGÓGICAS

Miguel Cruz Ramírez

Holguín, 2002

Instituto Superior Pedagógico

“*José de la Luz y Caballero*”

ESTRATEGIA METACOGNITIVA EN LA FORMULACIÓN DE PROBLEMAS PARA LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

TESIS EN OPCIÓN AL GRADO CIENTÍFICO DE

DOCTOR EN CIENCIAS PEDAGÓGICAS

Autor: M. Sc. Miguel Cruz Ramírez

Tutor: Dr. C. Salvador Álvarez Reyes

Holguín, 2002

SÍNTESIS

La tesis contiene una estrategia metacognitiva, dirigida a favorecer el proceso de formulación de problemas matemáticos escolares, por parte de los profesores en formación. El conjunto de acciones y operaciones que la conforman propicia la implementación simultánea de diversas técnicas, fundamentalmente técnicas de naturaleza algorítmica, lógica y heurística para la obtención de nuevos problemas. La concepción de esta estrategia ha sido posible tras conceptuar el acto de formular un problema como problema en sí mismo, de manera que los procesos psicológicos ínsitos se abordan sobre la plataforma conceptual de la resolución de problemas. También se modela la compleja actividad cognitiva que debe realizar el futuro maestro, cuando elabore nuevos problemas, develando la compleja interrelación que subyace sobre diversos procesos asociados. Desde el punto de vista práctico, se introduce una metodología para caracterizar el proceso de formulación, compuesta por un grupo de instrumentos y por un conjunto de indicadores que facilitan este fin. Finalmente, se describe la realización de un experimento pedagógico formativo, dirigido a validar la efectividad de esta estrategia en la formación del profesor de Matemática–Computación.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La Matemática es una de las ciencias más antiguas y, a lo largo de los años, ha sido utilizada con fines diversos. Esta ciencia es extraordinariamente dinámica y cambiante, a tal punto que sus conceptos primarios sufren transformaciones relativamente rápidas y hasta su propia concepción, aunque de modo más lento, experimenta cambios tangibles. La Matemática es un fenómeno cultural universal, pues cualquier civilización crea una Matemática. Imaginar un mundo, en el cual los cambios y la complejidad subsistentes no puedan ser organizados mentalmente en relaciones, dependencias y modelos, es ciertamente difícil. “Un mundo así constituiría un verdadero caos, una antítesis del cosmos” (Sierpinska, 1998, p.1).

En la medida en que se transformó la sociedad, la Matemática experimentó un crecimiento exponencial, planteando nuevos retos para enseñarla y aprenderla. En el finalizado siglo XX, con la denominada “Revolución Científico–Técnica”, la correspondiente evolución didáctica alcanzó una velocidad sin precedentes, así que el abordaje de la realidad actual no es tarea sencilla (Rebolledo, 1999, p. 2).

En los últimos 30 años, especialmente a partir de la publicación de la tesis doctoral de Lakatos (*Proofs and Refutations*), en 1976, se han producido cambios profundos en las concepciones de la Matemática y su enseñanza. Resulta impresionante la producción científica ocurrida durante este período; basta decir que hoy día se publican más de 350 revistas referidas al campo de la “Educación Matemática”, “Didáctica de la Matemática”, o bien “Matemática Educativa”. Como puede verse, no existe unidad de criterios en cuanto a la denominación de lo que para muchos es una ciencia bastante joven (Sierpinska et al., 1993; Malara, 1997; Gascón, 1998; Cruz y Aguilar, 2001). La figura 1 ilustra la producción científica que registra la base de datos MATH–DI desde 1976, correspondiente a la revista *ZDM* (Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, según un análisis estadístico del autor en el sitio Web http:// www.emis.de/MATH/DI/searcha.html).

Muchos núcleos científicos, dedicados a la Matemática Educativa, han ido surgiendo contemporáneamente. Encabeza este conjunto la IMU (International Mathematical Union), en cuyos estatutos se consigna “fomentar y apoyar otras actividades matemáticas en cualquiera de sus aspectos: pura, aplicada o educacional."[1] Como asociación adjunta, capaz de organizar y dirigir la esfera educacional la IMU creó en 1908 la ICMI (International Commission on Mathematical Instruction). Hoy día esta organización patrocina cuatro grupos de estudio y diferentes conferencias regionales[2].

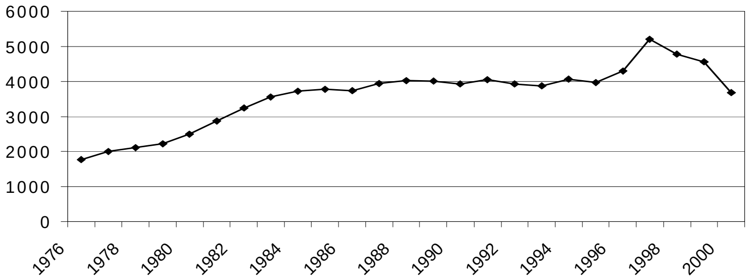


Figura 1. *Producción científica mundial sobre Matemática Educativa.*

El evento cumbre celebrado por la ICMI es el ICME (International Congress of Mathematics Education). Hasta la fecha se han celebrado nueve de estos eventos, destacándose los tres últimos por el tamaño y la representatividad de las delegaciones. Basta decir que en Quebec' 1992 participaron 3407 delegados de 94 países; en Sevilla' 1996, 3467 de 98; y en Makuhari' 2000, 2012 de 70. Es necesario destacar que, en el ICME 8, el grupo de trabajo 19 se dedicó al estudio de la formación inicial y permanente del profesorado. Los investigadores aquí reunidos señalaron un importante problema para futuras investigaciones: la necesidad de desarrollar en el maestro "una actitud más positiva hacia las matemáticas, una confianza creciente en la resolución y el planteamiento de problemas, y una habilidad para crear situaciones adecuadas para la resolución de problemas" (Carss et al., 1998, p. 190).

En América Latina ha sido constituido el CLAME (Comité Latinoamericano de Matemática Educativa) que ha organizado catorce eventos denominados "Relme" (Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa), cuyo principal propósito consiste en fomentar el intercambio científico regional, orientando sus acciones hacia el beneficio de los sistemas escolares de América Latina. Particularmente, en

[1] IMU (1987) *Statutes.* I, 1 (c), p. 1.

la República de Cuba, los primeros intentos por perfeccionar la enseñanza de la Matemática fueron realizados por la destacada pedagoga Dulce María Escalona, a mediados del siglo pasado. Sin embargo, “los vientos del modernismo que recorrieron el mundo en la década siguiente limitaron este esfuerzo, reorientándolo hacia la elaboración de nuevos programas y libros de texto para la asignatura” (Torres, 1996, p. v). Pocos años después, con el perfeccionamiento del Sistema Nacional de Educación, en la segunda mitad de la década de los 70, la enseñanza de esta asignatura experimentó un cambio sustancial, fundamentado sobre bases científicas sólidas y con una marcada orientación hacia el desarrollo de la personalidad de los alumnos.

A finales de los años 80 y principios de los 90, se llevó a cabo otra renovación de los planes de estudios y libros de texto para la Enseñanza Media, por parte de un experimentado grupo de pedagogos cubanos. Sin embargo, aún se continúa con el perfeccionamiento de los programas de estudio, así como del enfoque metodológico general. De hecho, en los actuales programas de secundarias básicas se aboga, entre otros aspectos, por “[l]a presentación y tratamiento de los nuevos contenidos *a partir del planteamiento y solución de problemas prácticos*, de carácter político–ideológico, económico–laboral y científico–ambiental, y no solo desde la propia lógica de la asignatura.”[3]

Un fuerte movimiento se ha desarrollado en todo el país a favor de la Matemática Educativa, contando con el apoyo del MINED (Ministerio de Educación) y de la SCMC (Sociedad Cubana de Matemática y Computación), hasta el punto de incluir la Matemática entre las asignaturas priorizadas. A juicio de Torres et al. (1998), este interés manifiesto por la Matemática Educativa puede explicarse a partir del fortalecimiento profesional de los profesores de Didáctica de la Matemática de los ISP (Institutos Superiores Pedagógicos), con alrededor de 20 años de experiencia; de la toma de conciencia sobre la necesidad de lograr una mayor integración entre los ISP y el subsistema de educación para el que forma profesionales; y del

[2] Véase ICMI (1997) *ICMI Bulletin*, Vol. 43, pp. 3–13.

[3] MINED (1999) *Programas de Matemática para las Secundarias Seleccionadas*, p. 1. (Las itálicas en el original.)

creciente vínculo de los investigadores cubanos con colegas iberoamericanos, en eventos científicos internacionales auspiciados por el MINED o por diferentes universidades del país.

Como se ha podido apreciar, en toda Iberoamérica se ha instituido un gigantesco sistema de investigación en Matemática Educativa. Esto podría significar que la didáctica de esta ciencia tiene resuelto el problema de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática, pero lamentablemente esto no es así. No sólo los informes de investigación están lejos de aportar una solvencia plausible a las problemáticas científicas que enfrentan, sino que los sistemas educacionales, como todo sistema complejo, ofrecen una fuerte resistencia ante cualquier vestigio de cambio. A propósito, los expertos del programa iberoamericano IBERCIMA han señalado que "[u]n análisis elemental sobre la situación general de la enseñanza de la matemática y las ciencias demuestra que esta es muy deficiente en la mayoría de los países del área […]" (Río et al., 1992, p. 14).

Es notable que en el ámbito educativo iberoamericano coexisten una amplia variedad de enfoques y corrientes, afines a la enseñanza de las ciencias y en especial a la Matemática. A título de ejemplo se puede mencionar el "Constructivismo", la "Enseñanza Problémica", la "Enseñanza por Problemas" y la "Etnomatemática", por solo citar algunas. Es una regularidad que, tanto las concepciones más radicales como las más eclécticas, preconizan el logro de un aprendizaje significativo; para ello se sirven, principalmente, de problemas matemáticos.

Halmos expresó su convencimiento de que "los problemas son el corazón de la Matemática"[4]. Así, en vista de que el contenido determina el método, de esta metáfora se infiere que también los problemas son "el corazón" de la Didáctica de la Matemática. Es justo destacar que, la tarea de formular problemas, puede llegar a ser tan difícil como la de resolverlos.

Para muchos autores (Pòlya, 1957; Nachtergaele, 1978; Mason et al., 1982; Smilansky, 1984; Zimmermann, 1985; Kilpatrick, 1987a y b; Labarrere, 1980 y 1988;

[4] Halmos, P. (1980) The heart of the mathematics. *American Mathematical Monthly*, Vol. 87, p. 524.

Brugman, 1991; Brown y Walter, 1990 y 1993; Silver, 1994–1997; Campistrous y Rizo, 1996; Yeap, 1996; Leung, 1993 y 1997; Pehkonen y Segarra, 1998; English, 1997–1998; Cudmore y English, 1998; Contreras y Martínez–Cruz, 1999; NCTM, 2000; English y Cudmore, 2000; Ratliff et al., 2001; Contreras, 2001; De Corte et al., 2001; Martínez–Cruz et al., 2001–2002) el hallazgo de nuevos problemas es una etapa cualitativamente superior de los procesos de resolución de problemas, y también un vehículo eficaz para potenciar el aprendizaje de la Matemática.

Particularmente, Kilpatrick enfatizó la importancia de formular problemas matemáticos, no solo como medio sino también como meta de la enseñanza. Él señala que "la experiencia de descubrir y crear por sí mismos problemas matemáticos siempre debería ser parte de la educación de los estudiantes" (1987a, p. 123). A propósito, el NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) en sus *Estándares Curriculares* plantea "[…] una meta mayor de la Matemática de la escuela media consiste en equipar a los estudiantes con conocimientos y herramientas que les permitan formular, abordar y resolver problemas más allá de aquellos que han estudiado […]. Ellos deben tener oportunidades para formular y refinar problemas, pues los que ocurren en el ambiente real no llegan puramente diseñados. Los estudiantes necesitan experiencia para identificar problemas y articularlos claramente, la suficiente como para determinar cuándo ellos han arribado a soluciones" (2000, p. 335).

Algo similar se promulga en las actuales transformaciones del enfoque metodológico de la Matemática Educativa cubana. Así, de sus cuatro objetivos generales, el último plantea: "Formular y resolver, con los recursos de la matemática elemental, problemas relacionados con el desarrollo político, económico y social del país y del mundo, así como con fenómenos y procesos científico–ambientales que les conduzcan a actitudes revolucionarias y responsables ante la vida".[5]

A pesar de su importancia, la formulación de problemas no ha recibido la atención requerida, como parte del currículo matemático (Kilpatrick, 1987, p. 123; English, 1998, p. 83), ni tampoco las investigaciones relacionadas con esta temática han sido

---

[5] MINED, ibíd., p. 3.

lo suficientemente sistemáticas (Silver, 1994, p. 19; 1996, p. 294). En Cuba, con las transformaciones del enfoque metodológico, los maestros se plantean dos interrogantes fundamentales: ¿cómo lograr que los alumnos planteen y resuelvan sus propios problemas? y ¿cómo evaluar el desarrollo de los procesos psicológicos asociados?. Ciertamente existen dificultades, pues no sólo los estudiantes están lejos de saber plantearse problemas, sino que los propios docentes (en general) carecen de recursos y motivación para incorporar esta tarea a su actividad pedagógica.

Un sinnúmero de hechos empíricos corroboran la necesidad de estimular el proceso de formulación de problemas, durante la formación del profesorado cubano. He aquí algunos de los más significativos:

1) Siempre ha sido muy baja la cantidad de problemas originales en las clases visitadas a lo largo del país, por parte de metodólogos e investigadores. Esta información ha sido constatada por el autor durante su participación en los talleres de Resolución de Problemas de los últimos tres congresos de la SCMC. Llama la atención la ausencia de datos estadísticos en muchos reportes de investigación. Una investigación exhaustiva que corrobora lo antes expuesto ha sido dirigida por Torres en La Habana (véase un resumen en Torres, 2000).
2) Estudios realizados en los ISP de Santiago de Cuba, Ciudad de la Habana y Holguín, revelan insuficiencias en el desarrollo del proceso de formulación de problemas, tanto del profesor en formación como del que se encuentra en servicio (cf. López et al., 2000; Fuentes, 2001; González, 2001b; Llivina et al., 2000; y el § 3.1 de esta tesis, originalmente reportado en Cruz y Álvarez, 2002).
3) Los resultados de las pruebas de ingreso a los Institutos Preuniversitarios Vocacionales de Ciencias Exactas y a la Universidad son, por lo regular, malos. Holguín figura entre los casos críticos, oscilando alrededor del 50% de promoción. Es notable que cuando los enunciados de las preguntas no aparecen en forma tradicional, los resultados obtenidos son todavía peores. Esto es una muestra de que los estudiantes no se enfrentan a problemas con enunciados y

enfoques diversos, lo cual presupone una búsqueda constante de problemas nuevos por parte del maestro.

A fin de deslindar el problema, es necesario observar primero una seria dificultad que experimenta una estructura cíclica. En efecto, de forma general, el estudiante no recibe una enseñanza que lo lleve a asumir una actitud activa, inquisitiva y perseverante ante la Matemática, pues el maestro no lo hace de manera implícita ni explícita. Este mismo estudiante matricula en los ISP, donde hasta hoy no se le ha transmitido tal actitud hacia la Matemática (tanto en las diferentes disciplinas como en las actividades de práctica laboral; véase Fuentes, 2001; cf. González et al., 2002).

A pesar de la elevada preparación de los claustros, no hay evidencia de acciones dirigidas a estimular el proceso de formulación de problemas al nivel de carrera. Sólo en el plan de estudio actual se ha planteado el objetivo de que el egresado sea capaz de enseñar a plantear y resolver problemas (véase el objetivo 22 en Ministerio de Educación, 2002). Sin embargo, la literatura no registra experiencias sobre cómo el futuro profesional puede aprender a formular problemas, y mucho menos cómo puede aprender a enseñar a hacerlo.

Finalmente, el egresado pasa a formar parte de aquellos profesores que iniciaron este comportamiento cíclico. Surge así la necesidad de romper la cadena por algún lugar. A juicio del autor, la cadena debe romperse en los ISP, pues el maestro en formación es más susceptible al cambio, en su modelo de actuación, que el maestro en ejercicio (Leung, 1993; Frykholm, 1996; Hodgson, 1996). Todo el análisis anterior conduce, en síntesis, a un importante **problema científico**: ¿Cómo favorecer el proceso de formulación de problemas, por parte del estudiante de Matemática–Computación en los ISP?

La presente investigación tiene como **objeto** el proceso de formulación de problemas matemáticos, por parte del estudiante de Matemática–Computación en los ISP. Este objeto determina, como **campo de acción**, las estrategias metacognitivas asociadas a dicho proceso. En consonancia con el problema planteado se define, como

objetivo central de este trabajo, elaborar una estrategia metacognitiva que favorezca el proceso de formulación de problemas, por parte del futuro profesional.

Para conducir la investigación se plantea la siguiente **hipótesis**: La puesta en práctica de una estrategia metacognitiva, compuesta por un sistema de acciones que facilitan la aplicación simultánea de diversas técnicas, favorecerá el proceso de formulación de problemas, por parte del estudiante de Matemática–Computación en los ISP. Para llevar a cabo este trabajo fue necesario cumplimentar las siguientes **tareas de investigación**:

1) Modelación del procedimiento de la actividad cognitiva, asociado a la elaboración de problemas, por parte del futuro profesional.
2) Determinación de indicadores que posibiliten la caracterización del proceso de formulación de problemas.
3) Elaboración de instrumentos que faciliten el análisis del proceso de formulación.
4) Elaboración de una estrategia que favorezca el proceso de formulación de nuevos problemas.
5) Elaboración de indicaciones metodológicas, dirigidas a viabilizar la enseñanza de la estrategia metacognitiva en los ISP.
6) Validación de la estrategia, a través de un experimento pedagógico formativo.

Los **métodos científicos** que han sido utilizados en el desarrollo del presente trabajo fueron determinados por el objetivo general, y por las tareas de investigación antes señaladas. Desde el punto de vista teórico, se emplearon los métodos de análisis–síntesis, inducción–deducción, análisis crítico de fuentes, e histórico–lógico. Todos de gran utilidad para el procesamiento de la información, el establecimiento del marco teórico–referencial, la determinación de criterios e instrumentos apropiados, y la elaboración de indicaciones metodológicas. También se hizo uso de la modelación, la cual permitió develar el contenido y la forma del proceso de elaboración de problemas, así como de la estrategia metacognitiva.

Por su parte, en un plano empírico fueron utilizados otros métodos, a fin de llevar a cabo el experimento formativo. Entre ellos se destacan la observación científica, la encuesta, la entrevista individual, y otros instrumentos diseñados específicamente para analizar los procesos de formulación de problemas. En el orden estadístico se aplicó el cálculo y razonamiento de estadística inferencial; la estadística descriptiva para las variables controladas; y las pruebas no paramétricas de Friedman (complementada con el procedimiento de Nemenyi), de Wilcoxon, y de Mann–Whitney (para rangos de signos). Durante el procesamiento de los datos cualitativos y cuantitativos se aplicaron los métodos de análisis–síntesis y el comparativo, los cuales son teóricos.

La **novedad teórica** de esta investigación reside en la elaboración de:

1) un modelo del procedimiento de la actividad cognitiva, asociado al proceso de elaboración de problemas escolares, por parte del estudiante de magisterio;
2) una estrategia metacognitiva que favorece el proceso de formulación de problemas, la cual se estructura en varias acciones y operaciones, e integra y sistematiza múltiples técnicas específicas.

La **significación práctica** de este trabajo consiste en:

1) la propuesta de una metodología, dirigida a evaluar el desarrollo del proceso de formulación;
2) la elaboración de indicaciones metodológicas para la enseñanza de la estrategia metacognitiva en los ISP.

La tesis está compuesta por tres capítulos. En el primero se establecen los presupuestos teóricos necesarios para la estrategia, esclareciendo la naturaleza del concepto problema y los complejos nexos que se establecen entre los procesos de formulación y resolución de problemas. También se introduce un elemento novedoso, al modelar la actividad que debe desarrollar el futuro maestro cuando elabore nuevos problemas, lo cual permite deslindar múltiples interrelaciones entre los procesos antes mencionados.

En el segundo capítulo se propone una estrategia metacognitiva que favorece la formulación de nuevos problemas, develando las acciones y operaciones que le son inherentes. También se establece una metodología que permite caracterizar el nivel de desarrollo del proceso de formulación, así como un conjunto de indicaciones metodológicas para la enseñanza de la estrategia en la carrera de Matemática–Computación.

Finalmente, en el tercer capítulo, se describe la realización de un experimento pedagógico formativo, en el cual se concreta la estrategia propuesta al primer año de la Carrera. Los resultados obtenidos, tanto en el orden cuantitativo como cualitativo, permiten afirmar que es posible aceptar como válida la hipótesis de investigación. Varios problemas abiertos irán emergiendo durante el transcurso de toda la tesis. Los de mayor relevancia serán declarados explícitamente, con el fin de trazar nuevos caminos para futuras investigaciones.

Los principales resultados de esta tesis han sido divulgados en varios congresos internacionales como "Pedagogía" (1995), "Compumat" (1997 y 2000), "Didáctica de las Ciencias" (2002) y "Relme" (2002); en los talleres internacionales "Comat" (1998) y "Dulce María Escalona *in memoriam*" (1996 y 1998); así como en varios eventos nacionales y regionales de la SCMC. Entre las principales publicaciones del autor, relacionadas con esta investigación, figuran:

1) "Sobre el planteo de problemas matemáticos." Revista electrónica *Órbita*, ISP "Enrique José Varona", La Habana, 1999.
2) "La resolución de problemas en la escuela. Algunas reflexiones." Revista argentina *Función Continua*, No. 8, Año I, pp. 21–42, 2000.
3) "Estrategias para la elaboración de ejercicios del Análisis Diofántico." *Biblioteca Virtual para los ISP*, No. 1, MINED, 2001.
4) "Evolución de la Didáctica de la Matemática." Revista argentina *Función Continua*, No. 12, Año II, pp. 23–41, 2001.
5) "La formulación de problemas para la enseñanza de la Matemática." *Actas del II Congreso "Didáctica de las Ciencias"* (disco compacto). MINED – Organización de Estados Iberoamericanos, 2002.
6) "Sobre la formulación de problemas matemáticos". Por aparecer en *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 16, t. 2*. Grupo Editorial Iberoamérica, México.

7) “Analogías en la formulación de problemas matemáticos.” Aprobado para ser publicado en la revista argentina *Función Continua*.
8) “La formulación de problemas para la enseñanza de la Matemática.” Dado a publicar en la revista española *ÉPSILON*, Sociedad “Thales” de Matemática.
9) “Las creencias acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática en la formación del profesorado. Manifestación y reestructuración.” Dado a publicar en la revista española *Enseñanza de las Ciencias*.

CAPÍTULO 1

EL PROCESO DE FORMULACIÓN DESDE LA PERSPECTIVA DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

1. EL PROCESO DE FORMULACIÓN DESDE LA PERSPECTIVA DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

La resolución de problemas constituye un importante campo de investigación dentro de la Matemática Educativa. Casi un siglo de investigaciones ha sido el preámbulo de un numeroso grupo de monografías que, hoy día, intentan sistematizar el "Estado del Arte" (Cruz y Aguilar, 2001). A diferencia de esto, la formulación de problemas no cuenta con una plataforma teórica que permita explicar el origen de los hechos y fenómenos afines.

Partiendo de una concepción pedagógica del concepto "problema", en el presente capítulo se enfoca el proceso de formulación como caso especial del proceso de resolución. De esta manera se establece un marco teórico–referencial que fundamenta la estrategia metacognitiva propuesta. Particularmente, se profundiza en el concepto "estrategia", se argumenta cómo la Enseñanza Problémica puede servir de ambiente de aprendizaje, y se modela la actividad que debe desarrollar el futuro maestro cuando elabore nuevos problemas para sus educandos.

§ 1.1 Los problemas matemáticos en la escuela

En el ámbito escolar los términos "ejercicio" y "problema" son empleados con singular frecuencia. Muchas veces este uso no va acompañado de una precisión clara, como observaron Río et al. durante un análisis de los objetivos curriculares de la enseñanza de la Matemática en Iberoamérica (1992, p. 75 y 166). A pesar de esto, hoy día el concepto "problema" ha sido tratado con suma profundidad en la literatura pedagógica y psicológica (Blanco, 1991; Wyndhamn, 1993; Santos, 1993 y 1994; D'Amore y Zan, 1996; Llivina, 1999; etcétera).

Es muy difícil iniciar un análisis de los conceptos anteriores sin hacer primero alusión a la "tarea docente", que constituye la célula del proceso docente–educativo, pues “en ella se presentan todos los componentes y las leyes del proceso y, además, cumple la condición de que no se puede descomponer en subsistemas de orden menor, pues al hacerlo se pierde su esencia: la naturaleza social de la formación de las nuevas generaciones que subyace en las leyes de la pedagogía” (Álvarez, 1999, p. 115). Según Garcés (2002), la tarea docente es un medio del proceso docente–educativo; y se caracteriza por interaccionar con todos los componentes de dicho proceso, por la variedad de enfoques que puede adoptar, y por estar dirigida esencialmente a la formación multilateral de la personalidad.

Los componentes esenciales de la tarea son el objetivo, el contenido y las condiciones. El primero es la representación anticipada de aquel resultado que habrá de ser alcanzado; y se proyecta, de acuerdo con el grado de trascendencia en la transformación que se aspira a lograr en el estudiante, en tres dimensiones: instructiva, desarrolladora y educativa (ibíd., pp. 80–84). El segundo engloba los tipos de acciones (identificar, comparar, clasificar, fundamentar, etcétera), y el objeto de las acciones (conceptos, proposiciones, procedimientos algorítmicos, medios heurísticos, etcétera).

Las terceras, desde el punto de vista cuantitativo, abarcan la frecuencia y la periodicidad de las acciones y operaciones que requiere la tarea, no solo de manera puntual sino también bajo la óptica del sistema de tareas. Desde el punto de vista cualitativo se pone de manifiesto el nivel de complejidad de la ejecución de las acciones y operaciones, así como la flexibilidad expresada en el grado de variabilidad del contenido y del contexto de la propia actividad (Bermúdez y Rodríguez, 1996, p. 8). El componente cualitativo de las condiciones también comprende la disposición del sujeto, su estado afectivo hacia la tarea, así como el modo en que esta tarea potencia la movilización de sus recursos volitivos (puede resultar gradualmente agradable o no, interesante o no, novedosa o no, etcétera).

Es necesario señalar que en la tarea docente el objetivo se personifica, por cuanto cada estudiante puede seleccionar tareas distintas, a fin de cumplimentar un mismo objetivo; o bien, ante una tarea difícil, escoger otra más sencilla cuya resolución le permita retornar y resolver la inicial mejor preparado. Como ejemplo de tarea docente figura el ejercicio, en el cual se plantea una exigencia que propicia la realización de acciones, solución de situaciones, deducción de relaciones, cálculo, etcétera. El trabajo con ejercicios no sólo constituye el medio fundamental para la realización de los objetivos de la enseñanza de la Matemática, sino también el instrumento adecuado para la medición del rendimiento de los estudiantes. El éxito de la enseñanza de la Matemática no solo depende de cuáles ejercicios se plantean, sino también de cómo el profesor dirige su proceso de resolución.

Existen muchas clasificaciones de ejercicios matemáticos (Zillmer, 1981, pp. 156–159; Slepkan, 1983, p. 129; y Blanco, 1991, pp. 61–66). Una de ellas fue propuesta por Borasi (1986; citada por Blanco, 1991), la cual denomina sencillamente por "ejercicios" a aquellas tareas que pretenden desarrollar algún tipo de algoritmo. Si se trata de un texto formulado con precisión, donde aparecen todos los datos necesarios para obtener la solución, entonces la tarea se denomina "problema con texto". Cuando el contexto descubre el potencial recreativo de la Matemática, obligando al sujeto resolvente a ser flexible y considerar varias perspectivas, la tarea se denomina "problema puzzle". En este último caso la formulación puede resultar engañosa, y la solución no tiene necesariamente que suponer procesos matemáticos.

Otra tarea que considera esta autora es la "prueba de conjeturas" refiriéndose, por ejemplo, a la demostración de un teorema o de cierta propiedad matemática. También habla de "problemas de la vida real" que suponen tres procesos básicos: la creación de un modelo matemático de la situación, la aplicación de técnicas matemáticas al modelo, y la traducción a la situación real para analizar la validez de la solución. Borasi también destaca las "situaciones problémicas", en las cuales el sujeto se enfrenta ante un nuevo resultado matemático sin disponer de toda la información necesaria. En las situaciones problémicas la formulación es regularmente vaga, puesto que en este caso se tratan de establecer nuevas conjeturas; los métodos de aproximación suelen ser diversos; y la exploración del contexto, así como las sucesivas formulaciones del problema, son fundamentales. Por último, Borasi considera aquellas tareas que facilitan la formulación de conjeturas por parte del alumno, a estas últimas las denomina “situaciones”. Blanco (1991) aporta el siguiente ejemplo de situación: *Considérense algunas triplas pitagóricas: (3, 4, 5); (5, 12, 13); (8, 15, 17); … ¿Cumplen alguna regularidad?* Esta interrogante puede suscitar varias conjeturas, tales como: “en cualquier trío existe un múltiplo de 3 y otro de 5”, “existe exactamente un número par”, “existe al menos un número primo”, etcétera.[6]

Como puede apreciarse, la clasificación aducida por Borasi no solo es interesante, sino que también cubre una amalgama de ejercicios matemáticos. Sin embargo, es necesario realizar algunas observaciones. En primer lugar, no se esclarece la base para la división del concepto, aun cuando se conoce que en estos casos suele ser poco precisa. Así, por ejemplo, es posible encontrar un sinnúmero de “problemas con texto” cuyo propósito fundamental consiste en desarrollar algún tipo de algoritmo, o bien cuya formulación es difícil de interpretar a causa de la complejidad semántica. También estos mismos problemas pueden constituir “puzzles” o bien estar referidos a “la vida real”, en virtud de su nivel de contextualización. En segundo lugar, no queda clara la diferencia entre ejercicios y problemas; tal parece que los más abundantes en la enseñanza de la Matemática son los segundos y ciertamente esto no es así. No es posible negar el valor de los ejercicios destinados a estimular la identificación y fijación de los conceptos, ni tampoco los que facilitan el desarrollo de ciertas habilidades.

Jungk (1981) elaboró una clasificación de los ejercicios tomando como base el grado de abstracción en el reflejo de los elementos y relaciones, así como el tipo de reflejo que se realiza. Como superconcepto, este autor eligió el concepto ejercicios matemáticos planteados a los alumnos; a este lo subdivide en dos conceptos subordinados: ejercicios de aplicación (tienen su origen en la práctica) y ejercicios construidos (aquellos que se conciben con fines didácticos; o sea, para ejercitar, profundizar, aplicar, asegurar las condiciones previas, entre otras).

---

[6] La primera proposición es verdadera, la segunda subsiste sólo en el caso de ternas primitivas, y la tercera queda descartada al considerar otros casos más. Véase Sierpinski, W. (1964) *Elementary Theory of Numbers*, Polska Academic Nauk, Warsaw.

Los ejercicios construidos sufren a su vez otra división. Por una parte aparecen los ejercicios formales, cuya principal singularidad consiste en que el estudiante identifica rápidamente de qué se trata (la “formalidad” se refiere al formalismo matemático, o sea: una ecuación, un sistema, una identidad, etcétera). Por otro lado aparecen los ejercicios con textos, conformados por aquellos cuyo texto es puramente matemático o bien se relaciona con la práctica.

Con relación a su clasificación, el propio Jungk señala que las fronteras existentes entre los distintos grupos son movibles. Por ejemplo, tanto en los ejercicios con textos relacionados con la práctica, como en los de aplicación, el ejercicio matemático no desempeña el papel de primer lugar. Por su parte, los ejercicios con textos matemáticos y los de textos relacionados con la práctica no son conceptos completamente disjuntos, sino que también se solapan pues los primeros suelen ser “formas preliminares” de los segundos; además, en ambos casos debe analizarse inicialmente el texto para hallar el modelo matemático (Jungk, 1981, pp. 109–110, cf. Zillmer, 1981, pp. 156–157).

También es posible clasificar los ejercicios matemáticos atendiendo a la intención didáctica definida en el objetivo. Así resultan los ejercicios para la introducción, la fijación (ejercitación, repaso, sistematización), la aplicación, etcétera. Sin embargo, la clasificación más sencilla se consigue tomando su estructuración lógica como base para la división del concepto. De esta manera resultan dos tipos de ejercicios: los de determinación, encabezados tradicionalmente por las órdenes “calcula”, “resuelve”, “efectúa”, …; y los de decisión, encabezados por “demuestra que”, “refuta”, “analiza si es verdadero o falso”, … (Zillmer, 1981, p. 158). En lo adelante se hará uso de esta clasificación, no solo por su sencillez, sino también por el amplio espectro de ejercicios que comprende dentro de la escuela cubana. No obstante, cuando sea necesario se utilizará también la clasificación de Jungk, especialmente para referirse a los ejercicios con texto.

Partiendo del concepto de ejercicio, es posible caracterizar qué se entiende por problemas matemáticos en el contexto escolar. Según Labarrere (1996) algunos autores conceptúan los problemas en términos de contradicción que debe ser resuelta, de déficit y búsqueda de información, de transformación de situaciones, etcétera. Es notable que ya en el siglo XVII el genial matemático y filósofo francés Descartes, en la regla XII de sus *Regulae ad directionem Ingenii*, afirmaba: “Yo no supongo más que los datos y un problema. Sólo en esto imitamos a los dialécticos: así como para enseñar las formas de los silogismos ellos suponen conocidos sus términos o materia, de la misma manera nosotros exigimos previamente que el problema sea perfectamente comprendido. Pero no distinguimos, como ellos, dos extremos y un medio, sino que consideramos el problema entero así: 1°, en todo problema debe haber algo desconocido, pues de lo contrario no habría problema; 2°, ese algo debe estar designado de alguna manera, pues de otro modo no habría razón para investigar ese algo y no otra cosa; 3°, ese algo no puede estar designado sino por algo conocido.”[7]

D’Amore y Zan (1996) han observado diferencias sustanciales entre la concepción de “problema” sostenida por matemáticos, psicólogos y pedagogos. En el primer caso el énfasis se pone en el propio problema, subrayando su importancia dentro de la comunidad matemática; en el segundo se destaca que este es un producto de la mente humana, resaltando la existencia de una meta y el desconocimiento de un procedimiento para alcanzarla; por su parte, en el tercero se trata de mediar entre las posiciones extremas anteriores, premisa necesaria durante la inserción del problema en el marco escolar. En el presente trabajo se asume esa posición intermedia, donde el foco de atención es el estudiante. Desde esta perspectiva se aspira a lograr un desarrollo cognitivo, así como el establecimiento de un vínculo afectivo y motivacional por la Matemática.

Antes de caracterizar el concepto “problema” es necesario esclarecer algunas cuestiones epistemológicas, relativas a la Psicología y la Matemática. Respecto al quehacer matemático, subsisten dos concepciones fundamentales. La primera supone que la resolución de problemas va dirigida a comprender mejor la

[7] El término “dialécticos” sustituye a los representantes de la silogística aristotélica, los cuales esgrimían el arte de discutir como arma de argumentos. Véase Descartes, R. (1701/1971) Reglas para la dirección del espíritu. En: *Obras de Renato Descartes* (pp. 301–362). Ciencias Sociales, La Habana.

Matemática. Por su parte, la segunda asume que la comprensión de esta ciencia consiste en poder llegar a resolver mejor los problemas.

A juicio del autor, esta visión engloba un amplio espectro de la actividad matemática, pero todavía requiere de un análisis más profundo. Según Gowers, a pesar de que ambos postulados "tienen algo de verdad", para varios eminentes matemáticos (como Atiyah) hacer matemáticas no supone una meta en particular, excepto "la meta de comprender la Matemática" (Gowers, 2000, p. 66).

Ernest (1989, p. 21) identifica tres concepciones generales que repercuten en la enseñanza y en el aprendizaje de la Matemática: la platónica, la instrumental y la de resolución de problemas. En esta tesis se enfatiza esta última, por considerar la Matemática como una disciplina dinámica y cambiante, la cual está en constante desarrollo y reajuste ante las nuevas situaciones problémicas (Díaz y Batanero, 1994). Esto no significa que se niegue el papel instrumental de esta ciencia, reflejado en el desarrollo de habilidades para resolver problemas de la vida práctica, para usar ágilmente el lenguaje simbólico, los procedimientos y algoritmos, y para desarrollar el pensamiento lógico–formal (cf. Ministerio de Educación Nacional, 1998, pp. 22–25; Sierpinska, 1998, p. 1). Además, el significado de los objetos matemáticos debe verse en su triple dimensión: institucional, personal y temporal. Este hecho justifica que un mismo problema puede aparecer durante la realización de objetivos docentes o científicos, llevar el sello personal de su autor, a la vez que su relevancia adquiere magnitud variable atendiendo a la época y al contexto sociocultural donde surge.

Otro aspecto importante, relativo a la filosofía de la Matemática, dimana de la interrogante: ¿todo problema tiene solución?. En vista de que todo el conocimiento matemático refleja propiedades intrínsecas de la realidad objetiva, la respuesta estará condicionada por la conocida controversia entre los representantes del materialismo dialéctico –quienes afirman que el mundo es cognoscible– y los agnósticos –quienes afirman que o bien no se puede conocer o, al menos, no se sabe qué se puede y cuándo se conoce–, lo cual constituye un tema básico de la epistemología. Como muestra de este problema en Matemática, el intuicionista Brouwer solía "demostrar" la inconsistencia de los razonamientos basados en el infinito actual mediante un ejemplo, relativo al desarrollo decimal del número π. Él afirmó que era imposible decidir si en dicho desarrollo aparecían diez novenas seguidas. Sin embargo, en la Universidad de Columbia, tras calcular más de mil millones de cifras de π con una computadora CRAY–2, se observó que desde el lugar 762 hasta el 767 existen seis novenas seguidas (*Guinness Book of Records*, 1992).

Por otro lado, el formalista Hilbert profirió: “Esta capacidad de resolver cualquier problema matemático es un fuerte incentivo para nuestro trabajo. Oímos resonar siempre en nuestros oídos el siguiente llamamiento: este es el problema, busca su solución. La puedes encontrar con el pensamiento puro, ya que en Matemática no existe el *ignorabimus*.”[8] Desde la posición del materialismo dialéctico, se asume la tesis de Hilbert, pero esto no indica que se niegue la posibilidad de que, en determinado momento histórico, no estén dadas las condiciones objetivas y subjetivas para resolver un problema (*ignoramus*), como lo fue el teorema fundamental del Álgebra hasta los tiempos de Gauss.[9]

Desde la perspectiva psicológica, se asume el enfoque histórico–cultural de Vîgotskiy (1982), destacando la naturaleza social del desarrollo psíquico del hombre, así como la unidad entre psiquis y actividad. El principio fundamental que sustenta este enfoque consiste en que los procesos mentales pueden nacer en la actividad planificada, para luego convertirse en órganos funcionales de la propia actividad. Sin embargo, en el contexto escolar no todo se puede enseñar, pues el desarrollo no depende directa y linealmente de la enseñanza aunque esta, en última instancia, conduzca al desarrollo.

Uno de los principales aportes de la obra de Vîgotskiy consiste en la noción de “Zona de Desarrollo Próximo” (ZDP) que expresa la relación interna entre la enseñanza y el

[8] Histórico discurso pronunciado en el II congreso de la IMU, París, 8 de agosto de 1900. Tomado de *Fundamentos de la Geometría*. Apéndice X, CSIC, Madrid, 1991.

[9] La publicación del primer teorema de Gödel, en 1931, sacó a colación la existencia de límites ontológicos en cualquier axiomatización. Una consecuencia metodológica muy peculiar consiste en la existencia de proposiciones indemostrables e irrefutables en el marco de sistemas formalizados. La autenticidad de tales afirmaciones sólo puede ser constatada por vías no formales, lo cual no niega la afirmación de Hilbert. De todas formas, los teoremas de Gödel echaron por tierra el programa formalista de este matemático alemán.

desarrollo. En su versión clásica, este concepto se caracteriza por la necesidad de una relación asimétrica novato–experto, como génesis (en el primero) de los procesos psicológicos superiores; y también por la aparición de una potencialidad, como emergente de esta relación. Aquí se manifiesta la ley genética del desarrollo, que postula que todo proceso psíquico aparece dos veces: primero en una relación interpersonal, después como dominio intrapersonal.

Junto a la interpretación clásica, actualmente se han dado otras dos interpretaciones de la ZDP (véase Corral, 1999). En una se parte de la distancia entre los conceptos cotidianos y los conceptos científicos, explorando el camino de unos a otros; en la otra se identifica la diferencia entre sujeto individual y sujeto colectivo, y la posibilidad de crear nuevas extensiones a la cultura. Las tres formas son aceptables, pero aún requieren una mayor precisión conceptual y metodológica. Por ejemplo, para poder comprender profundamente la categoría de ZDP hay que relacionarla, de manera plena e integrada, con el concepto "Situación Social de Desarrollo". La separación de este par dialéctico conduce a una interpretación abstracta y limitada de la ZDP, pues se pierde de vista el complejo sistema de influencias y autoinfluencias que actúan sobre el estudiante antes y después de la clase (Fariñas, 1999, p. 232).

En el presente trabajo se es consecuente con la primera noción de ZDP, en la cual cada estudiante debe trabajar sobre las fronteras de su propio conocimiento, pues el principal propósito consiste en estimular la puesta en práctica de una estrategia metacognitiva durante la formulación de nuevos problemas, lo cual demanda una actividad cognoscitiva compleja.

En la figura 2 Gallimore y Tharp (1990; citado por Wyndhamn, 1993, p. 25) ilustran el progreso experimentado al pasar de la ayuda externa a la interna (niveles I y II). Una vez que el contenido ha sido asimilado, nuevos motivos impulsan al sujeto a continuar su desarrollo cognoscitivo, requiriendo nuevamente de ayuda. En la medida que este proceso tiene lugar, el novato dependerá menos del experto, de manera que el lazo recurrente tenderá gradualmente hacia el nivel II (lo cual no niega posibles regresiones). Bajo esta concepción es posible comprender los mecanismos de desequilibrio y reacomodo vistos por Piaget, pues el primero puede ocurrir durante el tránsito III–IV al surgir una nueva situación problémica, en tanto el segundo resulta de la transición II–III. De esta manera es posible concebir el desarrollo como un proceso que, en sí mismo, genera desarrollo.

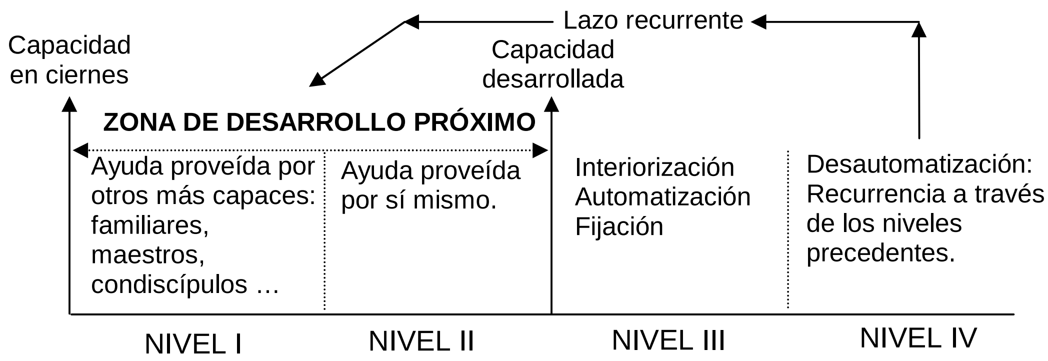


Figura 2. *Génesis del desarrollo cognoscitivo humano.*

La transición por los cuatro niveles y la iteratividad del lazo pueden ilustrarse de muchas maneras. Por ejemplo, en la medida que el alumno se apropia del concepto función, la consideración de nuevas correspondencias le facilitará el estudio de nuevas propiedades. El trabajo sobre la ZDP puede verse tras el desequilibrio que ocasiona la existencia de entes desconocidos. Así ocurre con las funciones exponenciales en onceno grado, al considerar la posibilidad de variar el exponente de a^b para valores constantes de la base (situación problémica que propicia el tránsito IV–I).

En esta ocasión el alumno dependerá menos de la ayuda externa, por cuanto su experiencia acumulada durante el estudio de otras funciones le llevará de inmediato al análisis de varias propiedades. Inclusive, puede llegar a observar el acercamiento asintótico que experimenta el gráfico, lo cual constituye una nueva propiedad (tendencia del lazo hacia el nivel II). La ejercitación subsiguiente facilitará la fijación del concepto (nivel III). No obstante, en la misma unidad temática ocurrirá un nuevo desequilibrio, al emerger la necesidad de abordar la función logarítmica como inversa (nuevamente el tránsito IV–I, pero cualitativamente superior).

En consonancia con lo anterior, el problema matemático no debe ir orientado hacia el nivel actual de desarrollo del escolar, sino hacia la ZDP. La situación inicial del problema (lo dado) debe estar concebida para el nivel actual, pero la situación final (lo buscado) junto con el proceso de resolución (que es desconocido por naturaleza) deben generar desarrollo. En la propia actividad de formulación de problemas se pone de manifiesto que la relación asimétrica novato–experto puede tener dos interpretaciones fundamentales: el alumno guiado por otros (el maestro, sus compañeros más aventajados, …) y el alumno guiado por sí mismo. Es por ello que se deben considerar dos aspectos esenciales: uno subjetivo, asociado a una necesidad que alguien experimenta y que no ha podido satisfacer; y otro objetivo, asociado a un objeto cuya situación actual no posibilita aprovecharlo para satisfacer dicha necesidad (Álvarez, 1999, p. 86).

Resumiendo: un problema es aquella situación que se caracteriza por la existencia de una persona (o grupo) que desea resolverla, de un estado inicial y otro final, y de algún tipo de impedimento para el paso de un estado a otro (cf. Blanco, 1991, p. 61; Wyndhamn, 1993, pp. 29–31; Santos, 1994, p. 31; Labarrere, 1996, p. 6; Álvarez, 1999, p. 86). Esto permite comprender que en el ámbito escolar un ejercicio (o en general cualquier tarea docente) será problema si el paso del estado inicial al estado final implica que el estudiante experimente un desarrollo cognitivo, al trabajar sobre su ZDP.

Con esta descripción se comprende que lo que resulta un problema para un sujeto puede no serlo para otro (carácter relativo). Cada problema constituye un reto, se desconoce tanto la vía de solución como el tiempo que demorará solucionarlo. No obstante, se necesita confiar en que la inteligencia y habilidades que se poseen son adecuadas y suficientes para abordarlo. Resolver un problema consiste en el proceso de ataque, en el abordaje del mismo por parte del sujeto. Aun cuando el sujeto resolvente no disponga de la idea de solución, se entenderá que si se encuentra enfrascado en hallar una respuesta, se encuentra resolviendo el problema.

Como se ha podido apreciar, el principal atributo que distingue el problema del resto de las tareas docentes, estriba en el desconocimiento de un procedimiento de resolución por parte del sujeto. Aquellos ejercicios que no sean problemas serán denominados “rutinarios”, siguiendo a Pòlya (1957). Por ejemplo, es posible hablar de ejercicios rutinarios con texto o de problemas con textos (no en el sentido de Borasi, sino en el de Jungk; véase ibíd.). Además, al demostrar una equivalencia, subsiste la posibilidad de que se enfrente un problema formal en un sentido y un ejercicio rutinario formal en el otro.

Existen muchas clasificaciones de problemas que responden a diferentes criterios (véase Slepkan, 1983, p. 123; Perales, 1995, p. 78), pero la más aceptada en el ámbito científico es la escisión en abiertos y cerrados, la cual toma como criterio la representación mental que el sujeto se hace de la información brindada por el problema. Los problemas cerrados se caracterizan por expresar lo dado y lo buscado con suficiente exactitud. En general, la mayoría de los problemas propuestos en los textos escolares presentan esta estructura. Posamentier y Stepelman proponen el siguiente ejemplo en el cual, a fin de optimizar el procedimiento de solución, conviene utilizar tanto la implicación aducida como su contrarrecíproco:

Un especialista en control de la calidad afirma estar muy seguro de que todos los platos de metal manufacturados, con una vocal impresa sobre una cara, poseen un número par tras la otra. Se tienen cuatro platos sobre la mesa, de manera que cada uno de ellos muestra una sola cara visible. En el primero aparece una A, en el segundo una N, en el tercero un 5 y en el cuarto un 6. ¿Cuáles deben ser volteados, para estar seguros de que la regla ha sido seguida? (1996, p. 126; con ligeras modificaciones en el planteo).

Por el contrario, en los problemas abiertos la situación inicial y/o la meta a alcanzar no se precisan con suficiente claridad. Por este motivo, tales problemas son susceptibles de diferentes interpretaciones o diferentes respuestas aceptables (Pehkonen, 1995, p. 56). Los problemas abiertos se aproximan mucho a lo que sucede en la vida real; hay que hacer consideraciones para la respuesta, pues no se da toda la información necesaria. Por este motivo, suelen denominarse “problemas sin los datos necesarios”. Un ejemplo es el caso de una persona que debe descubrir un procedimiento, que le permita distribuir entre tres personas, en forma equitativa, las dos casas que han recibido como herencia.

Campistrous y Rizo, aportan un ejemplo muy sencillo del ámbito escolar: *Se quiere construir un tanque de agua con una capacidad de 8000 L. ¿Qué dimensiones debe tener?* Evidentemente existen condiciones que no están dadas, como la forma del tanque que puede ser ortoédrica, cilíndrica, etcétera; y la cantidad de material disponible, pues se gasta más o menos, en dependencia de la forma y dimensiones escogidas (1996, pp. 92–93). Silver considera razonable enmarcar, dentro del conjunto de los problemas abiertos, aquellos que “invitan” a desarrollar diferentes métodos de solución, o bien aquellos cuya resolución “sugiere” otros problemas o generalizaciones (1995, p. 68). Esto es permisible, pero es esencial que la tarea declare el objetivo de realizar tales acciones. Así, a título de ejemplo, un problema abierto puede ser: *Demostrar de tres formas diferentes el teorema de Pitágoras.*

Desde la perspectiva pedagógica es posible señalar otros aspectos importantes que tienen los problemas en el orden axiológico y metodológico. En general el trabajo con problemas desarrolla un conjunto de rasgos y cualidades de la personalidad, reflejados en la voluntad, los sentimientos y emociones, así como en las convicciones de los estudiantes. Por ejemplo, en los problemas con texto se describen objetos y fenómenos de la realidad, lo cual constituye una vía para poner al alumno en relación con situaciones del quehacer cotidiano, en particular con la vida nacional, social, productiva, política, etcétera.

La resolución de problemas facilita la asimilación de nuevos conocimientos (sociales, éticos, jurídicos, políticos, económicos, …) y desarrolla formas peculiares de interrelación con la sociedad y el medio ambiente. Por otra parte, la enseñanza de los problemas también permite asimilar conocimientos acerca de las relaciones cuantitativas existentes entre las distintas esferas de la realidad; proporciona la asimilación de los conocimientos matemáticos, lo que propicia que el alumno se oriente en el mundo, lo comprenda y adopte puntos de vista peculiares (simbolización) de los objetos, hechos y fenómenos en el lenguaje propio de la

Matemática; y también propicia el desarrollo del pensamiento de los alumnos en particular el lógico, el científico y el teórico (López et al., 2000, p. 3).

§ 1.2 Estrategias metacognitivas en la resolución de problemas

Algunos autores consideran que la formulación de problemas es un signo distintivo del estadio postformal (aproximadamente después de los 20 años, en términos piagetianos; Martín, 1999), otros defienden que su surgimiento está condicionado por el desarrollo de la capacidad para resolver problemas (Walter y Brown, 1977; Zimmermann, 1985; Leung, 1993; De Corte et al., 2001), de manera que un individuo puede ser capaz de problematizar la realidad aún en etapas tempranas de su vida (Campistrous y Rizo, 1996; Labarrere, 1996).

El análisis de los resultados teóricos y empíricos de estos autores conduce a que en este trabajo se comparta el segundo criterio. Por tanto, se considera que el proceso de formulación de problemas matemáticos puede desarrollarse desde los primeros grados, y que un ambiente propicio para lograrlo es el que enfatiza la resolución de problemas. En sentido general, la capacidad para plantear problemas (en una pluralidad de ámbitos de la vida cotidiana) es inhibida por la sociedad desde la edad preescolar, cuando los adultos no contestan adecuadamente o creen tener la respuesta definitiva en la edad de los “¿por qué?”.

A mediados del siglo pasado Duncker observó que la resolución de un problema consiste en una sucesiva reformulación del mismo (On Problem–Solving, *Psychological Monographs*, Vol. 58, 1945). Esta misma idea aparece de forma implícita en la obra de Pòlya (1957), cuando sugiere “pensar en un problema relacionado” como procedimiento heurístico para resolver problemas. En general, la formulación puede ocurrir antes, durante o después de la resolución de un problema (Silver, 1994 y 1995).

La resolución de problemas matemáticos tiene una historia tan larga como la propia Matemática, y se remonta a culturas muy antiguas como la egipcia, la babilonia y la china. En Cruz y Aguilar (2001) se muestra cómo la evolución de la Didáctica de la Matemática se erige a través de estudios relacionados con los procesos de resolución de problemas. Particularmente, las investigaciones sobre el acto de creación matemática comienzan en el Renacimiento, con los tratados cartesianos *Discours de la Méthode* y *Regulae ad Directionem Ingenii*.

En el primero, Descartes comienza narrando cuándo, dónde y cómo arribó a sus ideas, para luego exponer de manera concentrada (en cuatro preceptos) su método; destacando la existencia exclusiva de las "actas del entendimiento", por medio de las cuales es posible llegar al conocimiento de todas las cosas: la intuición y la deducción. En el segundo, el gran pensador explica a los "mortales corrientes" cómo ellos podrían pensar como él, y cómo, siguiendo ciertas reglas, podrían resolver problemas tal y como él lo hizo. La utopía de su gran proyecto descansaba sobre un plan muy simple: reducir cualquier problema algebraico a la resolución de una ecuación simple, reducir cualquier problema matemático a otro algebraico, y reducir cualquier problema a un problema matemático.

No es hasta la primera década del siglo XX que surgen los aportes de Poincaré. En su *Science et Méthode* distingue cuatro fases dentro del acto creativo: saturación (actividad consciente que implica trabajar con el problema hasta donde sea posible), incubación (el subconsciente es el que trabaja), inspiración (la idea surge repentinamente como un "flash"), y verificación (chequear la respuesta hasta asegurarse de su veracidad). A decir verdad, la historia relata muchas anécdotas que, en parte, coinciden con lo anterior. Por ejemplo, el descubrimiento de la estructura anillada del benceno, cuando Kekulé soñó con una serpiente mordiéndose la cola (incubación); y el problema referido a la corona del rey Herón, que condujo al "eurêka" arquimedeano (inspiración).

Poco después Hadamard en *An Essay on Psychology of Invention in the Mathematical Field* prosigue el punto de vista de Poincaré, resaltando también la actividad consciente, la reflexión y el trabajo inconsciente. En su época estas ideas fueron bastante progresistas, pues intentaban explorar los procesos que ocurren en el cerebro humano durante la resolución de un problema. Ya no se trataba de describir ciertas reglas para conducir el pensamiento, sino de explorar el pensamiento mismo. Sin embargo, el método que utilizaban era la introspección, el cual tiende a ser poco confiable (Cruz y Aguilar, 2001, pp. 29–30).

A finales de los años 50 sale a la luz la edición más conocida de *How to Solve It…*, de Pòlya. En ella hay que destacar el aislamiento de cuatro fases durante la resolución de un problema matemático: comprensión del problema, concepción de un plan, ejecución del plan y visión retrospectiva. En cada una Pòlya propone una serie de reglas y procedimientos heurísticos bastante sugerentes, pero lo más notorio consiste en que la mayoría van dirigidas a la segunda fase (concepción del plan) de lo que él denominó su "lista". Por tanto, por primera vez las pesquisas eran dirigidas hacia las fuentes de la inspiración poincareana. Entre estas preguntas figuraban las siguientes: ¿conoces un problema semejante?, ¿podrías enunciar el problema de otra forma?, ¿has considerado todas las nociones esenciales concernientes al problema?, principalmente.

En todo el libro las reglas y procedimientos reciben un uso sistemático; muchos de ellos tienen raíces cartesianas como "descomponer y recomponer el problema" y "dibujar un diagrama".[10] Aunque el alcance de esta obra se vio limitado al modesto enfoque de la heurística, por primera vez se deslindaron algunas estrategias específicas que emergen durante la resolución de un problema matemático. Sin embargo, estas eran "más descriptivas que prescriptibles", por cuanto no se detalla lo suficiente cuándo hacer uso de ellas (Schöenfeld, 1992, p. 353).

Un estudio de Contreras y Carrillo (2000, p. 19) revela que la idea de Pòlya de separar las fases para su estudio (no "pasos" como erróneamente se le ha interpretado) tiene su origen mucho antes de *How to Solve It…*. Según una separata del Órgano de los Círculos Matemáticos de Estudiantes, tomo III, números 1, 2 y 3 (1934), Pòlya pronunció una conferencia en Zurich en 1931 bajo el título "Cómo buscar la solución de problemas matemáticos"; en las páginas 23 y 24 se publica un extracto de la misma, en la que se enuncian cuatro fases y algunas sugerencias (heurísticos) para progresar en cada fase. Es más, lo original y práctico de Pòlya son las sugerencias, pues la consideración de fases en la resolución de problemas, no exclusivamente matemáticos, puede verse en *How we Think* de J. Dewey en 1910.

[10] Cf., respectivamente, la regla XIII y luego las reglas XIV y XV en Descartes, op. cit.

Durante toda esta época el término “problem–solving” nunca había sido tratado en los congresos del ICMI, pues casi todos los artículos enfatizaban el análisis curricular. Esto se acentuó significativamente entre 1957 y 1977 con la “New Math”. No es hasta el ICME 4 (Berkley’ 1980) que apareció incluido bajo la modesta categoría de “aspectos poco comunes en los planes de estudio”. A tenor del efecto “back to basic”, en el ICME 5 (Adelaida’ 1984) la resolución de problemas fue uno de los principales temas abordados; desde entonces siempre ha sido así (Budapest’ 1988, Quebec’ 1992, Sevilla’ 1996 y Makuhari’ 2000).

Los principales aportes en materia de “problem–solving” han acaecido en los últimos cuatro lustros, coincidiendo con disímiles reformas curriculares que enfatizan la resolución de problemas como habilidad, arte o vehículo de aprendizaje (Santos, 1994, p. 67). Ciertos estudios han llegado a identificar hasta siete paradigmas diferentes, comenzando por los más conductistas hasta llegar a los “momentos didácticos” de Chevallard, donde todo problema es el punto de partida para un virtual campo de problemas (Gascón, 1994, p. 38 y ss.). La actual pluralidad de criterios dificulta una historiografía de este último período, así como la elaboración de un marco teórico–referencial. Partiendo de la concepción de problema que se ha asumido en el epígrafe anterior, es posible caracterizar el proceso de resolución. Para lograrlo es necesario apoyarse en el concepto de cognición.

La mayor parte de los especialistas entienden que el significado de la cognición alude al conjunto de actividades a través de las cuales la información es procesada por el sistema psíquico. Se acepta así que el término cognición comprende toda una serie de procesos mentales que realizan los seres humanos para adquirir, retener, interpretar, comprender, organizar y utilizar tanto la información existente en el medio que les rodea, como la propia información ya adquirida y almacenada. De este modo, la cognición incluye los procesos de percepción, atención, imaginación, lenguaje, memoria, creatividad, pensamiento, inteligencia y resolución de problemas. Pero no sólo los procesos cognitivos sirven para procesar la información, también para construir representaciones de la realidad y para crear conocimiento. Este término se refiere tanto al sistema de procesamiento de la información, como al contenido procesado y al resultado del proceso, es decir, al conocimiento (Martín, 1999, pp. 129–130).

Schöenfeld identificó cuatro componentes esenciales de la cognición, relativos a la resolución de problemas (cf. 1985, p. 44 y 1992, p. 348). En primer lugar los **recursos**, que comprenden todo el conocimiento matemático que posee el individuo y que se activa al trabajar con los contenidos específicos del problema. Esto comprende la experiencia, la intuición, los teoremas, las definiciones, los procedimientos (algorítmicos o no), las rutinas, y el conocimiento proposicional acerca de las reglas inherentes al dominio.

En segundo lugar aparece la **heurística**, referida a las técnicas y estrategias para solucionar problemas no tradicionales como “dibujar un diagrama”, “confeccionar una tabla”, “buscar problemas relacionados”, “ensayo–error”, “establecer metas intermedias” y “trabajar hacia atrás” (véase Nunokawa, 2000, pp. 93–105). Según Schöenfeld (1985, p. 23), las estrategias heurísticas son “aproximaciones para una próspera resolución de problemas, sugerencias generales que ayudan al individuo a comprender mejor un problema o progresar hacia su solución”.

Este autor ha criticado severamente algunos trabajos que abordan los heurísticos con superficialidad. Al respecto plantea: “… hay quienes se afilian sobre la base del trabajo de Pòlya, pero reducen las reglas heurísticas a destrezas procesales, casi asumiendo un punto de vista algorítmico de la heurística (esto es, heurísticos específicos que se ajustan a situaciones específicas). Un heurístico se convierte en destreza, y una técnica, paradójicamente, en algoritmo” (1992, p. 17). Sin embargo, más adelante reconoce que “mucho se ha hecho con respecto a las estrategias de resolución de problemas; los resultados que restan residirán más sobre la práctica y los niveles de implementación” (ibíd., p. 364).

En tercer lugar figura el **control**, que incluye planificar, estimar y tomar decisiones sobre la selección y el uso de las diferentes estrategias mientras se resuelve el problema, es decir, decidir si se cambia o no de vía cuando una situación particular se torna esotérica. El control valorativo ha recibido una singular atención, especialmente el hecho de formarse un juicio crítico del problema en cuanto a su corrección, pertinencia y solución (Labarrere, 1996). En general, el control se asocia a una dimensión metacognitiva, por cuanto el individuo debe ser consciente de la actividad que está desarrollando y, por consiguiente, de su dirección y regulación (Santos, 1993).

Por su parte, como último factor aparece el **sistema de creencias** que tiene el individuo acerca de la Matemática, su enseñanza y aprendizaje. Ejemplos típicos de creencias desfavorables son las siguientes: “los problemas matemáticos tienen una y sólo una solución correcta”, “resolver un problema no toma más de cinco minutos”, “un estudiante común no puede resolver problemas por sí mismo” y “la Matemática escolar tiene poco que ver con el mundo real” (Flores, 1995; Aguilar, 2001; Aguilar y Cruz, 2002).

Como puede apreciarse, Schöenfeld enfatiza el contenido procesado y el sistema de procesamiento, pero no hace alusión al resultado del proceso. Este componente es muy importante, pues se identifica con la solución obtenida, la cual constituye un punto de partida para el análisis perspectivo y retrospectivo del problema. Por otra parte, este autor incluye el sistema de creencias, las cuales han sido identificadas por otros autores como componentes que se encuentran “en la frontera” de lo cognitivo y lo afectivo. Cuando las creencias se refuerzan, dependiendo menos de las emociones y las actitudes, se consideran “concepciones”. Estas últimas pueden considerarse plenamente dentro de la esfera cognitiva (Aguilar y Cruz, 2002).

Tomando como base el análisis anterior, puede considerarse que la resolución de problemas es, ante todo, un proceso cognitivo. Este proceso engloba un conjunto de componentes que lo caracterizan (recursos, heurística, control, creencias y concepciones, y la propia solución del problema), los cuales cambian en el tiempo. Entre los cambios más significativos, figuran los ocasionados por el aprendizaje de estrategias metacognitivas.

Es necesario profundizar ahora en el concepto “estrategia”, por ser el eje central de esta investigación. Para los diccionarios este término se asocia principalmente a las acciones militares, pues su etimología proviene del griego “strategia” y este, a la vez, de “strategos” que significa general. Sólo como segunda acepción dicho término se refiere a la táctica o pericia en un asunto (*Diccionario Enciclopédico Grijalbo*, 1998) y también a un plan o método cuidadoso. Por su parte, la versión anglosajona "strategy" se refiere inclusive al "arte de elaborar o emplear planes o estratagemas con vistas a alcanzar un objetivo" (*Merriam Webster's Dictionary*, 1998).

En el ámbito de la psicología cognitiva los términos "estrategias", "métodos" y "técnicas" han sido utilizados con ambigüedad conceptual, como ha mostrado Betancourt (1995b). Este autor señala que, aunque no es su interés rechazar la pertinencia de los autores que citan ciertos métodos y técnicas creativas como estrategias dentro del contexto psicológico, es necesario "un análisis más profundo que clarifique su alcance" (ibíd., p. 38). Con relación a la distinción entre estrategia y habilidad, el propio Betancourt destaca que: "Las habilidades serían específicas y ligadas a la ejecución de una tarea en particular. El concepto de Estrategia, por su lado, designaría procesos psicológicos más complejos [...]. Además, estas se diferencian de las habilidades por poseer un propósito bien definido, estar compuestas por diferentes acciones y por modificarse de manera flexible para adaptarse a diferentes contextos" (ibíd., p. 22).

Con estas ideas avanzadas, este autor rebasa la conocida concepción de Bruner, para el cual "… una estrategia hace referencia a un patrón de decisiones en la adquisición, retención y utilización de la información que sirve para lograr cierto objetivo…" (1990, p. 328). Sin embargo, para la resolución de problemas el concepto de estrategia exige un análisis más profundo.

Es necesario señalar que este interés por conceptuar las estrategias de resolución de problemas "en el sentido de Pòlya", es parafrástica por cuanto Pòlya no habla de estrategias Él hace referencia a métodos o procedimientos a los que asigna el significado de esquemas de actuación: "… la resolución de numerosos problemas depende esencialmente del procedimiento, de la línea de acción, del esquema de enlace entre sus operaciones, del modus operandi" (1981, p. 15).

Sobre la base de las ideas de la escuela histórico–cultural, Campistrous y Rizo (2000) han conceptuado las estrategias de resolución de problemas. En efecto, desde la perspectiva de Galperin (1986) y sus seguidores es posible demostrar cómo el sujeto se puede apropiar de manera desarrolladora de la arquitectura del saber humano, y cómo a partir de aquí se puede lograr un acercamiento a la excelencia de la enseñanza y el aprendizaje. El objetivo fundamental de este psicólogo ruso no fue dejar una pauta en la sucesión de las etapas de la formación de las acciones psíquicas, sino esclarecer sus relaciones funcionales y la génesis de estas.

Tras desechar las versiones positivistas y cibernéticas desde las cuales algunos autores han enfocado la formación por etapas de las acciones mentales, es necesario considerar los complicados engranajes que existen en los mecanismos de regulación (autorregulación) psíquica y personológica del aprendizaje. Como ha señalado Fariñas no hay razón para ver una relación fija entre estas etapas, "[c]ada campo del conocimiento tiene sus acciones específicas […], y la dinámica de las etapas depende tanto de las experiencias como de las posibilidades y estilos de los aprendices, y aunque Galperin no habló de esto último *tampoco aseveró una sucesión rígida*" (1999, pp. 228–229; las itálicas del autor).

En general, las acciones humanas se conciben en procedimientos de diferentes tipos, uno de estos tipos son los procedimientos específicos encaminados a realizar tareas concretas, cuyas acciones y operaciones están determinadas y se realizan siempre de la misma forma (por ejemplo, el procedimiento algorítmico de resolución de ecuaciones cuadráticas). En el otro extremo figuran los procedimientos generalizados cuyas acciones no tienen un contenido concreto, pues constituyen esquemas de acciones que pueden implementarse ante una diversidad de situaciones. Particularmente, una estrategia de resolución de problemas es "un procedimiento generalizado constituido por esquemas de acciones cuyo contenido no es específico, sino general, aplicable en situaciones de diferente contenido, que el sujeto utiliza para orientarse en situaciones en las que no tiene un procedimiento 'ad hoc' y sobre la base de las cuales decide y controla el curso de la acción de búsqueda de la solución" (Campistrous y Rizo, 2000, p. 8).

Por su naturaleza, las estrategias pueden aislarse para ser sometidas a estudio (Dowker, 1992; Dowker et al., 1996; Verschaffel et al., 1998; Rizo y Campistrous, 1999). Las investigaciones realizadas por Campistrous y Rizo con diversos colaboradores de América Latina han revelado que los alumnos conforman sus propias estrategias, pero la mayoría resultan inoperantes para la resolución de problemas, son irreflexivas, y no se basan en un pensamiento correcto.

Estos autores señalan que en los procedimientos generalizados, y particularmente en las estrategias, se integran las estrategias heurísticas; pero no con el alcance de una estrategia sino como componentes elementales que ellos denominan "técnicas" y que son interiorizadas por el sujeto. "Estas técnicas, por su carácter elemental, pueden ser presentadas en una forma prescriptiva y asociarse a formulaciones metacognitivas que permiten al alumno un proceso de búsqueda inteligente y le proveen de criterios de decisión y control adecuados" (2000, pp. 9–10).

Después de esclarecer los presupuestos sobre los factores cognitivos que intervienen en la resolución de problemas, se procede ahora al análisis del ambiente donde esta actividad ocurre. El papel del contexto ha recibido una atención considerable durante los últimos años, por parte de las corrientes contemporáneas de aprendizaje (D' Amore et al., 1996; Choi y Hannafin, 1997; McCrae y Stacey, 1997; De Corte et al., 2001).

Este contexto no sólo se ha referido al ámbito escolar, sino a la sociedad con su cultura correspondiente (Tajika et al., 1997; D'Ambrosio, 1998). No obstante, por la naturaleza de esta investigación, es necesario enmarcarse dentro del proceso docente–educativo, lo cual no significa que se suponga al individuo aislado de su comunidad, de sus condiciones socioeconómicas, etcétera. Para elucidar la posición teórica que se comparte, a continuación se describe una idea de Schroeder y Lester, los cuales relacionan la enseñanza con la resolución de problemas, a través de las preposiciones inglesas "<u>for</u>", "<u>about</u>" y "<u>through</u>" (1989; citado por Chapman, 1999, p. 41 y ss.).

La enseñanza **para** resolver problemas se asocia a la teoría estímulo–respuesta, elaborada por Thorndike y Skinner (Schöenfeld, 1992), donde las habilidades se "adquieren" a través de la reiterada resolución de una serie de ejercicios interconectados. El fin consiste en que el estudiante pueda ser capaz de aplicar las técnicas memorizadas ante ciertas situaciones, donde algunas características específicas (estímulo) provocan conductas específicas (respuesta). De esta manera, la actividad cognoscitiva del sujeto se interpreta como la simple suma de sus partes. Así, un enunciado podría ser “use la división para resolver los siguientes ejercicios”.

La práctica escolar se encargó muy pronto de poner al descubierto la inconsistencia de este modelo conductista, el cual debió ceder terreno curricular (no en la práctica) a una nueva fórmula: la enseñanza **sobre** la resolución de problemas. La génesis de este segundo modelo es la teoría del procesamiento de la información, que estudia la adquisición, almacenamiento y reintegración del conocimiento. Para sus seguidores operar en el nivel semántico es posible sólo desde un nivel simbólico, por tanto, el contenido semántico de la cognición se reduce a la codificación de expresiones simbólicas. Los estudiantes no son educados para descubrir los métodos por sí mismos, sino conducidos por el maestro hacia la respuesta correcta. Un papel esencial juega la organización y estructura del conocimiento, así como la velocidad, exactitud y tersura de la acción. La enseñanza, en su algoritmo exposición–ejemplo–ejercicio–problema, enfatiza saber qué y cómo, detectando errores y remediándolos, pero pasando por alto el por qué y el para qué (Nápoles y Cruz, 2000, pp. 32–33).

Particularmente, la resolución de problemas se interpreta como un proceso racional y significativo, que se apoya en una entrenada memoria de trabajo y esta, a su vez, en la memoria a largo plazo. A pesar de todo, este enfoque facilita la adquisición de nuevas experiencias por parte de los estudiantes, así como discusiones explícitas de lo que la Matemática es, y no sólo se enmarca en el sentido estrecho de la ejecución (Wyndhamn, 1993, p. 13).

Sobre la base de muchos resultados, provenientes de diversos campos del saber humano (pedagogía, psicología, inteligencia artificial, antropología, neurofisiología, lingüística y filosofía), se ha elaborado un tercer paradigma: la enseñanza **a través de** la resolución de problemas. Es imposible resumir aquí todas las versiones existentes. Sirva de ejemplo que, en la intersección de la pedagogía y filosofía de la Matemática, hoy día predominan cuatro enfoques: el “constructivismo social”, presentado por Ernest en el ICME 7; la “matemática educativa crítica”, elaborada por

Skovsmose en 1994; la "teoría de procesos y sistemas genéricos" de Vasco; y la "perspectiva fenomenológica", de Viggiani.[11]

En general, todas estas concepciones tienen limitaciones de orden epistemológico. Por ejemplo, partiendo del neopositivismo de Lakatos, la primera de ellas se erige sobre el constructivismo, posición idealista–subjetiva que ha sido criticada severamente por muchos autores (Zamorano, 1999; Turner y Sullenger, 1999). En esta tesis, al asumir el materialismo dialéctico como doctrina filosófica, se abordará la resolución de problemas desde el enfoque histórico–cultural. El propósito no reside en formar un imitador (enfoque "para") ni un procesador (enfoque "sobre"), sino un pensador activo (enfoque "a través de").

Wyndhamn ha propuesto un esquema (1993, p. 22; véase la figura 3 con modificaciones del autor), donde las etapas B y E sirven de puente entre las situaciones problémicas y la actividad matemática. El primer enfoque enfatiza la relación 3 y el segundo el ciclo B–C–D–E–B, sin embargo, el tercer enfoque se expresa por todo el diagrama. En efecto, ante una situación problémica el estudiante debe, por medio de la abstracción, simplificar la información y determinar lo esencial (lo dado y lo buscado), a fin de formular el problema con suficiente rigor (1).

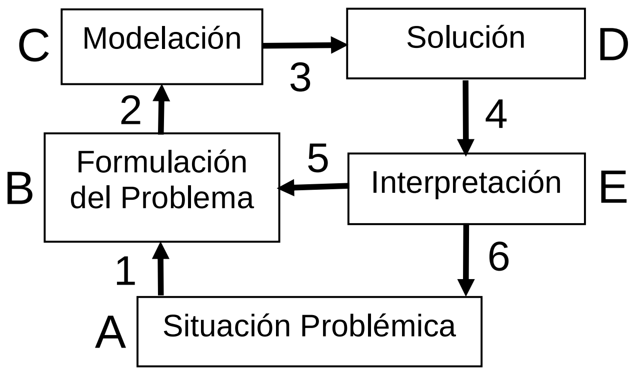


Figura 3. *Un modelo de los procesos de resolución de problemas.*

A continuación se procede a matematizar la información, traduciéndola al lenguaje simbólico, para luego obtener el modelo matemático del problema (2). Por medio de

[11] Conferencias magistrales de estos autores, relativas a sus respectivas teorías, aparecen en Alsina et al. (1998, Eds.; p. 153, 413, 443, 463 y ss.).

operaciones, transformaciones, haciendo uso de técnicas y teorías, se llega a la solución (3), la cual debe ser analizada y comprendida con el objetivo de interpretarla (4). La primera interpretación es intramatemática, en ella el individuo traduce sus resultados, chequea la solución, elabora predicciones, generalizaciones y conclusiones (5); la segunda es extramatemática, pues se compara lo obtenido a fin de analizar la validez del resultado (6).

En Cuba este último enfoque ha sido desarrollado de muchas maneras, a lo largo de la última década (Torres, 1993; Llivina, 1999; Ferrer, 2000; Alonso, 2001); y un caso muy especial consiste en la aplicación de los métodos problémicos en la enseñanza de la Matemática. Se entiende por Enseñanza Problémica "aquella donde los alumnos son situados sistemáticamente ante problemas, cuya resolución debe realizarse con su activa participación, y en la que el objetivo no es sólo la obtención del resultado sino, además, su *capacitación independiente para la resolución de problemas en general*" (Torres, 1996, p. 5; las itálicas del autor).

Esta forma de organizar el proceso enseñanza–aprendizaje tiene en la "situación problémica" su categoría más importante (cf. figura 3, etapa A), pues refleja la contradicción dialéctica entre lo conocido y lo desconocido, entre el sujeto y el objeto; y estimula la actividad cognoscitiva al desencadenar el proceso de resolución. La Enseñanza Problémica eleva el grado de actividad mental en la clase, propicia el pensamiento creador, y contribuye al desarrollo de la personalidad de los estudiantes (Torres, 1996; Álvarez, 1999).

Los métodos problémicos son una cualidad de la escuela de excelencia; se caracterizan como la serie de acciones y modos de conducta del profesor, dirigidos hacia el cumplimiento de los objetivos a niveles productivo y creativo. Estos métodos pueden agruparse siguiendo una clasificación tricotómica. En primer lugar la "exposición problémica", donde el papel fundamental lo juega el maestro cuando familiariza al alumno con la solución de los problemas que se plantean en la clase, y con la lógica contradictoria de la búsqueda de soluciones.

En segundo lugar figura la "búsqueda parcial", donde el grado de participación es equitativo. Aquí el maestro procura elevar la actividad cognitiva de sus estudiantes sobre la base de un enfoque problémico y con la activa participación de estos. Una de las manifestaciones de este método es la conversación heurística, donde se establece un diálogo entre el profesor y el alumno, a partir de preguntas e impulsos dirigidos hacia la ZDP (cf. Pòlya, 1957; Slepkan, 1983; Schöenfeld, 1985).

En tercer lugar aparece el "método investigativo", donde el maestro organiza el proceso de aprendizaje problémico de manera que el estudiante atraviese independientemente todas o la mayoría de las fases del proceso investigativo (cf. Stacey, 1995; McCrae y Stacey, 1997). Como se ha observado, los grados de participación del profesor y el alumno varían según el método. Sin embargo, en todos los casos, el alumno constituye el centro de un proceso dirigido por el maestro.

Torres (1993) determinó varios criterios de selección y aplicación efectiva de los métodos anteriores en la enseñanza de la Matemática. Este autor responde a la pregunta de **cuándo** utilizarlos considerando los siguientes criterios de selección:

1) Determinar los contenidos que demandan una mayor utilización de formas de pensamiento no algorítmicas, dando preferencia a aquellos para los cuales se exigen los niveles de asimilación productivo y creativo.
2) Considerar factores como el nivel de preparación de los alumnos, el tiempo disponible y las condiciones organizativas y materiales de la institución.
3) Decidir el método problémico más apropiado de acuerdo con el nivel de relación con los contenidos precedentes y el desarrollo cognitivo de los educandos.

Por su parte, ante la pregunta de **cómo** utilizar los métodos problémicos, Torres propone como criterios de aplicación los siguientes:

1) Partir de la elaboración de una situación problémica, mediante la revelación de las contradicciones que resultan de una ampliación intramatemática o de una extensión extramatemática (aplicación a otra ciencia o a la vida práctica).
2) Contribuir a la transformación de la situación problémica en problema, a través de una adecuada orientación hacia el objetivo, donde se ponga claramente de manifiesto: ¿qué se quiere lograr?, ¿de qué condiciones se parte? y ¿por qué vía general se resolverá el problema?.

3) Conducir el proceso de resolución a través de tareas y preguntas problémicas adecuadas, sobre la base del empleo racional y eficiente de los procedimientos heurísticos que permitan concretar los medios y la vía de solución.
4) Formular tareas cuyo proceso de solución se dirijan hacia la ZDP. Las dificultades que estas exigencias le plantean al alumno deben ser superadas en la medida en que sea necesario, con la ayuda del profesor, mediante el empleo de impulsos cada vez menos exigentes. En todo momento se aprovecharán las potencialidades del contenido para acentuar la contradicción original, controlando sistemáticamente el objetivo a cumplir.

En consonancia con el modelo de Wyndhamn, el segundo criterio se refiere al paso 1 (véase la figura 3), mientras los dos siguientes se refieren al proceso 2–3–4 con los controles 5 y 6. Sin embargo, es necesario señalar la necesidad de hacer explícito un quinto criterio, relativo a la peculiaridad de que todo problema es el punto de partida para un virtual campo de problemas (Gascón, 1994; Chevallard et al., 1998). Es por ello que se propone añadir un quinto criterio, el cual consiste en:

5) Determinar qué nuevos problemas resultan convenientes explorar de manera perspectiva o retrospectiva, previendo la creación de condiciones para que estos emerjan tras nuevas situaciones problémicas.

§ 1.3 La formulación de problemas matemáticos

Figuras prominentes de la Matemática Educativa como Pòlya y Freudenthal han señalado que el planteo de problemas es un aspecto importante, dentro de la formación matemática de los estudiantes (Silver, 1996, p. 293). Esta importancia apunta, tanto a la adquisición de conocimientos generalizados sobre la Matemática como al desarrollo de los hábitos y habilidades necesarios para el trabajo independiente en esta disciplina (Labarrere, 1988, p. 44). En efecto, la formulación de problemas contribuye al mejoramiento del proceso de solución de problemas, así como al desarrollo de las capacidades matemáticas y la flexibilidad del pensamiento. También desarrolla la independencia, la creatividad, el lenguaje y el interés por la Matemática (Labarrere, 1980; Silver, 1994, López et al., 2000). Por estas razones, en el diseño de diversos currículos se promulga la necesidad de que los estudiantes planteen nuevos problemas; sin embargo, el sustento teórico es bastante efímero. Basta decir que en la base de datos MATH–DI, entre los años 1976 y el 2000, de 90812 resúmenes de investigación registrados sólo 990 contienen el código "problem–posing" (0.01 %).

En la figura 4 se ilustra la cantidad de artículos registrados en dicha base de datos, relacionados con el planteo y solución de problemas (según una búsqueda automatizada del autor). El análisis estadístico arroja una significativa correlación logarítmica (r=0,91), lo que confirma la aseveración de muchos investigadores sobre el estrecho vínculo que enlaza estos campos de investigación.

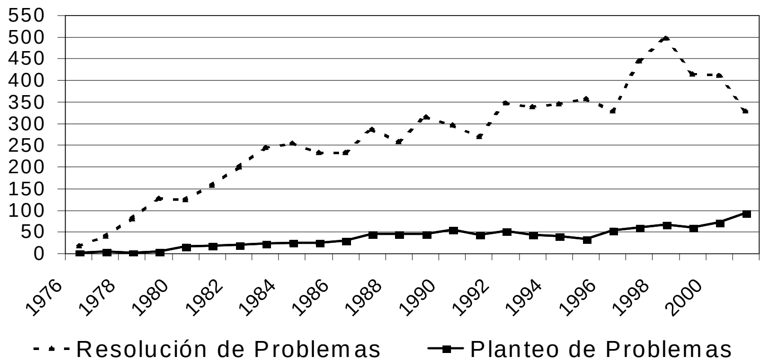


Figura 4. *El planteo y solución de problemas a escala mundial.*

En Cuba, el primer trabajo relacionado con la formulación de problemas del cual se tiene referencia, fue realizado por Labarrere en 1980. Se trata del artículo *Sobre la Formulación de Problemas Matemáticos por los Escolares*, donde el autor aborda la importancia de este proceso para el desarrollo de las capacidades matemáticas, pues el acto de formulación exige que el alumno cree por sí mismo las relaciones entre los diferentes componentes del problema a formular.

En 1988 Labarrere retoma la actividad de formulación de problemas en su libro *Como Enseñar a los Alumnos de Primaria a Resolver Problemas*. En este caso el autor señala que para utilizar adecuadamente la formulación de problemas es necesario que el maestro sea capaz de crear las condiciones para que sus estudiantes puedan variar el planteo sin alterar la situación inicial; hacer un nuevo tipo de problema a partir de diferentes situaciones iniciales; modificar los datos y las preguntas independientemente, manteniendo constante el resto del problema; y formular problemas cuyos métodos de solución posean diferentes grados de dificultad (1988, p. 51). En este trabajo se propone una interesante tipología para las situaciones iniciales, aportando varios ejemplos de la enseñanza primaria.

En general, desde la óptica de este autor, la formulación de problemas es vista como una forma de potenciar el interés de los estudiantes por la Matemática, así como su sentido crítico hacia ella. También critica el hecho de que en la actualidad los problemas se presentan ante los escolares como "algo para resolver" y muy pocas veces como "algo para someter a juicio" (1996, p. 57), planteando la necesidad de crear un marco referente a partir del cual los alumnos puedan valorar el texto de los problemas.

Por su parte, Campistrous y Rizo en *Aprende a Resolver Problemas Aritméticos* proponen cuatro acciones básicas para enseñar a formular problemas: la búsqueda, el planteo de una situación inicial, la formulación de preguntas, y la resolución del problema (1996, p. 40). Ellos destacan que así "el alumno se siente un *creador* y esto, además de estimular el aprendizaje, forma motivos fuertes para el trabajo con el problema, perdiendo el *miedo* que muchas veces se crea alrededor de esta importante actividad matemática" (ibíd., p. 39, las itálicas en el original).

Entre 1995 y 1997 el autor realizó una investigación relativa a la elaboración de ejercicios del Análisis Diofántico, dirigidos a la preparación de la selección nacional para las olimpiadas internacionales de Matemática. En este trabajo se adujeron una serie de indicaciones metodológicas que facilitan la obtención de problemas, también se desarrollaron los medios propuestos por Pòlya (1957), como la generalización, la limitación ("specialization") y el establecimiento de analogías. Un resultado interesante consistió en la elaboración de un procedimiento cuasialgorítmico para la obtención de nuevos problemas (Cruz, 1995 y 1997). En estos trabajos se hiperbolizó sobremanera el componente matemático de la actividad de formulación, dejando al margen los importantes componentes psicopedagógicos que le son inherentes. En trabajos ulteriores ya fueron considerados diferentes aspectos psicológicos, especialmente los relativos a la creatividad; sin embargo, todavía las observaciones eran más descriptivas que prescriptibles (Cruz, 1998 y 1999).

En el curso escolar 1999–2000 se comenzó a experimentar un grupo de transformaciones en el enfoque metodológico de la Matemática, en una parte importante de las secundarias básicas de todas las capitales provinciales. En este mismo período el interés de los investigadores por la formulación de problemas matemáticos creció notablemente. Por ejemplo, en Ciudad de la Habana se destacan los trabajos de Llivina et al. (2000), cuyos trabajos giran en torno a un “sistema básico” de competencias matemáticas (identificar, plantear y resolver problemas). Ellos consideran las dimensiones procesal, operacional y motivacional, lo cual les permite abordar estas competencias desde diferentes aristas.

Por su parte, González (2001 a y b) ha elaborado una metodología dirigida hacia la enseñanza–aprendizaje de los problemas con texto en el nivel primario, la cual comprende actividades preparatorias, situaciones iniciales y pasos para la formulación. En una extensión de este trabajo ya el autor y sus colaboradores logran conceptuar una propuesta de sistema de acciones intelectuales, a partir de la cual los futuros maestros logran formular problemas con textos con calidad (véase González et al., 2002).

También en Santiago de Cuba se han llevado a cabo trabajos afines a la formulación de problemas. Por ejemplo, López et al. (2000) consideran dos fases en este proceso: la realización de ejercicios preparatorios y la elaboración de problemas. Además señalan que esta actividad debe ocupar un espacio en la Didáctica de la Matemática, durante el tratamiento de la situación típica *Ejercicios con Textos y de Aplicación* (ibíd., pp. 4–8). El autor coincide con esto, pero considera que este espacio debe ampliarse hacia todas las situaciones típicas, siempre y cuando su presencia quede justificada por una correcta intención didáctica. En una investigación derivada de este trabajo ya es posible encontrar indicaciones metodológicas para la elaboración de problemas con texto, complementadas con un grupo de preguntas típicas dirigidas hacia la ZDP (véase Fuentes, 2001, pp. 55–57).

Kilpatrick ha señalado que “la formulación de problemas debería ser vista no solo como una meta de instrucción, sino también como un medio de instrucción” (1987b, p. 123). Esta peculiaridad abre un interesante campo de investigación, pero requiere de un sólido substrato teórico que permita, más que describir, prescribir el acto de formulación. La actividad de elaboración de ejercicios cobra variados matices, pues el proceso de elaboración puede ser muy sencillo, v. gr. elaborar una ecuación cuadrática que "fuerce" la implementación de las fórmulas de discriminantes, lo cual puede catalogarse de ejercicio–rutinario para el maestro por ser esencialmente algorítmico; pero también puede ser muy difícil, como es el caso de elaborar un ejercicio–problema para una olimpiada de Matemática (cf. Cruz, 1997 y 2000). Esto revela que la tarea de elaborar un ejercicio es, en sí misma, un ejercicio que puede o no ser problema. Ahora, de serlo, ¿qué tipo de problema constituye?

Desde la perspectiva de Pehkonen (1995, p. 56) y Silver (1995, p. 69) esta problemática encuentra una respuesta apropiada. En efecto, la elaboración de cualquier ejercicio–problema parte de una situación inicial, que puede ser o no precisa; del conocimiento de la meta a alcanzar, la cual es esencialmente imprecisa; así como de la certidumbre de que el proceso de obtención es desconocido a priori. Por este motivo, elaborar un ejercicio–problema alcanza la dimensión de problema abierto. Esta actividad es creativa por naturaleza, no solo por la producción de algo nuevo, sino también por la fluidez, flexibilidad, redefinición y originalidad inherentes a los caminos a seguir (Pehkonen, 1997, p. 64; Silver, 1997, p. 76; Pehkonen y Segarra, 1998, p. 272).

Así, este trabajo entra en contacto directo con una de las nueve líneas principales de investigación en el área de la creatividad: el "descubrimiento de nuevas y mejores vías para solucionar los problemas" (Betancourt, 1995a, pp. 4–5); enfatizando una de las cinco direcciones actuales: el proceso que va encaminado a "explicar de qué forma transcurre la actividad de creación, y qué elementos y etapas forman parte de esta" (ibíd., p. 5). Esto no indica que se soslaye el papel de la personalidad en su función reguladora, pues no es posible potenciar la creatividad al margen de acciones educativas tendientes a desarrollar y movilizar los elementos personológicos que le son esenciales.

El hecho de concebir la tarea de formular un problema, como problema en sí misma, permite conceptuar el objeto de esta investigación (el proceso de formulación) como un proceso cognitivo, dirigido a la resolución de ciertos problemas abiertos. Así, los componentes que caracterizan el proceso de resolución también caracterizan el de formulación. Es por ello que resulta posible hablar de creencias y concepciones sobre la formulación de problemas, de control metacognitivo asociado a dicho proceso, etcétera.

Actualmente no existe consenso en el manejo de los verbos “elaborar”, “formular” y “plantear”, cuando se refieren a la creación de nuevos problemas. A continuación se hará una distinción para el uso de los mismos. En efecto, la elaboración de problemas se referirá a una actividad cognitiva compleja que ejecuta el maestro en un nivel macro; la formulación de problemas constituye un subproceso de esta actividad, compuesto a su vez por varias acciones en un nivel meso; mientras que el planteo será asociado a una operación final de la formulación en un nivel micro.

En sentido general, la macroestructura del proceso de elaboración de nuevos problemas, presupone el seguimiento de tres etapas fundamentales. En la primera se formula una interrogante, lo cual es el germen de un posible ejercicio de decisión o determinación; en la etapa intermedia se materializa la capacidad del maestro para dar respuesta a la interrogante; y en la última etapa, tras analizar el valor didáctico del ejercicio, se efectúan variaciones en el grado de dificultad y se perfecciona el planteo, a fin de adecuarlo a las exigencias reales que motivaron su elaboración. A todo este proceso se le denominará “metaproblema” (parasíntesis que significa “más allá del problema”), y su complejidad justifica la aseveración de que elaborar un problema puede llegar a ser más difícil que resolverlo (Pòlya, 1957; Smilansky, 1984).

A pesar de integrar formaciones psicológicas inconscientes (hábitos) el metaproblema es una actividad esencialmente consciente, y su nivel de dominio constituye una capacidad. Esto viene dado por la presencia de una etapa de resolución, que es muy compleja por naturaleza y no descarta el posible surgimiento de un *ignoramus*. El desarrollo de la capacidad para elaborar problemas depende indirectamente de cómo se influya directamente en la formación y desarrollo de las habilidades y hábitos que le son constitutivos. El sujeto será más capaz en la medida que se plantee interrogantes más complejas y las resuelva (aspecto cualitativo), o bien cuando se plantee un sinnúmero de problemas y resuelva un subconjunto considerable, aportando varias vías inclusive (aspecto cuantitativo).

El desarrollo de esta capacidad es un hecho posible para el profesor en formación, no sólo por el grado de sistematización que va alcanzando en los contenidos matemáticos escolares, sino también por la flexibilidad que llega a desplegar al abandonar oportunamente una hipótesis y plantearse otra, aspecto sobre el cual influye mucho su práctica en la resolución de problemas. Así, en consonancia con el desarrollo intelectual que logra el estudiante para profesor de los ISP, se considera viable conceptuar las etapas anteriores como procedimientos de la actividad cognoscitiva, los cuales responden a objetivos parciales alcanzables y están compuestos a su vez por un sistema de acciones y operaciones que materializan la actuación (véase Talízina, 1988, p. 201).

Por este motivo, puede concluirse que elaborar un ejercicio–problema es una actividad humana constituida por tres procedimientos esenciales: la formulación, la resolución y la adecuación. Esta actividad satisface disímiles necesidades del proceso enseñanza–aprendizaje, relacionadas con el diagnóstico, la elaboración de ejemplos, sistemas de ejercicios, exámenes (incluyendo las olimpiadas), situaciones problémicas, etcétera. Cada acción debe verse en constante interacción con las demás, cuya dialéctica simule un movimiento en espiral, por dejar abiertos nuevos enigmas tras la dilucidación de otros. Como una primera aproximación a la modelación del metaproblema, se propone el siguiente esquema:

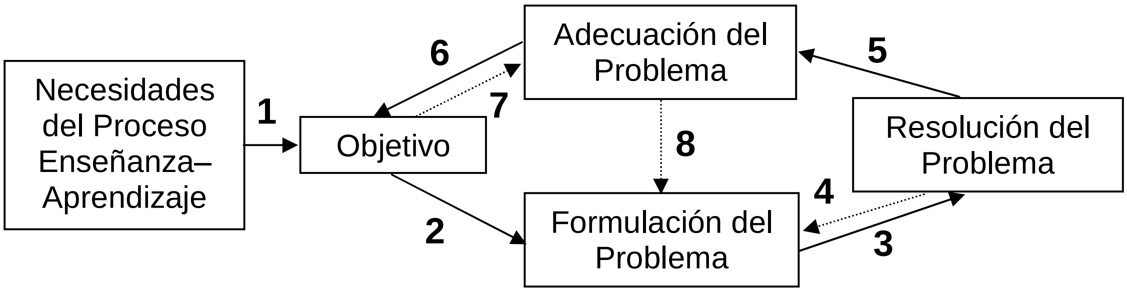


Figura 5. *Estructura del metaproblema*.

A título de ejemplo, supóngase que el maestro tiene la necesidad de crear una situación problémica, que justifique la introducción del concepto “derivada”. Esta necesidad plantea, por ejemplo, el objetivo de elaborar un problema intramatemático o práctico, relacionado con este concepto (relaciones 1 y 2). En una primera etapa, el maestro formula su problema y trata de resolverlo (interacción 3–4). En este proceso pueden surgir momentos de regresión, de abandono de hipótesis, inclusive de selección de nuevos objetos de análisis. Así, es posible partir de la búsqueda de una función cuyo gráfico motive el trazado de la tangente en un punto; sin embargo, después de un trabajo infructuoso, un pensamiento flexible puede iniciar la búsqueda de una situación práctica donde tenga sentido medir cierta velocidad de cambio.

Una vez resuelto el problema es necesario recurrir a una segunda etapa (relación 5), en la cual se corrige el planteo y se varía el grado de dificultad. Ahora surge una nueva interacción (6–7), en la cual el maestro analiza si su ejercicio–problema cumple con el objetivo planteado. En caso negativo, subsisten dos posibilidades: realizar las transformaciones pertinentes (sin que varíe la esencia del fenómeno, como es el caso de seleccionar datos más cómodos para el cálculo), o bien desechar todo el resultado y comenzar de nuevo (relación 8).

Es necesario puntualizar que, aun cuando la etapa de formulación forma parte de los modelos ilustrados en los gráficos 3 y 5, estos últimos no describen procesos idénticos. Si bien es conocido que una misma acción puede constituir parte de actividades diferentes, esta coincidencia tiene un origen natural en el orden teórico. En efecto, por una parte se ha conceptuado la actividad de formulación como la resolución de un problema abierto, sin embargo, recíprocamente, ya Duncker (op. cit.) había observado que la actividad de resolución es una continua reformulación del problema original.

El metaproblema constituye un proceso orientado hacia la búsqueda de nuevos problemas y comprende interrelaciones del gráfico 3 como subprocesos, inclusive como parte de la etapa de adecuación. En los primeros estadíos de desarrollo del metaproblema, la situación problémica emerge del análisis de objetos matemáticos o extramatemáticos, elegidos intencionalmente por el sujeto. Esto responde a expresiones como: “voy a elaborar un problema sobre sistemas de ecuaciones”. En estadíos más avanzados va desapareciendo el grado de conciencia, y la búsqueda de problemas tiende a convertirse en hábito. Es por ello que algunos individuos, catalogados como muy creativos, son capaces de descubrir situaciones problémicas donde otros no consiguen hacerlo, llegando a plantear problemas verdaderamente originales.

Conclusiones del capítulo.

Hasta aquí ha sido conformada la plataforma teórica que requiere una estrategia metacognitiva, asociada al proceso de formulación de problemas. En conexión directa con la ZDP se ha asumido una caracterización pedagógica del concepto “problema”, lo cual ha permitido comprender la formulación como un proceso cognitivo, dirigido a la resolución de problemas abiertos. Por otra parte, se han caracterizado las estrategias de resolución de problemas, como procedimientos generalizados de la actividad cognitiva. También se han argumentado las razones que conducen a asir la Enseñanza Problémica, como medio favorable para la creación de problemas escolares.

En el orden teórico ha sido introducido un elemento novedoso, al modelar la actividad que debe desarrollar el futuro maestro cuando elabore nuevos problemas en la escuela, revelando la complejidad que le es inherente a la etapa de formulación. Todo lo anterior facilita la propuesta de una estrategia metacognitiva, dirigida a favorecer la formulación de problemas escolares, por parte del futuro profesional.

Si bien el hilo conductor de este marco teórico reside en conceptuar la formulación de problemas como una actividad de resolución, es conocido que algunos autores abordan la resolución de problemas como una “habilidad generalizada”. Asumiendo esto y retomando la idea de conceptuar el acto de formulación como problema, resulta el siguiente problema abierto, en el orden teórico: *¿cuál es el invariante funcional de la “habilidad” para formular problemas?*

CAPÍTULO 2

ESTRATEGIA METACOGNITIVA QUE INTEGRA Y SISTEMATIZA UN CONJUNTO DE TÉCNICAS DURANTE LA FORMULACIÓN DE PROBLEMAS

2. ESTRATEGIA METACOGNITIVA QUE INTEGRA Y SISTEMATIZA UN CONJUNTO DE TÉCNICAS DURANTE LA FORMULACIÓN DE PROBLEMAS

El presente capítulo constituye una aproximación a la solución del problema científico, declarado en la introducción de esta tesis. En primer lugar se propone una estrategia metacognitiva dirigida a favorecer el proceso de formulación de problemas, analizando cuándo y cómo hacer uso de las diferentes técnicas que le son constitutivas. A continuación se caracteriza el proceso de formulación, sobre la base de tres indicadores fundamentales. Finalmente, teniendo en cuenta las peculiaridades del profesor en formación, se establece un ambiente de aprendizaje que propicia la implementación de la estrategia propuesta.

§ 2.1 Estrategia metacognitiva en la formulación de problemas

En el capítulo anterior el metaproblema ha sido modelado como una actividad compleja, dirigida hacia la elaboración de nuevos problemas. Uno de los subprocesos constitutivos es la formulación, el cual se refiere tanto al conjunto de acciones y operaciones que conducen al planteo de un problema como a la forma en que estos tienen lugar. Desde esta perspectiva, el planteo de un problema no se interpreta como un acto inextricable, sino como un usufructo de la implementación de ciertas técnicas y estrategias afines. Por otra parte, al conceptuar las estrategias como ciertos procedimientos de la actividad cognitiva, se advierte la presencia de otras estrategias más simples que configuran de manera compleja la estrategia en sí.

En efecto, las denominadas “técnicas” son también susceptibles de ser aisladas y sometidas a estudio. En sentido general, las investigaciones vinculadas a la formulación de problemas no utilizan el término “técnica”. De forma análoga a lo que ocurre con la resolución de problemas, los autores utilizan indistintamente el término “estrategia”, aun cuando se refieren a los procedimientos más elementales. En este trabajo se distinguen ambos conceptos, pero se reconoce la relatividad que subyace sobre dicha distinción.

Antes de profundizar en la forma y el contenido de la estrategia metacognitiva que se propone, es necesario reconocer que su origen subyace sobre una idea de Brown y Walter (1990, p. 61), en la cual los autores introducen cinco “niveles” para el desarrollo de su técnica “¿qué–si–no?”. Se trata de “escoger un punto de partida”, “enumerar atributos”, “aplicar la técnica”, “realizar preguntas” y “analizar el problema”. En un sinnúmero de ejemplos se evidencia cómo estos niveles conforman una estrategia metacognitiva. Sin embargo, esta última es muy específica y no se esclarece la posibilidad de implementar otras técnicas.

Por otra parte, tampoco se describen las operaciones que conforman estos niveles (o acciones) y su estructura tiende a ser lineal. Además, el hecho de anteponer la realización de preguntas sin un análisis previo, puede conducir a la formulación de problemas sin sentido (ora por la existencia de datos contradictorios, ora por la insuficiencia de información). A continuación se propone una estrategia no lineal que engloba una amplia diversidad de técnicas, particularmente la abordada por Brown y Walter (ibíd.).

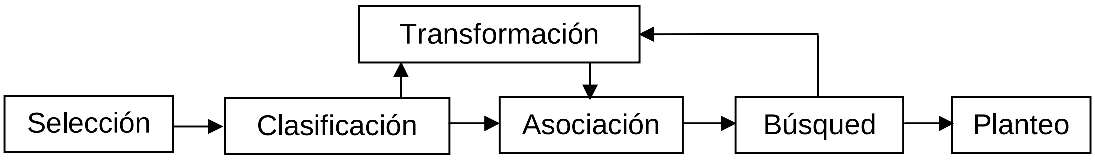


Figura 6. *Una estrategia para la formulación de problemas.*

La estrategia se compone de seis acciones básicas, tal y como se ilustra en la figura 6. La primera de ellas es la **selección del objeto**, y su ocurrencia está condicionada por la relación 2 de la figura 5 (§ 1.3), así que responde a un objetivo consciente. El sujeto analiza qué clases de objetos matemáticos resultan apropiados, comparándolos con el fin de escoger aquellos que le brinden mayores posibilidades para formular problemas. En esta primera etapa influye mucho la esfera afectiva, por cuanto la toma de decisiones está condicionada frecuentemente por los gustos e intereses del sujeto.

Una vez que se ha elegido el objeto ocurre la **clasificación de componentes**. En esta acción se procede a desmembrar el objeto en sus partes constitutivas (análisis), y la información obtenida se organiza y compara atendiendo a ciertos criterios, elegidos por el propio sujeto. Paralelamente, subsiste una respectiva integración de los componentes (síntesis), de manera que pueden conformar ellos mismos otros componentes más complejos del objeto. Como ejemplo puede tomarse una figura plana, la cual está compuesta por segmentos, y a la vez ciertos tríos conforman triángulos que también son partes integrantes de la figura.

La acción subsiguiente consiste en la **transformación del objeto**, que puede ser total, parcial o idéntica (la transformación idéntica explica el tránsito directo de la clasificación a la asociación en la figura 6). Tales cambios pueden ocurrir tras la generalización de ciertos elementos emergentes durante la clasificación. Esta operación lógica es muy compleja y puede tener una naturaleza sintética o analítica.[12] En esencia, la generalización facilita el paso de un concepto específico a otro genérico, al quitar de su contenido aquellos indicios que lo especifican (disminuye el contenido y aumenta el volumen del concepto). El proceso contrario se denomina limitación (véase Guétmanova, 1989, p. 63).

También es posible transformar el objeto empleando analogías. En este caso se trata de un razonamiento sobre la pertenencia a cierto objeto de un determinado indicio (propiedad o relación), tomando como base la homología de indicios sustanciales con otro objeto. Según el carácter de la información trasladada del modelo al prototipo, la analogía puede ser de propiedades o de relaciones (ibíd., pp. 204–205). Por la naturaleza de este razonamiento, Uemov considera que se trata más de un hecho psicológico que lógico (citado por Slepkan, 1983, p. 59).

Habiendo transformado o no el objeto, la acción subsiguiente comprende la **asociación de conceptos**, de manera que los elementos resultantes de la

[12] Al observar que 6=3+3, 8=3+5, 10=3+7, …, la generalización sintética llevó a Goldbach a plantear su conjetura sobre la expresión de los números pares como suma de dos números primos. Por su parte,

clasificación son separados por abstracción y luego relacionados con un conjunto de conceptos matemáticos, los cuales pueden ser de propiedades (área, perímetro, monotonía, …) o relacionales (semejanza, paralelismo, congruencia, …). Nuevamente es necesaria la toma de decisiones, pues el sujeto debe elegir un subconjunto de tales conceptos asociados. En estos momentos pueden emerger varias interrogantes de manera natural, sin embargo, es posible que muchas no tengan sentido.

Es por eso que se ha considerado una penúltima etapa, relacionada con la **búsqueda de dependencias**, donde se analizan las relaciones existentes entre las propiedades que han sido asociadas. Si este análisis resulta infructuoso, es posible seguir transformando el objeto (véase la figura anterior) para continuar la búsqueda tras nuevas asociaciones. Finalmente se sintetiza toda la información, y las interrogantes inmanentes son valoradas a fin de seleccionar una (o varias) de ellas. Con esta toma de decisión culmina el **planteo de la pregunta**, teniendo lugar entonces la etapa subsiguiente del metaproblema.

Huelga señalar que no debe confundirse la realización trivial de una pregunta con el procedimiento de formular un problema,[13] el cual constituye el foco de este trabajo. La pregunta es una expresión materializada de la formulación y aparece como consecuencia de una insatisfacción, de un conflicto interno vinculado al análisis de un objeto. Sin embargo, la tipología de ejercicios que se ha asumido subyace sobre una respectiva tipología de preguntas (véase Guétmanova, 1989, p. 241).

En efecto, a las preguntas especificativas (cuya respuesta es sí o no) corresponden los ejercicios de decisión. Así, a la pregunta ¿es $f(x)$ derivable en $x = x_0$? son afines dos ejercicios posibles: demostrar o refutar que $f(x)$ es derivable en $x = x_0$. Por su parte, a las preguntas complementarias (encabezadas por los operadores ¿qué?, ¿por qué?, ¿cuándo?, ¿cuáles?, …) corresponden los ejercicios de determinación.

---

la generalización analítica condujo a Hamilton a la creación de los sistemas numéricos hipercomplejos. Véase Gorsky, D. (1987) *Generalization and cognition*. Progress Publishers, Moscow.

[13] Algunos autores han caracterizado la formulación de problemas como un tipo de tarea docente, cuyo objetivo consiste en que el estudiante elabore ejercicios con plena conciencia de sus vías de solución (Labarrere, 1980, Smilansky, 1984).

Por ejemplo, a la pregunta ¿cuáles son los ceros del polinomio $P(x) = x^3 - 1$? es afín el ejercicio: hallar los ceros de $P(x) = x^3 - 1$.

Es importante puntualizar que, en este último caso, se parte del supuesto de que el ente a determinar existe, lo cual se revierte en una pregunta especificativa. Es decir, al ejemplo anterior precede, en orden lógico, la pregunta: ¿admite ceros el polinomio P(x)?, que es directa por naturaleza. La ausencia primaria de esta interrogante se justifica por la presencia del entimema "existe al menos un cero real de P(x), pues su grado es impar", donde se ha omitido la premisa mayor "todo polinomio de grado impar admite, por lo menos, un cero real". Este silogismo categórico abreviado no es un hecho lógico sino psicológico, que matiza el carácter asimilado de la acción (Talízina, 1988, p. 93). Recíprocamente, tras una pregunta especificativa puede seguir otra complementaria. Por ejemplo, conociendo de antemano que $f(x)$ es derivable en $x = x_0$ es posible realizar la pregunta ¿cuál es el valor de $f'(x_0)$?, que es indirecta por naturaleza.

Un aspecto importante consiste en el establecimiento de una hipótesis durante la implementación de cualquier acción, de manera que la correspondiente verificación o refutación plantea un problema de forma inmediata. Tales hipótesis pueden responder a juicios simples, ya sean atributivos ("ΔABC equilátero", "$f(x)$ continua", …), relacionales ("todo triángulo es semejante a su triángulo pedal", "$\forall x \in \mathbf{R}$: $g(x) \leq h(x)$", …) o existenciales ("existe el límite de $f(x)$ cuando $x \to x_0$", "existe una infinidad de números primos de la forma $6k + 1$", …); o bien juicios compuestos, los cuales están formados por conectores lógicos de conjunción, disyunción, implicación o equivalencia ("si **n** es un cuadrado perfecto entonces tiene una cantidad impar de divisores enteros y positivos", "si dos rectas son paralelas y una de ellas es perpendicular a un plano, entonces la otra también lo es", …).

La hipótesis sobre el valor de verdad de cierto juicio puede ocurrir de forma repentina, inclusive durante la transformación inicial del objeto. Esto se explica por el grado de sistematización en la ejecución de la acción, de manera que algunas operaciones constitutivas pueden realizarse inconscientemente (hábitos). La formulación no puede verse fuera de la interrelación sujeto–objeto. Además, atendiendo a la forma de develar la esencia del fenómeno, esta actividad mental puede ser predominantemente analítica o sintética.

Las consideraciones anteriores permitirán explicar qué técnicas son empleadas durante la formulación de problemas, lo cual apunta hacia la solución de un importante problema abierto, el cual fue declarado por Kilpatrick hace más de una década (1987b, p. 142) y retomado más recientemente por Silver et al. (1996) y English (1997b). Particularmente, el modelo teórico de la figura 6 se ajusta a varias técnicas, las cuales han sido aisladas y estudiadas por otros autores. Por ejemplo, Pòlya (1957) consideró el intercambio de los papeles que desempeñan los datos y la incógnita, la variación de ciertos elementos, la generalización, la limitación, la utilización de analogías, así como descomponer y recomponer un ejercicio resuelto. Todas ellas se enmarcan en una técnica más general, revelada por Silver (1994, p. 19), y que consiste en obtener un nuevo problema a partir de otro ya resuelto.

Por su parte, Brown y Walter (1990) proponen dos técnicas muy amplias: "accepting" (aceptar lo dado, p. 16) y la muy conocida "what–if–not" (¿qué–si–no?, p. 30). Finalmente, Kilpatrick (íbíd., pp. 136–139) reconsidera la analogía, la generalización y la contradicción (que incluye el "what–if–not" y su variante "what–if–more", comunicada por Kaput en una correspondencia personal). También este autor añade la asociación (vinculándola a una idea de Novak y Gowin sobre el concepto función como proceso cognitivo) y "otros procesos" (tomar las características de dos conceptos y formar su producto cartesiano o bien su intersección, entre otras). En sentido general, un análisis exhaustivo sobre cada una de las técnicas anteriores rebasa las fronteras de este trabajo. No obstante, un estudio detallado ha sido realizado por Pòlya (1981), Mason et al. (1982, p. 141–154), Sarygin (1991), Brown y Walter (1993, con una colección de 30 artículos), y Cruz (1998 y 2000).

No es común que las técnicas anteriores tengan lugar de forma aislada, en general se aplican de manera combinada, aunque una puede predominar sobre las demás. A continuación se describe cómo podría aplicarse la segunda técnica de Pòlya (considerar variables ciertos elementos del ejercicio), siguiendo el esquema de la figura 6. En efecto, supóngase que el objeto seleccionado consta de tres circunferencias, tangentes exteriores dos a dos (véase la figura 7). Dos de ellas tienen radio unitario y todas están inscritas, respectivamente, en cada ángulo de un triángulo isósceles de base b = 5. En un problema ya resuelto se pedía calcular el radio R de la circunferencia que no es tangente a la base. Durante la clasificación se separan los componentes (circunferencias, lados, ángulos, regiones, …) y entonces tiene lugar la técnica "what–if–not", en el sentido de renunciar al objeto y efectuar transformaciones.

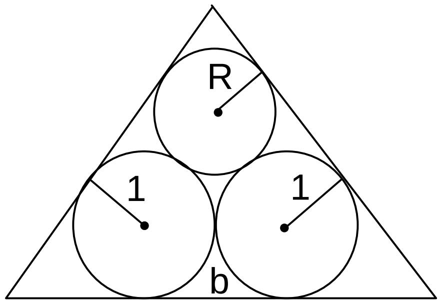


Figura 7. *Un ejemplo de la aplicación de una técnica*.

El nuevo objeto puede resultar de una generalización inmediata, donde la longitud de la base es una magnitud variable. Ahora se asocian varios conceptos, particularmente a la base se le hacen corresponder los conceptos "tangencia", "longitud", etcétera. Por analogía con la pregunta original, es posible analizar la dependencia que subyace entre b y R. Particularmente, la búsqueda del dominio de $R = R(b)$ conduce a plantear, como problema, una interpretación geométrica: ¿para qué valores de b es posible inscribir las tres circunferencias?. Paralelamente pueden emerger otras interrogantes como: ¿es R biyectiva?, ¿cuál es el valor mínimo que puede alcanzar el área de la región interior al triángulo y exterior a las circunferencias?, etcétera.

Por otra parte, el sujeto necesita tener pleno conocimiento de las técnicas y estrategias que emplea, así como de sus fortalezas y debilidades para la ejecución de estas (metaconocimiento). También es necesario que se planifique, oriente y evalúe cada acción o conjunto de acciones (control ejecutivo), a fin de autorregular todo el proceso de formulación. Vista de esta manera, una estrategia es esencialmente metacognitiva (Santos, 1993, p. 162).

Particularmente, una propuesta sistemática sobre cuándo y cómo hacer uso de cada técnica, requiere de un agrupamiento en subconjuntos afines. Estos últimos constituyen estrategias más generales, como aceptar o no lo dado (Brown y Walter, 1990), y obtener un problema a partir de una nueva situación o sobre la base de otro ya resuelto (Silver, 1994). Sin embargo, estas clasificaciones dicótomas son tan amplias que dificultan la concreción de una propuesta operativa para el sujeto. Es por ello que se propone una tipología procedimental, compuesta por técnicas algorítmicas, lógicas y heurísticas. Su origen subyace sobre la analogía que se ha establecido (véase § 1.3), entre el proceso de formulación y los procedimientos para la resolución de problemas.

Las **técnicas algorítmicas** se estructuran por sucesiones de operaciones fijadas de manera unívoca. Su uso es conveniente cuando es necesario elaborar clases de problemas, donde la representación formal de la solución está claramente predeterminada. Sirve de ejemplo la obtención de ecuaciones polinómicas de tercer grado, cuyas soluciones satisfacen ciertas condiciones (una real y el resto complejas, exactamente una natural, con interdependencia funcional, …). En este caso se parte de la factorización final, con la subsiguiente eliminación de paréntesis y la reducción de términos semejantes; o bien se aplican las fórmulas de Vieta.

El hecho de que la formulación se realice de manera algorítmica no indica que la resolución tenga que serlo necesariamente para el estudiante. En Cruz (2000) el autor muestra cómo ciertos teoremas del Análisis Diofántico pueden servir para elaborar ecuaciones lineales o cuadráticas, con una cantidad prefijada de soluciones enteras y positivas, en cuya resolución basta aplicar un tanteo inteligente. Para llevar a cabo estos tipos de estrategias es necesario:

1. Identificar si el problema a elaborar pertenece a una clase resoluble algorítmicamente.
2. Determinar todos los algoritmos regresivos posibles (entre el resultado final y la proposición original), así como teoremas e interpretaciones afines.

3. Formalizar el algoritmo más sencillo, común a toda la clase.

Puede tomarse como ejemplo los sistemas de ecuaciones lineales de 3×3, los cuales pertenecen a la clase más amplia de sistemas lineales de $m\times n$, resolubles algorítmicamente por el método de Gauss. Como procedimiento regresivo puede elegirse el algoritmo inverso que resulta de elaborar ecuaciones de una, dos y tres variables (en el caso de haber aplicado el método de eliminación), las cuales pueden ser objeto de combinaciones lineales; o bien un algoritmo asociado a la regla de Cramer; o aun uno más sencillo, consistente en: partir del conjunto solución, tomar por coeficientes los elementos de una matriz regular y sustituir dicho conjunto en el vector columna, para obtener los términos independientes. La selección de este último procedimiento genera nuevos problemas de carácter práctico, como la necesidad de ciertos métodos para obtener matrices no singulares. Uno de ellos podría ser: tomar dos números reales diferentes y formar la correspondiente matriz de Vandermonde.

Las **técnicas lógicas** son aquellas que hacen abstracción de los objetos y relaciones, transformando los mismos según las leyes de la Lógica Formal (no de la Lógica Dialéctica que, al no hacer abstracción del contenido, está presente siempre). Su uso es frecuente cuando es necesario elaborar problemas relacionados con ecuaciones, identidades, inferencias, figuras geométricas, gráficos, y en general con cualquier objeto o relación cuyos rasgos faciliten transformarlo. Ejemplos de estas técnicas son la generalización, limitación, formación de recíprocos, búsqueda de proposiciones equivalentes (ganancia de premisas, leyes de D' Morgan, contrarrecíprocos, etcétera), negación de una proposición cuantificada, entre otras. Para llevarlas a cabo es necesario:

1. Determinar los rasgos distintivos del objeto o fenómeno.
2. Analizar qué operaciones lógicas son factibles efectuar, según los rasgos determinados.
3. Seleccionar una operación conveniente, atendiendo a la experiencia acumulada en esta actividad.
4. Aplicar la operación.

He aquí un ejemplo, relativo a la generalización, propuesto en Cruz (1998). Para fijar las ideas considérese el problema de hallar todas las soluciones naturales de la ecuación en dos variables $x^2 + (x + 1)^2 = z^2$. En este caso es factible generalizar transformando el enunciado. Efectivamente, la orden puede exigir que la solución se busque sobre un conjunto más amplio, por ejemplo, sobre **Z** (que conduce a un problema ligeramente más difícil) ó **R** (que conduce a un problema más sencillo). Por otra parte, es posible generalizar la expresión formalizada de la ecuación.

A continuación se aducen tres ejemplos, en los cuales se precisará cuál es el indicio especificativo. Para ganar en claridad es necesario modificar un tanto el planteamiento del problema: *La suma de los cuadrados de dos números naturales consecutivos es también un cuadrado. Hallar estos números*.

a) Al suprimir el indicio "consecutivos" queda planteado el problema de resolver la ecuación pitagórica $x^2 + y^2 = z^2$.
b) Cambiando el indicio "los cuadrados" por su generalización "la potencia n–ésima" resulta la ecuación de Fermat $x^n + (x + 1)^n = z^n$.
c) Cambiando el indicio "dos" por "y" cuadrados consecutivos, resulta la ecuación

$$x^2 + (x + 1)^2 + \ldots + (x + y - 1)^2 = z^2.$$

Si se trata de resolver en **N** la ecuación obtenida en (c) se observará que es un problema muy difícil. Esto sucede con frecuencia al generalizar, por lo que resulta recomendable combinar esta estrategia con su antítesis. Así, limitando, no necesariamente se regresa al problema original. En efecto, durante la V Olimpiada Mexicana de Matemática (1991) se mostró que:

a) Si se toman para la variable "y" los valores 3, 4 y 5, entonces no existe solución.
b) Si se hace $y = 11$ resulta $x = 38$, $z = 143$.

Finalmente, las **técnicas heurísticas** son aquellas que por naturaleza se vinculan más a la búsqueda, al acto de descubrimiento. Su uso es común cuando es necesario explorar propiedades intrínsecas de los objetos y fenómenos, así como la interrelación subyacente entre estos y otros no necesariamente dados. Figuran como ejemplos la analogía, la contradicción, la variación de algunos elementos dentro de cierto rango, la asociación (asociar los problemas relativos al concepto función al estudio del concepto derivada, asociar los triángulos isósceles a matrices de 2×2, …), y formar la intersección entre las características de dos conceptos (¿qué tienen en común los números complejos y las circunferencias?, ¿qué tienen en común el reticulado $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ y el conjunto $\mathbf{Q}$?, …). La puesta en práctica de estos tipos de técnicas presupone:

1. Seleccionar elementos característicos del objeto o fenómeno.
2. Determinar propiedades o relaciones inmanentes, así como la posibilidad de transferir estas a otros objetos y fenómenos.
3. Analizar las propiedades y relaciones que ofrezcan mayores posibilidades.

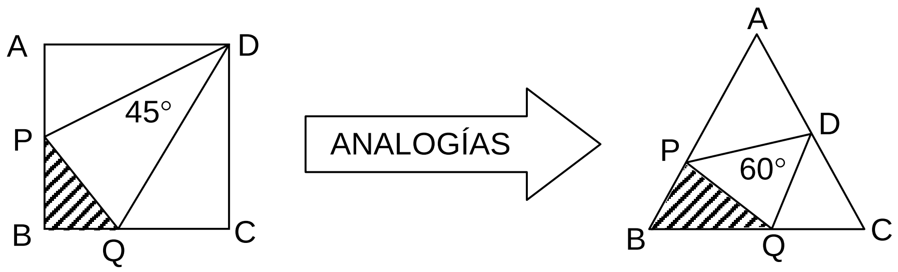


Figura 8. La *utilización de analogías durante la formulación de un problema*.

Considérese un ejemplo, relativo a la utilización de analogías (véase la figura 8). Partiendo del cuadrado ABCD de lado unitario, con $P\in AB$, $Q\in BC$, $\angle PDQ = 45°$, se pide calcular el perímetro del ΔPBQ. Es fácil demostrar que la incógnita es constante para toda posición admisible del ángulo. Tomando este problema como prototipo es posible considerar otros análogos, ora por sus propiedades, ora por sus relaciones. Ochoa estudió la posibilidad de que en el triángulo equilátero ABC subsistiera un fenómeno similar. Después de ubicar el vértice del ángulo PDQ en varias posiciones, descubrió que si este coincidía con el punto medio del lado AC y la amplitud se fijaba en 60°, entonces el perímetro del ΔPBQ también era constante. De esta manera quedó planteado un problema análogo, tanto por sus propiedades como por sus relaciones internas.[14]

En sentido general, la tipología anterior no constriñe cada técnica a su grupo en particular, pues en ocasiones es posible comprender una de naturaleza lógica como

[14] Ochoa, R. (1998) Problema 18. En: *Siproma*, Vol. 2, No. 3, p. 22.

algorítmica o heurística y viceversa. Esto revela el carácter relativo que le es inherente a la tipología aducida. Tampoco es posible afirmar que esta tipología comprende cualquier técnica. Si bien abarca todas las que registra la literatura, subsiste la posibilidad de que surja en el futuro alguna técnica de naturaleza diferente y, con ello, la necesidad de una eventual ampliación.

La formulación de un problema haciendo uso de cierta técnica no presupone un camino único, inclusive subsiste la posibilidad de que personas diferentes logren resultados idénticos haciendo uso de técnicas de distinta naturaleza. Por ejemplo, la analogía puede conducir de la problemática del cálculo de la diagonal del cuadrado al cálculo de la diagonal del hexágono regular (ambos son polígonos regulares, en ambos casos se trata de la longitud del diámetro de la circunferencia circunscrita, …), sin embargo, un idéntico resultado sigue de razonar por generalización–limitación (considerar el n–ágono regular convexo y luego analizar el caso particular n=6).

§ 2.2 Metodología para caracterizar el proceso de formulación

Muchos autores han desarrollado diferentes metodologías para caracterizar el nivel de desarrollo del proceso de resolución de problemas (Schöenfeld, 1985; Stephens y McCrae, 1995; Tonelli y Zan, 1995; Tajika et al., 1997; Llivina, 1999; Ferrer, 2000; Stacey y Scott, 2000). En general, las mayores dificultades han sido experimentadas en el caso de la resolución de naturaleza creativa. Según McCrae y Stacey, “la solución de un problema puede denominarse ‘creativa’ si algunos elementos de la respuesta han sido inventados por el resolutor o si el método de solución le resulta abierto” (1997, p. 40).

En un proceso de resolución de tal naturaleza se expresa el vínculo de los aspectos cognitivos y afectivos de la personalidad (Betancourt, 1995a, p. 4). Su análisis integral demanda la consideración de una pluralidad de dimensiones, entre las que se destacan la creatividad de la autodirección y del método empleado, la poca familiarización con las técnicas empleadas y el contexto, el tiempo consumido, etcétera (Stacey y McCrae, 1998, pp. 27–28; cf. Ferrari y Sforzini, 1995). Por tanto, la caracterización del proceso de formulación de problemas, como caso especial del vinculado a la resolución de problemas abiertos, es sumamente compleja. Esto no quiere decir que sea imposible la aproximación a una valoración objetiva del mencionado proceso, para lo cual a continuación se propone una metodología específica.

La formulación de problemas es un proceso predominantemente cognitivo, como han mostrado Leung (1993) y Llivina et al. (2000), aunque intervienen otros procesos emocionales y volitivos en unidad dialéctica. Esto sugiere abordar su caracterización a partir de la dimensión ejecutora, considerando tanto el resultado obtenido como el contenido y la forma en que la estrategia tuvo lugar. El marco teórico ha permitido caracterizar la formulación de problemas como un proceso cognitivo, asociado a la resolución de ciertos problemas abiertos. Este proceso se ha caracterizado por tres componentes: el sistema de procesamiento, el contenido procesado y el resultado.

Con el objetivo de operacionalizar la variable dependiente de la hipótesis, es necesario deslindar los indicadores que permiten caracterizar el proceso de formulación. En total son tres: dos procesales, relacionados con la implementación de la estrategia y con la metacognición; y uno terminal, referido al problema formulado. Particularmente, el contenido se considerará inmerso en todos ellos, conjuntamente con las creencias y concepciones. Así será posible enfocar de manera holística la caracterización cualitativa del proceso estudiado.

Existen diversas escalas de evaluación, en el campo de la resolución de problemas. Sin embargo, en lo referido a la formulación, la literatura consultada no registra análisis alguno. Es por ello que se propone, en cada caso, una escala cualitativa de tipo ordinal (bajo–medio–alto), la cual deberá perfeccionarse en investigaciones posteriores (en cuanto a la pertinencia de cada indicador y su respectivo refinamiento, principalmente). Todos los criterios se sustentan en analogías respecto a estudios similares, en el ámbito de la resolución de problemas (Schöenfeld, 1985; Dowker et al., 1996; Silva, 1999; Llivina, 1999 y 2000; Nunokawa, 2000; Stacey y Scott, 2000; De Corte et al., 2001; Kratochvílová, 1998 y 2001; Martínez–Cruz y Contreras, 2001).

Primer indicador: La estrategia.

Para evaluar este indicador es necesario recurrir a dos elementos sustanciales. El primero se refiere a la fluencia en las técnicas utilizadas, y el segundo a la logicidad con que estas tienen lugar. Un instrumento adecuado ha sido elaborado por Schöenfeld (1985), se trata de los “episodios gráficos” en la resolución de problemas. En este caso debe realizarse un pequeño ajuste, pues se parte de una situación vinculada a un objeto o relación (cf. Labarrere, 1980). Seguidamente se orienta al estudiante que formule un problema asociado a dicha situación, destacando la posibilidad que tiene de transformarla. La actividad será grabada, lo cual favorece la mayor exactitud en el análisis ulterior (en caso de no realizar la grabación utilizando cinta de vídeo, sino cinta magnetofónica, se orientará también no borrar lo escrito, procediendo simplemente a tacharlo).

En todo momento debe crearse un clima agradable, donde el alumno exprese verbalmente sus ideas. El experimentador tomará nota de sus observaciones, lo cual se complementa con la información escrita y la grabación; también podrá interaccionar con el estudiante siempre que lo considere necesario. Posteriormente se confeccionará un diagrama similar al que aparece a continuación. Se trata del producto cartesiano entre las seis acciones demarcadas en la figura 6 y el tiempo que demora su ejecución.[15]

Estos diagramas permiten comprender mejor la logicidad de la estrategia, así como las dificultades que experimentan los estudiantes durante su ejecución (Tonelli y Zan, 1995; Stacey y Scott, 2000; Siñeriz, 2000). Por ejemplo, en el caso ilustrado en la figura 9 el estudiante no encontró grandes obstáculos en el transcurso de las dos primeras etapas; sin embargo, durante la asociación comenzó a experimentar ligeras dificultades con la toma de decisiones. Al interaccionar con él fue posible que pasara a buscar relaciones convenientes, pero una síntesis inadecuada de la información lo condujo a plantear una pregunta que no tenía sentido. Después de unos segundos fue posible observar la ausencia de un examen retrospectivo, lo cual fue constatado con un nuevo diálogo.

[15] En el caso de la resolución de problemas, Schöenfeld lo hace considerando el modelo de Pòlya enriquecido (al desglosar la comprensión en lectura, análisis y exploración) y el tiempo.

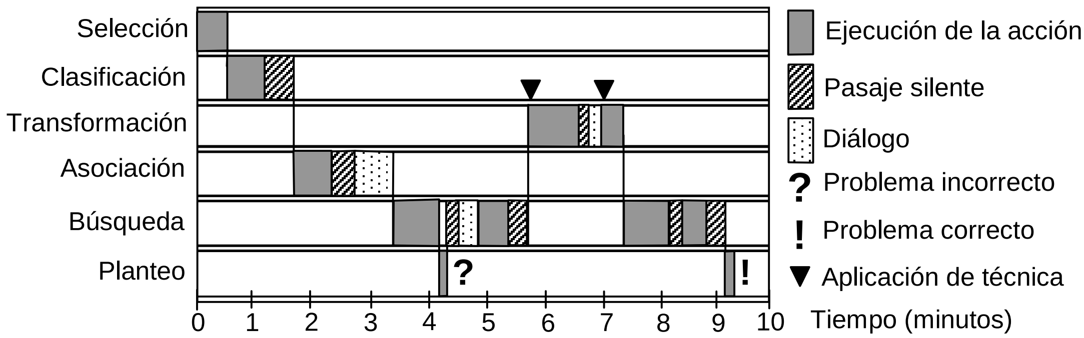


Figura 9. *Diagrama de Shöenfeld en la formulación de problemas*.

Al continuar la búsqueda y no encontrar relaciones decidió, por sí mismo, transformar el objeto dado. Aquí mostró habilidades al respecto, pues la nueva búsqueda lo condujo al planteo de un problema después de unos dos minutos. Particularmente, el tiempo total se corresponde con la sencillez del objeto propuesto y las relaciones analizadas. La simplicidad se acentuó aún más con la transformación que tuvo lugar, la cual fue originada por la doble aplicación de la técnica lógica de limitación.

Estos diagramas son una evidencia de que la estrategia propuesta no está constreñida a un orden rígido de sus acciones. La forma en que esta transcurre varía de un sujeto a otro, inclusive un mismo individuo puede obrar de maneras diferentes en dependencia de la situación dada. Además, a pesar de que la selección de las técnicas pone de relieve ciertos cambios de contenido, esto no es óbice para dejar de considerar la estrategia como tal, pues tales cambios no alteran el conjunto de las acciones. Es necesario señalar que aun prescindiendo de la grabación, es posible recopilar información valiosa. En este caso, el instrumento coincide simplemente con la conocida técnica de "pensar en voz alta".

A continuación se propone otro instrumento, a partir de una idea de Silver et al. (1996). Consiste en proporcionar la situación en una hoja de trabajo. Después de un tiempo adecuado para la formulación se orienta resolver el problema formulado en otra hoja de trabajo, donde el estudiante tiene la posibilidad de realizar algunos cambios pertinentes en el problema, justificando las razones que lo condujeron a ello (en esto reside la modificación realizada).

A continuación el experimentador analiza los trabajos y luego entrevista a cada estudiante para complementar la información, pidiendo en cada caso que describa cómo formuló su problema. Una variante más compleja de este instrumento consiste en añadir una tercera hoja de trabajo, orientando la formulación de otros problemas vinculados a la situación original. Esto saca a colación los problemas originados durante y después de la resolución. Silver et al. (ibíd.) logran obtener mayor información tras pedirle al estudiante que especifique en cuál de los dos momentos surgió cada problema. En todos los casos el experimentador podrá profundizar en la importante interacción 3–4 del esquema propuesto en la figura 5 (§ 1.3).

Una vez que la información ha sido registrada es posible evaluar este primer indicador, sobre la base de los siguientes criterios. En primer lugar, se asume que el indicador es **bajo** si el estudiante:

1) Omite, por lo menos, una acción (por ejemplo, inicia la búsqueda sin antes asociar).
2) Encuentra muy pocos componentes durante la clasificación (regularmente hasta dos, pero el número es relativo y depende del objeto asociado).
3) Asocia, a lo sumo, una propiedad por cada componente.
4) No aplica ninguna técnica.
5) No encuentra ninguna relación o dependencia durante la etapa de búsqueda.
6) No intenta resolver el problema.

Por su parte, el indicador será **medio** si:

1) Ejecuta todas las acciones, con excepción de la transformación (ejecución lineal de la estrategia).
2) Encuentra algunos componentes durante la clasificación (regularmente tres o cuatro).
3) Asocia una o dos propiedades por cada componente.
4) Aplica, exclusivamente, técnicas algorítmicas; o bien una lógica, exceptuando la generalización.

5) Encuentra exactamente una relación o dependencia.
6) Trata de resolver el problema pero, cuando no lo consigue, tampoco efectúa transformaciones, ni trata de detectar un posible error.

Finalmente, se establece que el indicador es **alto** si:

1) Ejecuta todas las acciones correctamente.
2) Encuentra varios componentes durante la clasificación (regularmente cinco o más).
3) Asocia, por lo menos, dos propiedades por cada componente.
4) Aplica dos o más técnicas de diferente naturaleza; o bien exactamente una, entre la generalización y la analogía.
5) Encuentra, por lo menos, dos relaciones o dependencias.
6) Resuelve exitosamente el problema, inclusive después de haberlo transformado por causa de alguna dificultad (error en los datos, falta de conexión entre lo dado y lo buscado, imposibilidad de resolver la interrogante original, entre otras).

Segundo indicador: La metacognición.

El término “metacognición” (más allá de la cognición) fue introducido por Flavell a mediados de la década del 70, a raíz de sus estudios sobre la memoria. Desde entonces este concepto ha experimentado una evolución notable. En el ámbito de la resolución de problemas, la metacognición aparece aplicada a los propios procesos cognitivos, deslindando un campo de investigación diferente del constituido por el estudio del conocimiento humano sobre la cognición en general. En este caso, el término se refiere a la unidad dialéctica que existe entre el metaconocimiento y el control ejecutivo (Schöenfeld, 1992; Santos, 1993; Labarrere, 1996; Llivina, 1999; Silva, 1999).

La formulación de problemas requiere de una actividad metacognitiva específica, la cual puede ser caracterizada a partir de la información sustraída de los instrumentos anteriores. En efecto, el metaconocimiento puede ser descubierto a partir de la información escrita y de las respuestas a preguntas como: ¿qué haces?; ¿por qué haces eso?; ¿tienes dominio de esa técnica?, ¿por qué?; ¿puedes aplicar otra técnica?. Por su parte, el control ejecutivo puede develarse a partir de la observación directa (orden de las operaciones, claridad en la representación del razonamiento, limpieza en pizarra u hojas de trabajo) y de las respuestas a preguntas como: ¿en qué piensas?; ¿has comprendido la tarea?; ¿qué planeas hacer?; ¿cómo valoras lo que has hecho?, ¿por qué?.

Es necesario significar que los dos tipos de interrogantes no solo complementan la información, sino que pueden generar respuestas de uno u otro tipo indistintamente, o de ambos inclusive. Esto alerta al experimentador de la necesidad de ser hábil interrogando y controlando los resultados. Una vez que estos últimos han sido registrados es posible evaluar el segundo indicador, para lo cual se tomarán los siguientes criterios. En primer lugar, se asume que la metacognición tiene un desarrollo **bajo** si el sujeto:

1) No se traza un plan.
2) Demora en contestar cuando se le pregunta.
3) No lleva un orden coherente en la representación de sus razonamientos.
4) No justifica la aplicación de las técnicas, o bien las causas de su accionar.
5) No es flexible cuando está atascado (no cambia de objeto o no lo transforma, no busca otras relaciones o nuevos problemas, no establece asociaciones, entre otros).
6) No comprueba sus acciones; o bien trabaja a partir de un error sin lograr detectarlo.

En segundo lugar, el desarrollo será **medio** cuando:

1) Se traza un plan, pero no fundamenta el por qué de las acciones que va a ejecutar.
2) Se esfuerza por explicar cuando se le pregunta, pero no logra hacerlo de manera fluida.
3) Se esmera por ser ordenado, aunque no lo consigue siempre.
4) Logra fundamentar, exactamente, la aplicación de una técnica (o bien la imposibilidad de hacer uso de ella).
5) Es flexible de manera ocasional, cuando está atascado.
6) No siempre detecta sus errores, ni comprueba los pasos que realiza.

Finalmente, el desarrollo será **alto** siempre que:

1) Elabora un plan y lo fundamenta.
2) Explica de manera fluida y coherente.
3) Es ordenado y se esfuerza por hacer inteligible la representación de los pasos seguidos.
4) Logra fundamentar, por lo menos, la aplicación de dos técnicas (o bien el uso de una y el no uso de otra).
5) Siempre es flexible cuando está atascado (logrando transformar el objeto, asociando nuevas propiedades, buscando nuevas relaciones y problemas, entre otros).
6) Frecuentemente desarrolla un análisis retrospectivo de sus razonamientos, detectando posibles errores o el origen de sus atascos.

Tercer indicador: El problema propuesto.

El resultado final queda definido por el problema planteado. En este se manifiestan dos elementos fundamentales: la profundidad y la originalidad. Según Llivina (1999), el primero se refiere al grado de penetración en la esencia de los hechos y fenómenos, buscando generalizaciones, leyes, regularidades; y a la tendencia a sintetizar lo relevante, haciendo abstracción de lo menos significativo. Por su parte, el segundo se expresa en la cantidad de ideas y opciones inusuales que el sujeto puede generar ante una situación determinada, y por la posibilidad de elaborar soluciones novedosas ante diferentes disyuntivas.

Un problema puede ser poco profundo y a la vez muy original, como es el caso del problema cerrado propuesto por Posamentier y Stepelman (retomado en el § 1.1); pero también puede suceder lo contrario en extremo, como plantear la necesidad de generalizar el teorema de Pitágoras sobre el plano (Brown y Walter, 1990, pp. 109–111), problema que, a pesar de ser muy difícil, no es original por cuanto la búsqueda de generalizaciones es parte indisoluble de la Matemática.

La profundidad es una manifestación del pensamiento lógico desplegado durante la estrategia. La originalidad constituye el par dialéctico, por constituir una manifestación del pensamiento creativo que ha tenido lugar (Than, 1996, p. 182).

Esto revela la necesidad de educar ambos tipos de pensamientos, lo cual constituye un reto y enseñar a formular problemas es parte de ese reto (Leung, 1997; Silver, 1997). La enseñanza de la Matemática ha enfatizado históricamente la deducción lógica, en detrimento del pensamiento divergente. Esto constituye un grave error, pues la creatividad es indisoluble de esta ciencia (Pehkonen, 1997, p. 63).

En Cruz (1998) el autor ha establecido una tipología para los ejercicios escolares, atendiendo a la profundidad y originalidad contenida en estos. En primer lugar figuran los **mal concebidos**, caracterizados por la presencia de errores lógicos en su concepción o por la ausencia de correlación entre lo dado y lo buscado. Le siguen los ejercicios **triviales**, en cuya resolución basta realizar un cálculo directo, o bien aplicar una fórmula o una identidad sin antes efectuar transformaciones.

En tercer lugar aparecen los ejercicios **sencillos**, los cuales requieren de un razonamiento intermedio antes de obtener el modelo matemático correspondiente. A diferencia de los anteriores, es posible encontrar aquí algunos elementos originales de naturaleza extramatemática, como ciertas complicaciones lógico–lingüísticas. Un ejemplo típico lo constituyen los problemas con texto (en el sentido de Jungk, 1981), conducentes a un sistema en forma directa. Más sofisticados aún son los ejercicios **moderados**, caracterizados por exigir la aplicación de una identidad, la realización de construcciones auxiliares simples (sin trazar más de un segmento o una circunferencia), así como transformaciones algebraicas no equivalentes y cálculos intermedios. Sirven de ejemplo las ecuaciones cuya resolución introduce raíces extrañas, las cuales deben ser discriminadas posteriormente.

En penúltimo lugar figuran los ejercicios **difíciles**, caracterizados por requerir la transformación geométrica de un triángulo, cuadrilátero o circunferencia; el trazado de un plano auxiliar en el cálculo de cuerpos; la demostración de identidades, tras la aplicación reiterada de otras más elementales; o bien la modelación a través de funciones, para el análisis de valores críticos. Finalmente, aparecen los ejercicios **muy difíciles**, caracterizados por la necesidad de realizar una conjetura que debe ser demostrada (v. gr., por inducción completa), la aplicación combinada de transformaciones geométricas, la realización de varias construcciones auxiliares, así como la aplicación sistemática de diversos contenidos.

El carácter relativo del concepto “problema” (véase § 1.1) le facilita una posible correspondencia con toda la tipología anterior. En efecto, un ejercicio sencillo planteado por un estudiante puede catalogarse como un problema para él. Así, dicha tipología genera una demarcación cualitativa de los problemas escolares, con la peculiaridad de constituirse como escala de tipo ordinal. El refinamiento conseguido (en seis categorías) mejora dos veces las escalas anteriores. Sin embargo, esta falta de uniformidad puede complicar innecesariamente el análisis estadístico. Por tal motivo, se considera adecuado caracterizar el tercer indicador de la siguiente manera: bajo si el problema está mal concebido o es trivial, medio si es sencillo o moderado, y alto si es difícil o muy difícil.

Después de haber evaluado cada indicador, es posible entonces caracterizar el proceso de formulación. Para lograrlo debe desecharse la idea metafísica del todo como la simple suma de sus partes, o sea, no basta la evaluación cualitativa de cada indicador por separado, sino que es necesario valorar también el proceso en su plenitud. Su carácter holístico revela que son las partes las que por su inserción en el todo reciben significado. La totalidad no se explica por las partes, sino que se manifiesta a través de ellas (Fuentes et al., 1998, p. 33). Por este motivo, lejos de establecer una escala cuantitativa sobre la base de las 27 variaciones de tres en tres (de acuerdo con las tres categorías establecidas), se conformará una escala cualitativa sobre la base del nivel de jerarquía e interdependencia de cada indicador.

Así, atendiendo a la estructura de la estrategia resumida en la figura 6 (§ 2.1), se considera que la caracterización del proceso de formulación debe comenzar por el análisis de la calidad con que las técnicas transcurren. No es posible plantear un problema original sin implementar una estrategia fluida, como tampoco es posible plantear uno profundo sin una estrategia impregnada de logicidad. De la misma manera el desarrollo de la metacognición no puede establecerse sobre un razonamiento lineal, incoherente o superficial.

Por estas razones, se asume que el nivel de desarrollo del proceso de formulación es bajo si la estrategia también lo es. Para que se enmarque en un nivel medio es necesario que dicho indicador alcance ese mismo nivel, excluyendo el caso en que el resto de los indicadores es bajo. De la misma manera, si la estrategia se ubica en un nivel alto pero el resto de los indicadores es bajo, también se dirá que el desarrollo es medio. En el resto de los casos, donde el primer indicador es alto y a lo sumo uno de los restantes es bajo, se asumirá que el desarrollo es alto. En resumen, el nivel de desarrollo del proceso de formulación coincidirá con la caracterización del primer indicador salvo dos excepciones: será bajo si este es medio y el resto bajo, y medio si este es alto y el resto también bajo.

En virtud del análisis anterior podría parecer que la evaluación de los dos últimos indicadores es poco significativa. Sin embargo, esto no es así, pues los mismos ayudarán a diagnosticar las dificultades de cada estudiante, de manera que el proceso pueda perfeccionarse constantemente. Esto refuerza la posición asumida sobre la génesis del desarrollo cognoscitivo humano, sintetizada en la figura 2 del § 1.1.

§ 2.3 Indicaciones metodológicas para el aprendizaje de la estrategia

A fin de favorecer el nivel de desarrollo del proceso de formulación, ha sido develada una estrategia metacognitiva que engloba disímiles técnicas. Sin embargo, esto no es suficiente, pues este proceso forma parte de la actividad cognitiva de un sujeto, la cual no puede aislarse del medio natural donde ocurre. En este caso se trata del proceso enseñanza–aprendizaje del profesor de Matemática–Computación de los ISP.

Con marcada regularidad los principales trabajos han conceptuado ambientes de aprendizaje para los niveles escolares básicos (Labarrere, 1980; Anta, 1995; López et al., 2000), siendo bastante pobre en la enseñanza superior (Muñoz, 1999) y más aún en la formación del personal docente (González, 2001b). A pesar de esto, en sentido general, la formación inicial y permanente ha sido abordada por muchos autores (Blanco, 1991; Hodgson, 1995; Frykholm, 1996; Verschaffel et al., 1997; Bright, 1998; Santana, 1998; Llivina, 1999; Kahane, 2000; Garcés, 2002).

En los ICME esta temática ha experimentado un creciente interés, desde la celebración del tercero de ellos (Karlrühe' 1976), a partir del cual se empezó a constituir un grupo específico para el análisis del tema. En esta ocasión se plantearon algunos dilemas de forma previsora para futuras investigaciones, relacionadas con la dialéctica teoría–práctica y con la profesionalización del matemático como docente. Seguidamente, en el ICME 4 (Berkeley' 1980) se acentúa el estudio de las dicotomías componente matemático / componente psicopedagógico y formación práctica / formación teórica.

En el quinto congreso (Adelaida' 1984) se preconizó la búsqueda de una formación holística, reconociendo por primera vez el papel de las creencias del estudiante. A continuación, en el ICME 6 (Budapest' 1988), los principales trabajos fueron dirigidos hacia la preparación de los futuros profesores para afrontar el continuo cambio curricular, las nuevas ramas de la Matemática, las influencias de las modernas tecnologías, y las transformaciones en la metodología de esta ciencia.

En el séptimo congreso (Quebec' 1992) se analiza cómo la reforma surgida a raíz de los *Estándares Curriculares* repercute en la formación de profesores. Allí se le concedió un mayor protagonismo al maestro en la toma de decisiones sobre lo que se debe enseñar y la forma de hacerlo. Es notable que en esta ocasión se analizó la naturaleza cíclica del cambio en la práctica de enseñanza, pues los estudiantes (en general) provienen de la instrucción tradicional y deben enfrentar los programas de formación inicial que intentan planteamientos más abiertos de enseñanza y aprendizaje, pero cuando el recién graduado llega a la escuela entra en contacto directo con una situación que propicia la instrucción directa.

Con la universalización del "World Wide Web" en Internet, los dos últimos congresos han sido los más difundidos. El ICME 8 (Sevilla' 1996) fue uno de los más importantes, en él se conformaron dos grupos de trabajo sobre la formación del profesorado. Uno estaba dirigido hacia la aplicación de las modernas tecnologías informáticas en esta formación, reconociendo que el "cómo aplicarlas" es más importante que ellas en sí mismas. También se reconoció la necesidad de incrementar la colaboración internacional y la utilización de Internet en un futuro cercano. Un tema de discusión giró en torno a las preguntas: ¿qué es una buena enseñanza? y ¿puede esta ser evaluada?. En general, hubo consenso respecto a la insuficiencia de la preparación matemática de estos estudiantes, y en cuanto a la necesidad de desarrollar en ellos una actitud más positiva hacia la Matemática, preparándolos para *plantear y resolver problemas*.

Finalmente, en el ICME 9 (Makuhari' 2000) se buscó sintetizar las diferentes tendencias y problemas. Además de sistematizar las ideas expuestas en los eventos anteriores, entre los principales hilos conductores se encontraba profundizar en la práctica laboral y estimular que tanto el maestro como el estudiante investiguen. En general, se defendió la idea de que la interrelación profesor–alumno debe simular una interrelación entre colegas.[16]

La formación de profesores en Cuba también ha experimentado la mayoría de las regularidades mundiales, pero al constituirse como parte de un subsistema nacional de educación ha tenido sus propias singularidades. En un período que data entre 1857 (con la apertura de la primera escuela normal para maestros) y principios del siglo XX, no se tiene referencia alguna de preparación orientada hacia la Didáctica de la Matemática.

Según Torres (2000, p. 3), algunos intentos se vislumbraron a la altura de 1904 con los textos *Aritmética. Lecciones preparadas para que sirvan de guía a los maestros en los primeros grados de la enseñanza* (por Carlos Valdés) y *Manual o guía para los exámenes de maestros cubanos. Primero, segundo y tercer grados* (por C. de la Torre et al.). En este último los autores contrastan el método mecánico para introducir el concepto de número con los desarrollados por Pestalozzi y Dewey–McLellan, que se apoyan en la unidad de lo abstracto y lo concreto, y en la intuición, respectivamente. Otro importante mérito de la obra es la exaltación del método heurístico (ídem).

Tanto en el período colonial como en el republicano, muchos insignes pedagogos lucharon por librar la enseñanza de la Matemática del escolasticismo. Sin embargo, solo con el triunfo de la revolución socialista en 1959, comenzó un acelerado

[16] Mayor información sobre estos congresos aparece en http://www.maa.org/editorial/ knot/ICME. html.

proceso de transformaciones económicas, políticas y sociales que propiciaron un enriquecimiento nunca antes visto de la didáctica cubana (Cruz y Aguilar, 2001). Particularmente, la formación universitaria del profesor de Matemática comenzó en el curso escolar 1977–1978 con el denominado Plan de Estudio A, ocurriendo un perfeccionamiento continuo hasta llegar al actual Plan C modificado. Dos análisis detallados y rigurosos de sus fundamentos, aciertos y limitaciones han sido realizados por Santana (1998) y Garcés (2002).

En la concepción cubana de preparación profesional el vínculo de la teoría con la práctica juega un papel esencial, y en correspondencia con ello, la práctica laboral en los ISP ocupa el 62,17% de las horas del Plan de Estudio, mientras en el resto de Iberoamérica este indicador oscila sólo entre el 4,5% y el 10,5% del tiempo disponible (Río et al., 1992). Como parte de la enseñanza universitaria, en las carreras pedagógicas se trabaja el componente investigativo en estrecho vínculo con el académico y laboral. Sin embargo, aunque este se ha reforzado en los últimos años, varios estudios han arrojado que los niveles de desarrollo de las habilidades investigativas todavía son muy bajos (Torres, 2000, pp. 67–69).

También es una experiencia sin precedentes el vínculo de los ISP con los subsistemas educacionales provinciales, para los cuales forman profesores, no solo en la formación inicial que responde a muchos problemas actuales (como es el caso de esta tesis), sino a través de la formación permanente, con diferentes cursos de postgrado, talleres y entrenamientos metodológicos, así como la preparación de profesores adjuntos y tutores para los estudiantes practicantes.

A fin de contribuir al desarrollo educacional, en la actualidad subsisten diferentes grupos de investigación sobre Didáctica de la Matemática, distribuidos por la totalidad de los ISP del país y algunas universidades. Los problemas detectados constituyen objeto del trabajo científico y aparecen registrados en las bases de datos de los programas ramales y territoriales del MINED. Particularmente, esta investigación responde a la deficiente concepción metodológica de la dirección del proceso enseñanza–aprendizaje en todos los subniveles de Educación (problema 4 del banco de problemas provincial), así como a la formación y desempeño del personal docente (programa ramal número 3).

La concreción de esta tesis subyace sobre la aplicación de un ambiente que propicia el aprendizaje de la estrategia propuesta y que, por consiguiente, favorece el desarrollo del proceso de formulación de problemas. Antes de precisar las indicaciones metodológicas que caracterizan este ambiente de aprendizaje, es necesario esclarecer las principales variables relacionadas con el proceso de formulación.

Al ser este último un caso singular del proceso general de resolución de problemas, pueden reconocerse la intervención de tres variables independientes profundamente interrelacionadas: el **sujeto** que resuelve la tarea, la **tarea,** y el **ambiente** en el cual el sujeto resuelve la tarea. Los eventos de resolución de problemas terminan con un **producto**, el cual es conclusión explícita de una serie de **subprocesos** llevados a cabo por el sujeto de manera consciente o inconsciente. Tanto los subprocesos como el producto son variables dependientes de las anteriores. De esta manera, un modelo general y compactado (D' Amore y Zan, 1996, p. 39) es el siguiente:

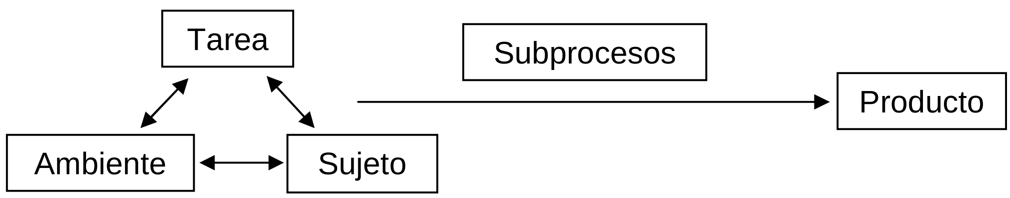


Figura 10. *Variables generales del proceso de formulación.*

Cada una de estas variables está compuesta por una pluralidad de variables más simples. Por ejemplo, en el sujeto pueden ser reconocidas ciertas variables orgánicas que no son susceptibles al cambio (como el sexo y la edad) junto a otras que pueden ser modificadas por procesos tales como la enseñanza (estilos cognitivos, interés, creencias, valores, etcétera). En el caso de la tarea, otras variables describen sus características más significativas, como el contenido (referido a los significados matemáticos), el contexto (referido a los significados extramatemáticos), la sintaxis (que describe los arreglos simbólicos y las complicaciones lógico–lingüísticas) y la estructura (referida a las interrelaciones matemáticas entre los elementos del problema).

Por su parte, el ambiente bajo el cual el sujeto resuelve la tarea no intenta describir la tarea o el sujeto, sino que es externo a ambos. Así, esta variable describe las condiciones físicas, pedagógicas y sociales, en las cuales el evento de resolver problemas toma lugar. Las variables que le son constitutivas incluyen la preparación del maestro, el método de enseñanza, los medios, el currículo, etcétera. Los subprocesos envuelven variables relacionadas con la actuación del individuo durante la resolución de problemas, como los procedimientos heurísticos, los bloqueos experimentados, las técnicas y la metacognición. Finalmente, en vista de que el producto apunta hacia la realización de la solución, subsisten variables afines a este como el tiempo, la corrección o incorrección de la solución, su elegancia, entre otras.

En general, la atención de los investigadores se enfoca sobre una de las variables independientes, estudiando cómo varía el producto o los subprocesos. Otros estudios giran en torno a la interrelación entre las variables independientes, como es el caso de la influencia que tienen ciertos tipos de problemas en las creencias del sujeto. A continuación, en busca de una visión holística del proceso, se tendrá en cuenta la presencia de variables afines a todas las variables generales develadas en la figura 10. Sin embargo, es objetivamente imposible abordar cada una en su plenitud, ni siquiera una sola por separado admitiría tal análisis, pues el proceso enseñanza–aprendizaje tiene una naturaleza muy compleja (Schöenfeld, 2000). Esto conduce a la necesidad de delimitar las principales variables que serán abordadas en este estudio.

La tarea se enmarca en la formulación de problemas, el ambiente está dado por el proceso enseñanza–aprendizaje de la Matemática en la carrera de Matemática–Computación, y el sujeto es el estudiante que transita por la misma. Por otro lado, los subprocesos se refieren a la implementación de diferentes técnicas y a la metacognición; mientras que el producto es el problema ya formulado. La unión dialéctica de las variables dependientes devela el nivel de desarrollo del proceso de formulación, lo cual describe el comportamiento de la variable dependiente de la hipótesis defendida en esta tesis. Por su parte, la unión dialéctica de las tres variables independientes ilustradas en la figura 10, permite comprender mejor la esencia de la variable independiente de dicha hipótesis. En efecto, sobre la base de las consideraciones teóricas abordadas en esta investigación, la enseñanza de la estrategia metacognitiva presupone:

1) Utilizar un conjunto variado de problemas abiertos, complejos, reales (o auténticos) y cuidadosamente diseñados.
2) Aplicar la Enseñanza Problémica a la resolución de problemas en general, así como a la formulación de problemas en particular.
3) Propiciar el cambio de creencias limitativas en el estudiante, con el establecimiento de nuevas normas socio–matemáticas sobre la enseñanza y el aprendizaje de esta ciencia.

English (1997 a y b) ha denominado a una intervención pedagógica similar como "Community of Inquiry" (Comunidad de Interrogación). El programa desarrollado comprende la exploración y clasificación de problemas con texto por los escolares, seguida del análisis de la estructura de los mismos y la modelación de nuevos problemas sobre la base de estructuras existentes. Le sigue la elaboración de problemas a partir de componentes dados, y culmina con la transformación de un problema dado en otros nuevos. Tomando en consideración la especificidad del profesor en formación y el papel de la Práctica Laboral, se proponen cuatro etapas para la enseñanza–aprendizaje de la estrategia metacognitiva en los ISP.

La primera etapa es de **diagnóstico** y presupone la búsqueda de información sobre el grupo y sus diferencias individuales. Los objetivos fundamentales incluyen el análisis de:

1) La motivación por la profesión, con énfasis en la tarea de formular y resolver problemas interesantes. Aunque el proceso estudiado es predominantemente cognitivo, es difícil que tenga lugar a plenitud en un ambiente poco motivado.
2) La formación matemática, que comprende los conocimientos y habilidades alcanzados.

3) El estado actual de la habilidad para resolver problemas. Un vehículo efectivo para el refuerzo del proceso de formulación consiste en vincular sus acciones con el proceso de resolución de problemas, como se ha mostrado en el § 1.2.
4) El nivel de desarrollo del proceso de formulación, para lo cual ha sido establecida una metodología en el § 2.2.
5) Las creencias favorables y desfavorables, las cuales pueden acelerar o limitar respectivamente el aprendizaje de la estrategia metacognitiva.

La segunda etapa es de **preparación**, y tiene la función de asegurar las condiciones previas para el aprendizaje de la estrategia. Sobre la base de las pesquisas anteriores, es preciso implementar tres acciones fundamentales:

1) Propiciar la motivación por la formulación de nuevos problemas, a través de la intelección de su importancia. Es necesario que el estudiante comprenda que la actividad de formular nuevos problemas le permitirá, a su vez, la creación de situaciones atractivas y verdaderamente significativas para motivar a sus futuros educandos por la Matemática. También se requiere que el estudiante comprenda cómo esta actividad contribuye con el desarrollo de su inteligencia y con su conocimiento sobre la estructura de los problemas, y en qué medida fomenta un pensamiento más flexible y diverso, perfecciona sus habilidades para resolver problemas, y mejora su propia confianza y actitud hacia el estudio de esta ciencia.
2) Aplicar la Enseñanza Problémica, a fin de estimular el desarrollo de la habilidad para resolver problemas matemáticos, resaltando el papel de la heurística y la metacognición. Es imprescindible que se cree un clima agradable, donde se intercambien ideas sin temor y se transmitan modos de actuación, así como el interés por esta importante actividad. En general, esta última puede ser dirigida siguiendo el esquema de Pòlya.
3) Propiciar el cambio de creencias limitativas por otras que favorezcan la formulación de problemas. Considerar, por ejemplo, que las demostraciones analíticas son más rigurosas que las geométricas, influirá negativamente en la formulación de problemas tanto analíticos como geométricos. Tal creencia es un

producto de la falta de interrelación disciplinaria, y su inhibición es posible a través de una adecuada sistematización de los conocimientos. Una forma de lograr dicha sistematización consiste en buscar interpretaciones, aplicando los conocimientos de otras disciplinas, lo cual es factible por ser la Matemática una ciencia llena de armonía.

Como penúltima etapa aparece el **aprendizaje**, en la cual se realizan aciones metodológicas dirigidas a favorecer el desarrollo del proceso de formulación de problemas. Se proponen seis en total:

1) Realización de actividades primarias de formulación, detectando errores y explicando la necesidad de aplicar estrategias metacognitivas.
2) Enseñanza explícita de las técnicas, siguiendo la tipología del § 2.1 con sus respectivas recomendaciones.
3) Aplicación de técnicas de igual naturaleza, sobre la base de la estrategia general del esquema propuesto en la figura 6 del § 2.1.
4) Implementación combinada de los diferentes tipos de técnicas.
5) Elaboración de los problemas siguiendo las etapas develadas en la figura 5 del § 1.3.
6) Resolución de problemas propuestos por los propios estudiantes.

A fin de organizar y controlar el desarrollo del proceso de formulación, se proponen tres niveles para el aprendizaje de la estrategia. Estos niveles se corresponden con la tipología que ha sido propuesta, comenzando por las técnicas algorítmicas y concluyendo con las heurísticas. A partir del segundo nivel deben sistematizarse todas los anteriores, lo cual va más allá de la acción 4 de la etapa de aprendizaje, pues el mayor desarrollo del proceso no reside en combinar técnicas de igual naturaleza, sino de naturaleza distinta.

Finalmente, en consonancia con el perfil del encargo social de los ISP, y sobre la base de la concepción leninista de la práctica como criterio de la verdad, se ha concebido una etapa de **aplicación**, donde el estudiante implementará lo aprendido dentro del contexto de la Práctica Laboral. Esto no solo favorece un notable crecimiento profesional, sino también la retroalimentación que el estudiante experimenta cuando constata la utilidad o limitación de los problemas que él mismo ha elaborado.

La ocurrencia de estas cuatro etapas no debe verse de manera lineal. El diagnóstico, por ejemplo, es continuo y se manifiesta inclusive durante la etapa de aplicación. Tampoco es sugerente enmarcar de forma absoluta cada etapa en el tiempo, pues el aprendizaje de las técnicas no es posible de una vez. Es necesario comprender las etapas de manera sistémica, reconociendo la interdependencia que les es inherente. De esta manera se incrementa la factibilidad en la implementación del ambiente de aprendizaje, como parte de un sistema todavía más complejo: el proceso enseñanza–aprendizaje de la Matemática en los ISP.

Conclusiones del capítulo.

En este capítulo se ha propuesto una estrategia metacognitiva que favorece la formulación de nuevos problemas, esclareciendo las acciones y operaciones que le son constitutivas. Esta estrategia engloba una amplia gama de técnicas ya abordadas por otros autores, mostrando cómo estas interaccionan en la dinámica de una compleja actividad cognitiva. Tomando como base que la formulación de problemas ha sido conceptuada como caso particular del proceso de resolución, la analogía ha permitido establecer una tipología procedimental que abarca todas las técnicas conocidas hasta hoy.

También se ha elaborado una metodología que permite caracterizar el nivel de desarrollo del proceso de formulación, sobre la base de tres indicadores básicos. Finalmente, con el objetivo de adecuar la intervención pedagógica a la formación del profesor, se ha elaborado un conjunto de indicaciones metodológicas para la enseñanza de la estrategia metacognitiva en los ISP.

A fin de sentar pautas para futuras investigaciones, en este capítulo han emergido también diferentes problemas de carácter teórico. He aquí algunos de los más significativos:

1) El carácter relativo del concepto problema ha permitido el abordaje de la formulación como un caso particular de problema abierto; es por ello que la estrategia general de Pòlya debe corresponderse con las acciones de la estrategia metacognitiva propuesta. Así, emerge como interrogante: *¿qué correspondencia puede establecerse entre la estrategia de Pòlya y la estrategia particular aquí propuesta?*
2) La modelación del metaproblema ha revelado la importancia que revisten las etapas de resolución y perfeccionamiento del problema propuesto. Si bien el estudio realizado aborda la interacción subyacente entre la formulación y la resolución de problemas, no se profundiza en la estructura de la etapa siguiente, ni tampoco se esclarecen sus respectivas interacciones. Por este motivo, se considera medular esclarecer *¿qué acciones y operaciones conforman el*

perfeccionamiento del problema? y *¿cómo interacciona esta etapa con las dos restantes?*

De manera similar, es necesario profundizar todavía más en la naturaleza de las acciones de la estrategia metacognitiva, principalmente durante la etapa de búsqueda cuando las acciones se dan en cadena (por ejemplo, a la fila de una matriz se le asocia su suma, a esta la cantidad de cifras, a esta última su paridad y así sucesivamente).

3) La importancia de la formulación de nuevos problemas trae a colación la necesidad de extender los resultados a la enseñanza de la Matemática en el nivel medio general. Si bien el cómo hacerlo abre un amplio campo de investigación, tiene lugar otra interrogante aún más compleja: *¿cómo implementar la estrategia en otros campos del saber humano, inclusive en aquellos menos afines a la Matemática?* De esta manera podría arribarse a una estrategia general para la búsqueda de nuevos problemas, de la cual la aquí propuesta constituye un caso particular.

A título de ejemplo, en el ámbito de la Geografía, es posible arribar (utilizando la técnica de contradicción) al siguiente problema: *¿Por qué si Cuba está situada en la faja de los desiertos tropicales, no existe aquí un clima de desierto?* En efecto, tomando como conjunto las regiones que conforman las diferentes fajas geográficas, es posible seleccionar la tropical, pudiendo emerger Cuba y el Sahara por clasificación. A continuación se le asocia a cada una los conceptos de hidrografía, relieve, vegetación, clima, etcétera. De esta manera, la contradicción ocurre al contraponer el clima de sabana con el de desierto, de manera que se plantea el problema anterior de forma natural.

CAPÍTULO 3

VALIDACIÓN PRÁCTICA DE LA ESTRATEGIA PROPUESTA

3. VALIDACIÓN PRÁCTICA DE LA ESTRATEGIA PROPUESTA

El presente capítulo constituye una aproximación a la validación práctica de la estrategia propuesta. En una primera parte se realiza un estudio sobre el estado del proceso de elaboración de problemas en la provincia Holguín. A continuación se describe un experimento formativo, mostrando cómo la estrategia metacognitiva favorece el proceso de formulación en la carrera de Matemática–Computación. Finalmente, se aducen algunas consideraciones retrospectivas, relativas con la constatación experimental de la hipótesis y su relación con problemáticas afines.

§ 3.1 Estudio piloto

A fin de analizar el estado actual del proceso de elaboración de problemas, por parte del profesorado holguinero, se realizó un estudio piloto en febrero del 2000. Se tomó una muestra aleatoria de 103 profesores graduados del ISP "José de la Luz y Caballero" (los planes de estudio A, B y C están representados aproximadamente en la relación 1:4:2; entre 6 y 8 profesores por cada municipio; M_e = 16 años de experiencia laboral[17]; 71 de secundaria y 32 de preuniversitario, para un 20,6% de la población) y se le orientó la siguiente tarea de forma anónima (tiempo t = 1h):

Elabore un ejercicio empleando alguno(s) de los siguientes datos:

a) sen x   b) una circunferencia   c) un pastor   d) 40   e) π f) 100 ovejas

Circule el (los) dato(s) que ha utilizado.

En general, la diversidad de ejercicios no fue notable, pues se pueden agrupar en cuatro grupos: de texto (67), geométricos (23), trigonométricos (9) y combinatorios (4). Los datos fueron seleccionados de una manera bastante irregular; los más utilizados fueron "la circunferencia" (45) y el "40" (43), y los menos utilizados

[17] En lo que sigue se asumirá la conocida notación M = media aritmética (con la desviación estándar entre paréntesis), M_o = moda, M_e = mediana, α = nivel de significación y p = probabilidad de rechazar la hipótesis nula.

resultaron “π” (14) y “sen$x$” (11). También los datos seleccionados se relacionaban más extramatemática que intramatemáticamente. Por ejemplo, de 36 que utilizaron las “100 ovejas” 33 eligieron también “un pastor” (90,2%); sin embargo, de los 45 que seleccionaron la “circunferencia”, sólo 8 tomaron también a π (17,7%). Esto último es una evidencia de que predominó la ausencia de exploración, de búsqueda de relaciones intrínsecas y, por consiguiente, de nuevos problemas. De hecho, si bien la cantidad de datos seleccionados no es determinante en el grado de dificultad del ejercicio, el promedio de datos seleccionados entre los seis posibles fue $M \approx 2{,}5$ lo cual muestra una tendencia hacia la identificación de propiedades de objetos conocidos antes que las relaciones existentes entre varios de ellos.

El número de incisos osciló entre 1 y 4, con promedio $M \approx 1{,}4$. En general, las pesquisas revelaron el papel fundamental que juegan las vivencias personales y el conocimiento acumulado por el maestro, pues los ejercicios abordaban problemáticas relacionadas con la vida cotidiana y guardaban una marcada analogía respecto a los ejercicios típicos que aparecen en los libros de texto.

La mayoría de los profesores propuso ejercicios de resolución y sólo 15 de demostración (14,6%, los cuales eran moderados o sencillos según la tipología propuesta en el § 2.2). Los resultados fueron los siguientes: 3 mal concebidos, 34 triviales, 48 sencillos, 15 moderados, 3 difíciles y ninguno muy difícil. Es notable que el 35,9% no rebasa el planteo de un ejercicio trivial, y el 82,5% uno sencillo. Otro aspecto notorio consistió en la alteración de algunos datos, como cambiar el “40” por “40%”, “40 m”, “40°”, etcétera; y “sen$x$” por “sen$\angle BAC$”. Sin embargo, en 5 casos los cambios no pueden considerarse aceptables, como “40π” y circular los incisos (d) y (e); o bien circular el (e) y emplear la aproximación “3,14” o el múltiplo “3π”.

Para complementar el estudio se aplicó una encuesta a 100 profesores de la misma población (20% con reposición; véase el anexo 1). En esta muestra 84 señalaron la importancia de enseñar a plantear problemas; el resto manifestó que “es algo muy ambicioso” (7), o que “es para los alumnos más capaces” (9). En general, los maestros reconocen que se necesitan cambiar las concepciones y las creencias sobre la Matemática y su enseñanza. También se observó una marcada carencia de recursos metodológicos para enfrentar dicha tarea, pues al pedir que describieran cómo elaboraban los ejercicios que proponen en los exámenes finales, 12 no respondieron, 55 señalaron la importancia del objetivo, 31 la asequibilidad, 20 el nivel de integración de los conocimientos, 13 la necesidad de que exijan razonamiento, 8 la novedad y 19 la formación de valores. Por otra parte, sólo 18 mostraron tener conciencia de algún recurso utilizado por ellos para formular nuevos problemas, como “pienso en problemas de la vida cotidiana”, “recopilando datos se me ocurre el problema”, “uso analogías”, “trabajo regresivamente a partir de la respuesta”, y “transformo otro problema”.

Llama la atención que al considerar las modas, relativas a las respuestas de cada uno entre 11 ítems relacionados con la elaboración de problemas, sólo 5 superan el acto ocasional (véase la pregunta 1 del mismo anexo). Es más, en este conjunto se incluyen cuatro elementos relativos a la aplicación de técnicas comunes, ya abordadas en el § 2.1 (ítems 2, 5, 8 y 11), señalando que la “variación de algunos datos” se aplica “a menudo” (ítem 2). De todas formas, la información arrojada por el primer instrumento advierte que dicho uso es limitado, pues la técnica de variación se reduce al “cambio de números” en los ejercicios tradicionales.

Junto a la constatación de las regularidades abordadas por otros autores, también se pudieron esclarecer las particularidades del profesor de Matemática holguinero, como la preferencia por ciertos tipos de problemas y la falta de rigor en la selección de los datos. Esto contextualiza el problema para el caso del profesor en servicio, resta hacerlo ahora para el caso del profesor en formación.

§ 3.2 Un experimento pedagógico formativo

En el curso escolar 2000–2001 se llevó a cabo una intervención pedagógica en la carrera de Matemática–Computación del ISP “José de la Luz y Caballero”. El principal objetivo consistió en aceptar o rechazar la hipótesis de investigación. La variable independiente se enmarca en la enseñanza–aprendizaje de la estrategia metacognitiva propuesta, cuya medida se corresponde con los niveles establecidos en el § 2.3 (antes, durante y después de la intervención pedagógica). Por su parte, la variable dependiente consiste en el proceso de formulación de problemas, cuya caracterización ha sido operacionalizada a través de tres indicadores en el § 2.2. En la introducción de esta tesis se ha conjeturado que la dependencia ocurre de manera positiva, o sea, que el proceso se favorece.

Tomando en consideración la novedad de los instrumentos, la complejidad de los indicadores y la propia naturaleza de esta investigación, se decidió que no hubiese grupo de control. De esta manera las comparaciones se realizarían entre cada estudiante consigo mismo. Así, la población quedó constituida por el grupo de primer año (n=48, históricamente M_e=38), tomando como muestra la propia población. Además, en vista de que tres estudiantes causaron baja durante el primer semestre, el estudio consideró exclusivamente los 45 restantes[18].

En la primera semana del curso se diseñó un conjunto de actividades, por parte del colectivo pedagógico, las cuales favorecieron la caracterización del grupo. De esta manera fue posible realizar una división homogénea en dos subgrupos de igual matrícula (A y B), considerando diversas variables como sexo, municipio, índice general en preuniversitario, calificación obtenida en la prueba de ingreso a la Educación Superior en Matemática, y procedencia de los diferentes IPVCP (Institutos Preuniversitarios Vocacionales de Ciencias Pedagógicas), entre otras. En general, las características del grupo se asemejan a las de otras poblaciones, inclusive a la media histórica del Plan C, tal y como muestra la siguiente tabla:

Tabla 1. *Comparación de la población con otras poblaciones similares*.

	Índice general	*Prueba de ingreso*	*Primera opción*	*IPVCP*
Grupo seleccionado	92,98 (4,47)	75,77 (12,65)	47,91%	35,41%
Carrera (los 5 años)	92,97 (4,22)	80,55 (15,91)	63,80%	48,47%
Promedio histórico	93,96 (1,32)	67,88 (18,16)	48,17%	38,12%
Promedio oriental	87,04	70,19	68,73%	22,19%

La diferencia más notable se establece respecto al promedio histórico de la prueba de ingreso (últimos 11 años del Plan C). No obstante, si se considera este promedio a partir del curso escolar 1994–1995 (donde comienza la incorporación de los egresados de IPVCP), este alcanza el valor de 76,26 (12,83). Como puede

[18] Los modelos estadísticos consideran que las muestras mayores que 30 son grandes, por lo cual experimentan una distribución normal (campana de Gauss).

apreciarse, los estudiantes seleccionados manifiestan serias dificultades en su formación matemática. La desviación estándar del rubro en cuestión reveló una dispersión sustancial (calificaciones muy altas o muy bajas). Por otra parte, el 60,42% no supera los 80 puntos, lo que significa por lo menos un objetivo incumplido en dicha evaluación. También las pruebas diagnóstico, aplicadas en las disciplinas Geometría y Álgebra, se correspondieron con estos datos. Todo lo anterior debió ser considerado en el momento de organizar el ambiente de aprendizaje, sobre la base de la especificidad del grupo seleccionado.

Por tratarse de estudiantes recién egresados de la Enseñanza General, se decidió repetir exactamente el mismo instrumento que se había aplicado en el curso anterior a los profesores. El objetivo consistía en determinar el grado de influencia que tiene la formulación de problemas por parte del maestro, en el modo de actuación de los estudiantes. Los resultados revelaron una coincidencia notable en todas las variables analizadas. En efecto, de 16 que escogieron las “100 ovejas” como dato, 13 utilizaron “el pastor” (81,3%); y de 31 que escogieron “la circunferencia”, solo 3 utilizaron a “π” (9,7%).

La tipología también fue cuaternaria (19 ejercicios con texto, 24 geométricos, 1 combinatorio y 1 de ecuaciones). En este último caso, a pesar de existir una tendencia hacia la elaboración de ejercicios con textos y geométricos, subsiste la diferencia de que en los profesores esta tendencia se acercó a la relación 3:1, mientras que en los estudiantes fue aproximadamente 1:1.

La preferencia por ciertos tipos de datos también fue similar, coincidiendo los menos utilizados (“π” y “sen*x*”) y “la circunferencia” como la más utilizada (el “40” se empleó ligeramente menos que “el pastor”). La diferencia estuvo dada por el porciento de estudiantes que escogió “la circunferencia” (71,1%), el cual supera notablemente la selección de los profesores (43,7%).

Otra diferencia consistió en que los estudiantes propusieron como promedio M=2,1 incisos (M_o = 2 y 3), casi uno menos que los profesores (M=1,4; M_o = 1 y 2). Finalmente, la diferencia más significativa consistió en que la cantidad de estudiantes que no superan el planteo de un ejercicio trivial (64,4%) casi duplica a la de los profesores (35,9%). En el resto de las variables controladas las analogías son aún mayores; así lo muestra la siguiente tabla:

Tabla 2. *Similitud entre los problemas propuestos por estudiantes y profesores*.

	Estudiantes	*Profesores*
No superan el planteo de un ejercicio sencillo.	86,7%	82,5%
Cantidad de datos seleccionados.	M=2,1	M=2,5
Proponen ejercicios de resolución.	97,8%	97,1%
Proponen ejercicios de demostración.	24,4%	14,6%

Es notable el bajo porcentaje de ejercicios de demostración. Esto se esperaba pues el desarrollo de la habilidad para demostrar es bastante pobre en la enseñanza de la Matemática. Por ejemplo, de 3658 ejercicios propuestos en la enseñanza media (1676 en secundaria y 1982 en preuniversitario), sólo 658 (236 y 422 respectivamente) son de demostración, lo cual significa el 18%.

A continuación esta información se complementará con los resultados que emergieron tras la aplicación de otros instrumentos. De esta forma será posible explicar la esencia de tales semejanzas y diferencias. Las pesquisas han abordado el resultado del proceso de elaboración, siendo necesario esclarecer todavía el estado del subproceso de formulación, según los indicadores establecidos.

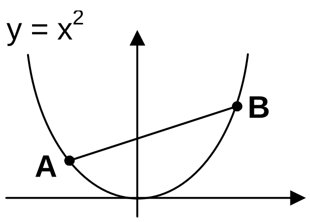
§§ 3.2.1 Aprendizaje de la estrategia

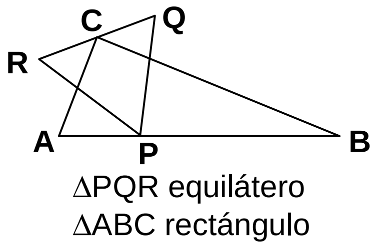
Con el fin de constatar el valor práctico de la estrategia metacognitiva propuesta, se organizó una intervención pedagógica sobre la base de las particularidades del grupo. El período de experimentación ocupó el curso escolar 2000–2001. Los primeros cinco meses se corresponden con el primer nivel propuesto al finalizar el § 2.3; mientras que los dos trimestres subsiguientes se corresponden, respectivamente, con los otros dos niveles.

El control de los indicadores se efectuó según la metodología propuesta en el § 2.2, y se llevó a cabo al inicio del experimento y al culminar cada nivel. También se decidió realizar un control más a principios de noviembre del 2001, con el fin de determinar hasta qué punto la estrategia se aprendió con solidez.

Entre este último test y el de salida (donde media un trimestre que incluye el período vacacional) no se desarrollaron actividades relacionadas con la formulación de problemas, según la opinión del colectivo pedagógico. Las cuatro etapas descritas en el § 2.3 (diagnóstico, preparación, aprendizaje y aplicación) fueron consideradas en cada nivel, con la peculiaridad de que el diagnóstico y la preparación fueron más explícitos en el primero de ellos. A continuación se describe detalladamente cada etapa.

Diagnóstico. A pesar de ser continuo, ocupa una parte importante del primer nivel. La información obtenida por el primer instrumento sirvió para evaluar el estado del tercer indicador (el problema propuesto), siguiendo la metodología del § 2.2. Para evaluar los indicadores restantes se aplicó la técnica de pensar en voz alta, partiendo de que el estudiante escogiera una de las tres figuras siguientes para formular un problema (véase también el anexo 2):





2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	…	

Figura 11. *Ejemplo de figuras propuestas para la formulación de un problema*.

Nuevamente la selección mostró preferencia por los objetos matemáticos más familiares, pues la mayoría escogió el segundo objeto (la parábola 31,1% y los triángulos 57,8%). Es más, de los 14 problemas relacionados con el primer gráfico, 5 se refirieron a conceptos geométricos (principalmente longitud y área).

Al preguntarles por qué escogían cada objeto, la respuesta más frecuente fue: "Porque aquí es donde se pueden encontrar más problemas". Esto reafirmó la necesidad de estudiar más a fondo las creencias de los estudiantes sobre la Matemática, su enseñanza y aprendizaje (en general), y sobre los ejercicios y problemas (en particular). Por este motivo se aplicó un test de creencias (véase el anexo 3), el cual arrojó los siguientes resultados:

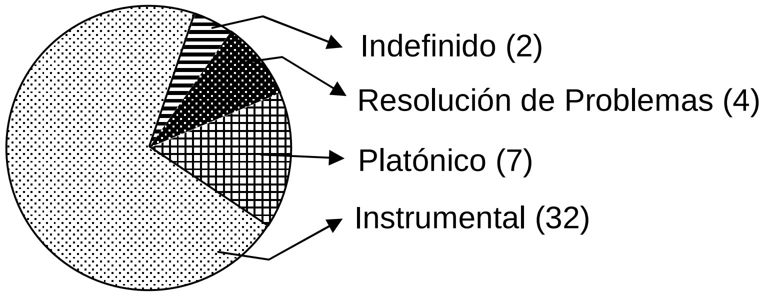


Figura 12. *Creencias sobre los problemas que predominaban en el grupo*.

a) El análisis de las respuestas a las preguntas 1, 2, 3 y 7 mostró que la concepción sobre los ejercicios era predominantemente instrumental, para el 71,1% del grupo. En efecto, las respuestas contenían afirmaciones tales como "nos ayudan a desarrollar nuestro pensamiento", "es una forma de comprobar si se tienen todos los contenidos vencidos", "no me gustan cuando no aportan nada a la vida diaria", etcétera. El 15,6% mostró una concepción predominantemente platónica, afirmando que "ellos conforman la Matemática", "sin ellos no seríamos capaces de entender la Matemática", "sin ellos la Matemática perdería su don de ser la más difícil de las asignaturas", etcétera. El 8,9% mostró una concepción predominantemente de resolución de problemas, afirmando que "los descubrimientos matemáticos se realizaron gracias a que antes hubo un problema", "me gustan si exigen razonamiento", "la Matemática se desarrolla sobre la base de sus problemas", entre otros. En dos casos (4,4%) no fue posible clasificar su concepción.

   Por otra parte, la mayoría (en lo adelante 51% – 75%) asoció los ejercicios matemáticos con "un conjunto de datos, expresiones y variables relacionados, sobre lo cual se efectúa una pregunta dirigida a comprobar el desarrollo de ciertas habilidades". Además, casi todos (en lo adelante > 75%) se inclinaron hacia los ejercicios que contienen datos interesantes o curiosos, que se relacionan con la práctica, que exigen "cierto razonamiento" y que admiten varias vías de solución. Los ejercicios que no les gustaban eran los agotadores, los que contienen datos engorrosos o poco creíbles, los demasiados fáciles (resolubles a simple vista) y los que no dejan un provecho práctico.

b) El análisis de las respuestas a las preguntas 4, 5, y 6 mostró que casi todos los estudiantes catalogan un ejercicio como difícil cuando no encuentran la vía de solución, después de reflexionar mucho, meditar profundamente y poner en práctica gran parte de los conocimientos adquiridos. Ellos enfatizaron más las etapas de análisis y exploración, y muy pocos (en lo adelante 1% – 25%) señalaron problemas con la comprensión (“cuando se me imposibilita el comienzo”, “cuando no lo entiendo”, “cuando me lo tienen que explicar”) y ninguno se refirió a la representación de la solución o a la vista retrospectiva. Casi todos afirmaron que les gustaría resolver ejercicios complicados, por contribuir a su formación como maestros, a desarrollar su inteligencia, y a “medirse a sí mismos”. Finalmente, con la excepción de uno, el resto manifestó que le gustaría inventar ejercicios interesantes; y los motivos pueden dividirse en tres grupos:

- los que enfatizan razones instrumentales para sí (“desarrolla mi pensamiento”, “ejercito mis habilidades”, “pongo en práctica mis conocimientos”, …), con un 40%;
- los que enfatizan razones instrumentales para otros (“así motivaré a mis estudiantes por la Matemática”, “para contribuir con la formación de mis estudiantes”, “para poder repasar a mis compañeros”, …), con un 37,8%;
- y los que asumen ambas posiciones a la vez, con un 20%.

Esto reveló que si bien el 24,4% manifestó una concepción platónica o de resolución de problemas, al referirse a los ejercicios matemáticos en sí mismos, los motivos de la elaboración eran predominantemente instrumentales. Llamó la atención el hecho de que todos los que manifestaron concepciones de resolución de problemas, asumieron concepciones instrumentales de elaboración del segundo grupo (solo para otros); mientras que los de concepción platónica, con la excepción de dos casos vinculados al tercero, manifestaron concepciones del primer grupo (solo para sí).

Resumiendo, con el diagnóstico de entrada se pudo concluir que:

1) El 80% del grupo tenía un bajo nivel de desarrollo del proceso de formulación, mientras que el resto no rebasaba el nivel medio.
2) El 71,1% tenía por lo menos dos indicadores en el nivel bajo, siendo la estrategia el más crítico con 77,8% en ese mismo nivel. En este último caso las mayores dificultades estuvieron dadas por la ausencia de la etapa de búsqueda o la incorrecta realización de esta.
3) Los errores más comunes en la elaboración de los problemas eran el manejo incorrecto de los datos (poco precisos, contradictorios, superfluos, no declarados explícita ni implícitamente) y la falta de correspondencia entre lo dado y lo buscado (principalmente exigir un cálculo o una demostración después de declarar ciertos datos al azar.
4) La concepción sobre los problemas era predominantemente instrumental en el 71,1%; en los casos restantes esta misma concepción se manifestó al referirse al acto de elaboración.
5) Los ejercicios propuestos eran generalmente de resolución, y casi todos se clasificaban en geométricos o con texto. Subsistía la creencia limitativa de que "en las figuras geométricas es donde más problemas se pueden encontrar".
6) El 40% tenía serias dificultades con el desarrollo de la habilidad para resolver problemas, en todos los casos coincidían con un bajo desarrollo del proceso de formulación. El 13,3% tenían un elevado desarrollo en dicha habilidad, pero el nivel mostrado en la formulación era medio.
7) Existía un clima afectivo favorable, respecto al planteo y solución de problemas matemáticos.

Preparación. Sobre la base del diagnóstico inicial se procedió al aseguramiento de las condiciones previas para el aprendizaje de la estrategia. Durante los dos primeros meses se desarrollaron cuatro talleres (de 2h) sobre resolución de problemas escolares, incluyendo el análisis de las dos últimas pruebas de ingreso. En todo momento se enfatizó la posibilidad de encontrar varias vías de solución. Los estudiantes participaron en las preparaciones metodológicas de las escuelas asignadas para la Práctica Laboral, donde los profesores asesores también contribuyeron a subsanar las principales dificultades (principalmente en lo referido a la resolución de problemas); pues la coordinadora de año informó previamente a cada uno sobre la caracterización de los estudiantes que estaban bajo su tutoría.

También se desarrollaron tres charlas (de 1½h) sobre la importancia de los problemas más allá de lo instrumental, para lo cual se invitó especialistas del departamento de Matemática–Computación del ISP. En un lugar visible fue habilitado un mural que contenía aspectos interesantes sobre la Matemática, así como diversos concursos sobre resolución de problemas. La confección y actualización del mismo contó con la participación de los propios estudiantes, bajo la dirección del profesor que atendía la extensión universitaria en la Carrera.

Desde el punto de vista docente las disciplinas de Álgebra y Geometría se impartieron bajo una perspectiva problémica. Para ello se siguieron los criterios expuestos en el § 1.2, sobre cuándo y cómo hacer uso de los métodos problémicos. Por otra parte, en las clases prácticas se enfatizó explícitamente el uso de los recursos heurísticos durante la resolución de los problemas, insistiendo en la necesidad de controlar la ejecución de cada acción y de realizar un análisis perspectivo y retrospectivo. En el anexo 4 se reproduce una de las discusiones ocurridas en torno a un problema de Geometría.

Aprendizaje. La tercera etapa se desarrolló como una actividad más de la Práctica Laboral; para ello el experimentador dirigió varios talleres de una frecuencia semanal (de 2h) con cada subgrupo por separado. En el primer nivel el estudiante se enfrenta por primera vez al aprendizaje de la estrategia metacognitiva. Desde un inicio se trazó el objetivo de aprender a elaborar ejercicios interesantes para sus futuros educandos.

La enseñanza de la estrategia también se hizo con un enfoque problémico, pues se partió de ejemplos donde los estudiantes habían tenido dificultades en la búsqueda de relaciones. Por su parte, la enseñanza de las técnicas algorítmicas se basó en la comprensión de la estructura interna de los problemas, especialmente de los aritméticos. En este caso se partía de la respuesta numérica, la cual se entreveraba luego tras complicaciones lógico–lingüísticas.

El planteo de problemas tuvo dos formas de efectuación, pues se desarrolló a partir de una situación u objeto matemático (propuesto por el profesor o los estudiantes) y a partir de una respuesta prefijada. La forma de organizar las actividades fue diversa. Por ejemplo, se proponía a los estudiantes que elaboraran un problema, añadiendo sus posibles respuestas en otra hoja. Esto podía realizarse en el propio taller o a manera de investigación. En el taller subsiguiente, después de revisar esta tarea, el maestro tomaba todos los problemas generados y los distribuía por parejas sin la solución. Junto con cada problema, el profesor entregaba a los dúos una "hoja de crítica" (véase el anexo 5). Las parejas trataban de resolver los problemas en el reverso de esta hoja, y al culminar pasaban a contestar las preguntas. El profesor nuevamente controlaba los resultados y entregaba la hoja al autor, el cual debía discutir posteriormente sus conclusiones con el profesor o con el grupo.

La principal dificultad estuvo dada por la falta de correlación entre lo dado y lo buscado. Esta incongruencia se debió a una incorrecta concepción de la estructura de los problemas. La mayoría de los estudiantes describían situaciones comunes, pero en el momento de plantear la pregunta esta sólo se basaba en aspectos externos de la situación, pasando por alto las relaciones internas. He aquí un ejemplo propuesto por la estudiante AAS: "*Un muchacho empinando un papalote ha soltado 40 m de hilo. El papalote se halla situado verticalmente sobre un punto que está a 20 m de distancia de él. Admitiendo que el hilo no forma onda y sin tener en cuenta la altura del muchacho. ¿Cuál es el ángulo de elevación del papalote?*"

Como puede observarse se trata de una situación verosímil, donde figuran algunos elementos tradicionales de rigor (deformación del hilo y altura del muchacho). No obstante, los datos aportados no son suficientes para la resolución del problema. En general la formulación de problemas indeterminados no está mal, mientras el objetivo consista en propiciar una crítica constructiva; el problema reside en la falta de conciencia que tiene la estudiante sobre esa indeterminación.

Si bien en el primer nivel la estrategia no contempló la transformación del objeto (véase la figura 6, § 2.1), es posible explicar las deficiencias anteriores como una ausencia o mala implementación de la importante acción de búsqueda. Los estudiantes lograron comprender la necesidad de esta acción, para lo cual se aplicó el método problémico de búsqueda parcial, sobre la base de un intento infructuoso por resolver los problemas planteados (incorrectamente) por ellos mismos.

En el segundo nivel de aprendizaje se incluyó la aplicación de técnicas lógicas, junto con las algorítmicas. Tomando en consideración que en el transcurso del primer semestre los alumnos estudiaron elementos de Lógica Formal, como parte de la asignatura Álgebra I, se introdujo este conjunto de técnicas como una aplicación natural de este conocimiento a la transformación de ciertos objetos. Las primeras transformaciones estuvieron relacionadas con la búsqueda de proposiciones equivalentes. En este caso, siguiendo el esquema de la figura 6, es posible que el planteo del problema ocurra inmediatamente después de efectuar transformaciones.

En efecto, supongamos que se ha seleccionado la expresión trigonométrica $\mathrm{sen}(x + y) + \mathrm{sen}(x - y) = 2\mathrm{sen}x\cdot\cos y$, la cual constituye una identidad ($\forall x, y \in \mathbf{R}$). La transformación semejante $f(x; y) = (½x + ½y; ½x - ½y)$, proporciona una nueva identidad sobre el mismo dominio: $\mathrm{sen}x + \mathrm{sen}y = 2\mathrm{sen}[½(x + y)]\cos[½(x - y)]$. Un problema que emerge ahora consiste en demostrar esta nueva identidad.

Análogamente, varias proposiciones dadas en forma de inferencia fueron sustituidas por otras equivalentes, de manera que la orden del problema se mantenía invariable. Por ejemplo, en noveno grado se estudia el conocido teorema “ab=0 ssi a=0 ó b=0”, del cual se obtienen varias proposiciones equivalentes tras la búsqueda del contrarrecíproco, la ganancia de premisas y la combinación de ambas transformaciones. Las mayores dificultades fueron experimentadas con la generalización y la limitación. Pudo observarse una marcada ausencia de una base orientadora que permitiera obtener objetos matemáticos generales o particulares. Por ejemplo, en el primer ejercicio propuesto se orientó la obtención de un caso particular y otro general de cierta figura geométrica. La mayoría cometió el error consistente en quitar o añadir elementos de dicha figura, para obtener respectivamente otra particular o general.

La discusión ulterior fue constructiva, mostrando cómo era posible realizar estas transformaciones sobre la base de sustituir elementos del objeto por otros, a su vez, generales o particulares. Por ejemplo, una circunferencia por una elipse, un triángulo isósceles por uno equilátero y viceversa, etcétera. Esto demostró la importancia de las acciones de clasificación y asociación en la dinámica de la transformación (véase la figura 6). La nueva dificultad se manifestó en una correcta implementación de la acción de búsqueda, lo que nuevamente originaba la pérdida de relación entre lo dado y lo buscado.

Un hecho favorable consistió en que la mayoría de los estudiantes ya comenzaba a tomar conciencia de ello, mostrando preocupación por resolver esta dificultad. Finalmente, en este nivel fue posible la discusión de varios ejemplos donde se obtenían nuevos objetos, tras la combinación de la generalización y la limitación. En la figura 13 aparece el facsímile de un problema propuesto al inicio de este nivel de aprendizaje, en el cual puede observarse cómo el estudiante ASA confunde la búsqueda de un problema particular con otro problema asociado al mismo objeto. El problema general se establece sobre la base de añadir elementos a la figura, exigiendo también la demostración de una proposición falsa (en sentido general).

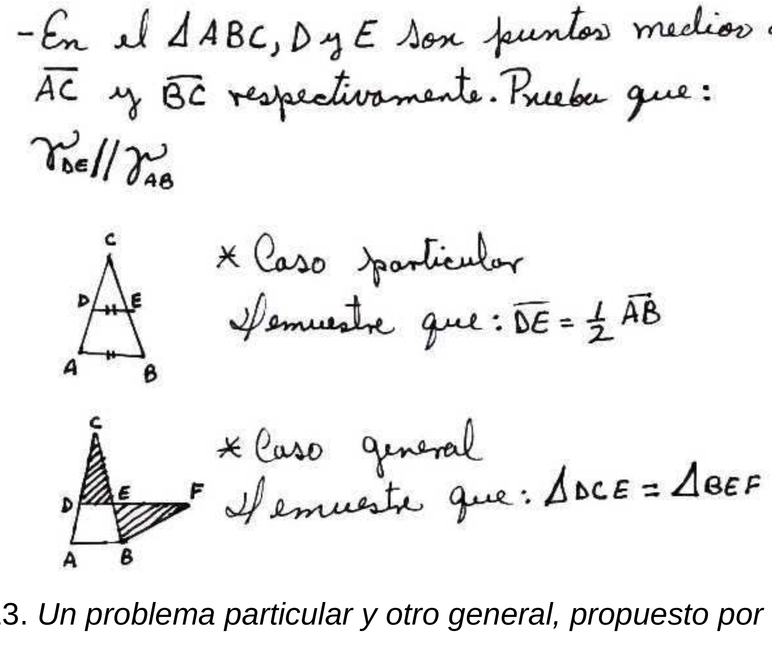


Figura 13. *Un problema particular y otro general, propuesto por un estudiante*.

En el tercer y último nivel se introdujeron las técnicas heurísticas, las cuales fueron combinadas con todas las anteriores. Por ejemplo, la variación de elementos fue introducida como una forma de generalizar. Los impulsos heurísticos estaban dados por preguntas tales como: ¿qué pasaría si consideramos variable el vértice del triángulo o la longitud de la base?, ¿qué pasaría si consideramos variable la base de la función $f(x) = \ln x$?, etcétera. Sin dudas la variación puede promover una generalización, pero no la sustituye siempre de forma automática sino, en general, tras una secuencia de variaciones y limitaciones. De manera similar, la técnica de utilización de analogías apareció como parte de la transformación del objeto inicial. Los problemas así obtenidos fueron denominados “problemas análogos”, y su búsqueda fue favorecida por impulsos tales como: ¿puede formularse un problema nuevo para otra figura análoga?, ¿pueden transferirse las mismas interrogantes para otras figuras?, etcétera.

En uno de los análisis se partió de un subconjunto de números naturales, dispuestos en seis columnas (véase la figura 11), objeto que había sido desechado por casi todos los estudiantes. Inicialmente, siguiendo la estrategia, la clasificación permitió delimitar algunos elementos y asociarlos a conceptos afines. Por ejemplo, el hecho de asociar a cada número su posición, generó el problema de determinar la fila y la columna donde aparece el 2001. Por otra parte, tras asociar a cada fila la suma de sus elementos, la búsqueda sugirió el problema de demostrar que esta constituye un múltiplo de 3.

La analogía fue utilizada de muchas maneras. En efecto, en la dinámica clasificación–asociación–búsqueda los problemas ya formulados constituyeron los prototipos, de manera que un nuevo problema consistió en determinar la posición que ocupan los números primos o los cuadrados perfectos (y no necesariamente el 2001). También la analogía estuvo presente como parte de la transformación del objeto. Así emergieron nuevas disposiciones para los números como la forma de espiral y la triangular. Los problemas formulados no solo coincidían con los anteriores, sino que fue posible que se originaran otros como es el caso de determinar qué nuevos números aparecen alineados con el número 1, entre otros.

Otra técnica de incalculable valor heurístico consistió en el análisis de la veracidad de ciertos recíprocos en las implicaciones, lo cual ya había sido abordado en el primer semestre por la asignatura Geometría I. Para la aplicación de esta técnica se seleccionaron varios teoremas y ejercicios de la escuela media. Finalmente, la contradicción se introdujo como una concepción diferente en el abordaje de los problemas. La perspectiva ¿qué–si–no? Estuvo presente en todas las técnicas anteriores, lo cual constituyó un elemento catalizador que despertaba el interés por explorar nuevas variantes de problemas resueltos, así como propiedades de objetos nuevos o conocidos. Por tratarse de estudiantes noveles, se decidió no incluir ninguna otra técnica, dedicando los mayores esfuerzos a la ejercitación de las técnicas anteriores de manera combinada.

Aplicación. En el primer nivel de aprendizaje los estudiantes debieron familiarizarse con la escuela, desarrollando diversas tareas de caracterización de esta institución y su comunidad. La participación en las preparaciones metodológicas permitieron la elaboración de problemas, dirigidos a la formación de valores patrióticos y morales. Esto se complementó con diferentes visitas a clases y con la elaboración de preguntas escritas. Un papel importante lo desempeñó la Práctica Laboral Concentrada, la cual se desarrolló al concluir el primer semestre. En esta actividad los estudiantes debieron elaborar ejercicios dirigidos a subsanar las dificultades de los grupos que atendían por equipos.

Teniendo en cuenta el déficit profesoral de la provincia, el cual implica que a partir del segundo año el pregrado asuma docencia directa en las escuelas, se decidió que cada estudiante impartiera una clase (11 impartieron por lo menos dos). Todas estas clases fueron previamente discutidas con los asesores y contenían ejercicios elaborados por los propios estudiantes. Los resultados fueron positivos según muestra el siguiente apógrafo, tomado de uno de los informes finales de dicha actividad (equipo 3, grupo A; se transcribe con idéntica redacción y ortografía):

> "*Podemos apreciar que este tipo de entrenamiento nos ha ayudado tanto para el desarrollo de nuestro pensamiento racional teórico en nuestra vida profesoral ya que se nos ha ido transmitiendo una vía más de estudio que*

> *responde al cuarto objetivo en las transformaciones de la escuela, la que plantea que es necesario enseñar a los estudiantes a responder y crear problemas*. […] *Mediante la confección de estos problemas se quiere que los estudiantes se formulen preguntas interesantes donde exista una mezcla entre lo dado en clase y la vida cotidiana, para que adquieran conocimientos, sabiduría, cultura, etc. Pero todavía nos falta mucho por aprender* […].”

En los dos niveles subsiguientes se continuó con la realización de actividades similares, con la diferencia de que en cada uno se fueron incorporando nuevas técnicas. Durante la aplicación de técnicas lógicas fue posible que los equipos realizaran una actividad metodológica demostrativa en sus respectivas escuelas. Estas fueron previamente discutidas en un taller, donde cada equipo tuvo a otro por oponente. A diferencia del semestre anterior, en estos niveles se profundizó en la variación del grado de dificultad de los ejercicios, lo cual complementa el trabajo pues cierra el ciclo del metaproblema (véase la figura 5, § 1.3).

§ 3.3 Análisis de los resultados

A diferencia del primer control, donde se aplicó la técnica de “pensar en voz alta”, en los controles subsiguientes se aplicó la variante del instrumento de Silver (1996). En cada caso se entregó a cada estudiante una hoja de trabajo[19] orientándole que formulara un problema, sobre la base de uno entre varios objetos matemáticos predeterminados. A continuación debían anotar todas las ideas (desarrolladas o no), surgidas durante la formulación. Después de cinco minutos de descanso se entregó otra hoja de trabajo, indicándoles que intentaran responder sus respectivos problemas. Aquí los estudiantes tenían la posibilidad de efectuar modificaciones necesarias, fundamentando las causas que originaron tales transformaciones. Al cabo de media hora se concluyó esta actividad, procediéndose a analizar cada trabajo. El experimentador anotó todas sus inquietudes y observaciones pertinentes, pasando el día siguiente a devolver a cada estudiante ambas hojas de trabajo para

[19] Los subgrupos siempre fueron evaluados en días diferentes, a causa de que este instrumento exige de mucho tiempo y el experimentador no contaba con personal de apoyo.

que meditaran sobre el trabajo realizado. En un período aproximado de 15 minutos se realizaron las entrevistas, enfatizando dos aspectos esenciales:

1) Procedimiento seguido durante la formulación.
2) Causas que motivaron la transformación.

La amalgama de problemas propuestos, así como la diversidad de dificultades y estrategias originadas, requirieron que en el análisis preliminar se adecuaran las entrevistas a las particularidades observadas en cada estudiante. Es necesario destacar que, durante los dos controles finales (donde se repitió el instrumento), fue necesario comprometer a los estudiantes con la necesidad de que el planteo inicial fuera libre, sin dependencia de la resolución ulterior. Con este propósito se insistió en la posibilidad de realizar transformaciones a posteriori, así como en el hecho de que encontrar buenos problemas no presupone saber resolverlos ad hoc. De esta manera, se trató de menguar el grado de incidencia que tiene el temor a no poder resolver el problema propuesto en la segunda hoja de trabajo. En el anexo 6 se reproduce un ejemplo (tomado del tercer control) donde se muestran los logros y deficiencias de un estudiante, a la altura del segundo nivel de aprendizaje. De forma general, los resultados obtenidos fueron favorables en todos los indicadores. A continuación se analiza cada uno por separado.

La metacognición. Sin dudas, este es el indicador que experimentó los cambios más significativos. Inicialmente, el 62,2% del grupo manifestaba serias dificultades para comunicar sus ideas; predominaba la parquedad y los análisis retrospectivos eran superficiales. En la figura 14 puede observarse una mejoría continua, reduciendo el nivel bajo a un 13,3%.

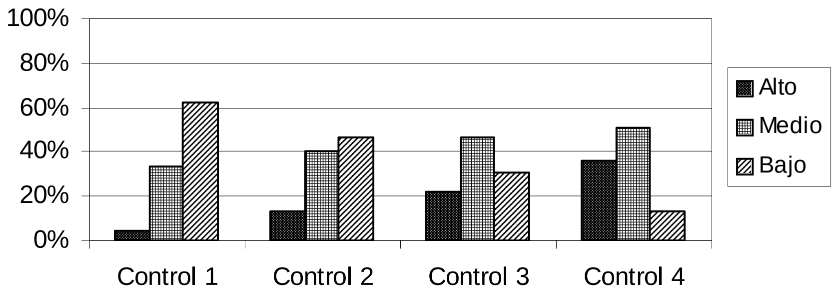


Figura 14. *Comportamiento de la metacognición*.

También es significativo que entre el test de entrada y el de salida no existe involución para ningún sujeto (véase el anexo 1); sin embargo, esto no fue así durante los test intermedios, pues tres estudiantes (YLR, YBC y YSQ) manifestaron cierta inestabilidad en el estudio, conjugada con una falta de motivación por el magisterio (no pidieron la carrera en primera opción). Sólo cuatro estudiantes no mostraron mejorías de orden metacognitivo. En todos los casos se trataba de estudiantes con poco interés por la profesión, a lo cual se sumaba el hecho de ser introvertidos (AHV y RHR) o de restarle importancia a la necesidad de fundamentar sus ideas (YHR y AAS).

Es necesario destacar que, con la excepción de dos casos, los siete estudiantes que presentaron problemas con este indicador proceden de algunos municipios del este holguinero, los cuales tradicionalmente manifiestan dificultades de orden comunicativo. Estas mismas insuficiencias fueron observadas durante la realización de los exámenes orales de Álgebra y Geometría, lo cual es una muestra más de la confluencia de este indicador en el planteo y en la solución de problemas.

La naturaleza no métrica de la medida utilizada (de tipo ordinal) sugirió la aplicación del test de Friedman, lo cual se realizó con el paquete estadístico SPSS (Ver. 9.0 para Windows, 1998). El análisis de los rangos medios, correspondientes a cada control, mostró un nivel alto de significación ($\chi^2_p(3) = 61{,}7$; $p < 0{,}001$). Como se rechazó la hipótesis nula, fue posible aplicar el procedimiento de Nemenyi[20] para comparaciones múltiples (post hoc). Esto reveló que no solo existía un alto nivel de significación entre el primer y cuarto control ($\alpha \leq 0{,}01$), sino que este ya existía entre el primero y el tercero.

Si bien este procedimiento no encuentra significación entre los dos primeros controles (donde media el primer semestre), ya existe significación ($\alpha \leq 0{,}05$) entre el segundo y cuarto (segundo semestre). Esto es muestra de que el desarrollo metacognitivo no fue lineal, sino exponencial. Las causas pueden estar dadas en la influencia de la Práctica Laboral Concentrada; pero también pueden originarse de

[20] Véase Berenson, M. L. y Levine, D. M. (1996) *Estadística básica en administración. Conceptos y aplicaciones*. Prentice Hall Hispanoamericana, México.

variables no controladas como la influencia de otras disciplinas no matemáticas, la socialización del grupo y el grado de adaptación al instrumento aplicado.

El problema. Con la puesta en práctica del instrumento de Silver (1996) enriquecido, fue posible considerar el problema junto con su solución. De esta manera pudo apreciarse evolución aun dentro de un mismo nivel. Inicialmente, el 64,4% de los problemas se enmarcaron en un nivel bajo; de ellos casi todos eran triviales, lo cual favoreció un paso relativamente rápido al planteo de problemas sencillos (incluido en el nivel medio). Esto último justifica que en sólo un semestre (compárese con los controles 1 y 2 en la figura 15) ocurra un cambio brusco para el nivel bajo.

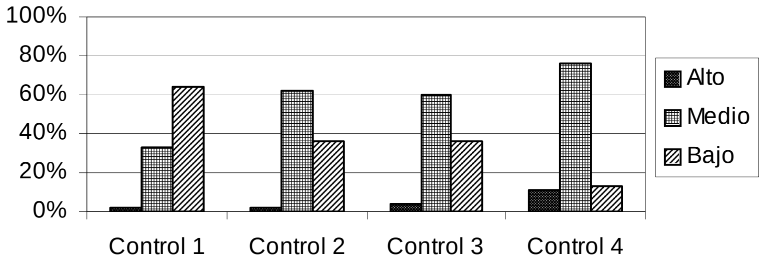


Figura 15. *Comportamiento del problema*.

Un salto similar ocurrió en el último control, pero en este caso de diez estudiantes que experimentaron un cambio de nivel, seis (YVP, ASA, YGA, YSQ, YBR y RHR) ya venían manifestando un comportamiento oscilante entre lo trivial y lo sencillo. Si bien este comportamiento no es favorable, pudo observarse en cinco de estos diez casos la propuesta de una variedad amplia de problemas. Este aspecto es positivo, y se manifestó en la mayoría del grupo. Así, a la altura del cuarto control, ya se proponía una variedad de seis tipos de problemas (geométricos, con textos, trigonométricos, sobre polinomios, de razonamiento lógico y de ecuaciones), lo cual incrementa la variedad observada en el primer control. En general, salvo cuatro casos (ASG, YGA, RHR y RHU), cada estudiante propuso por lo menos dos problemas de naturaleza distinta en los cuatro controles.

Por otra parte, nunca se propusieron problemas muy difíciles. Los mejores resultados no sobrepasan las categorías de moderados o difíciles. La cantidad de problemas moderados se triplicó del primer al cuarto control (de 5 a 15), lo cual muestra desarrollo aun dentro del propio nivel medio. Las mayores dificultades fueron experimentadas por siete estudiantes (YLR, RQR, YMA, ASG, KLG, JSP y RCT), los cuales tuvieron por lo menos tres evaluaciones en el nivel bajo. En todos los casos pudo apreciarse una evolución favorable, pues en los primeros dos controles propusieron al menos un problema mal concebido, lo cual no ocurrió en los dos restantes.

En general, el análisis de los rangos medios para el test de Friedman mostró un alto nivel de significación ($\chi^2_p(3) = 33,2$; $p < 0,001$). Sin embargo, la aplicación del procedimiento de Nemenyi no reveló cambios sustanciales entre ningún control intermedio; con excepción del primero y el cuarto, donde media un alto nivel de significación ($\alpha \leq 0,01$). Esto demuestra que la evolución de este indicador es mucho más lenta que la correspondiente a la metacognición, simulando un crecimiento lineal.

La estrategia. Como se mostró en el § 2.2 este es el indicador más complejo. En la figura 16 puede apreciarse una mejoría palpable, pero indiscutiblemente más lenta que en los indicadores anteriores. Los comportamientos oscilantes fueron insignificantes (sólo dos), en contraste con la cantidad de estudiantes que no experimentaron mejorías en el orden cualitativo. En el anexo 2 puede observarse que un total de 16 estudiantes (35,6%) permanecen en el nivel bajo. No obstante, si bien en el primer control ninguno de ellos logró una conexión lógica entre lo dado y lo buscado, con el aprendizaje de las técnicas trataron de aplicar a lo sumo dos de ellas a partir del tercer control.

Otro hecho favorable consistió en que estos estudiantes, junto con otros 10 (57,8%), reconocían sus errores al pasar a resolver los problemas y se esforzaban explícitamente por mejorar la logicidad del planteo. Precisamente, esos 10 estudiantes mencionados lograron un salto cualitativo hacia el nivel medio en el cuarto control, lo cual explica el único cambio brusco de la figura 16.

La aplicación de la técnica de Silver et al. (1996), enriquecida con la posibilidad de realizar transformaciones explícitas y con el análisis retrospectivo junto al experimentador, permitió que los estudiantes asimilaran la estrategia general y comprendieran la complejidad del proceso de implementación de las técnicas. Esto contribuyó a que fueran ganando confianza en sí mismos y que perdieran el temor de equivocarse dentro del acto de formulación. Además, si bien en el primer control el 77,8% se ubicó en el nivel bajo, en el cuarto esto se redujo más de dos veces. Al aplicar por primera vez la técnica mencionada (en el segundo control), de un total de 30 estudiantes ubicados en el nivel bajo (66,8%), sólo la sexta parte realiza transformaciones correctas en el planteo (aunque todavía insuficientes); mientras que en el control final, de 17 en el nivel bajo (37,8%), 12 mostraron acciones explícitas de transformación (casi las tres cuartas partes).

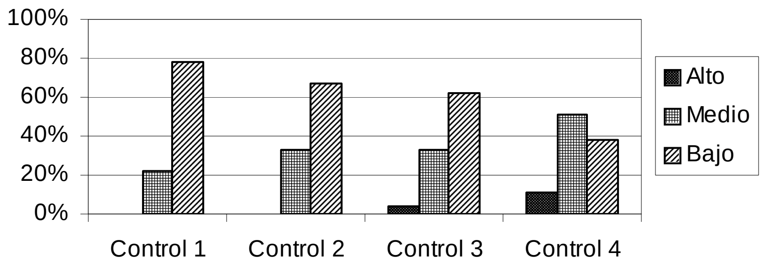


Figura 16. *Comportamiento de la estrategia*.

A pesar de los resultados arrojados por esta técnica se considera que la misma debió ser complementada con episodios gráficos (véase la figura 9, § 2.2). De esta manera podrían revelarse informaciones que pudieran pasar desapercibidas ante el experimentador, como la frecuencia de cambio en las acciones (considérese la estructura no lineal de la figura 6, § 2.1), el tiempo promedio en cada acción, la localización de las técnicas dentro de la estrategia, etcétera. El motivo de no haberlo hecho durante los cuatro controles, correspondientes al período de experimentación, consistió en que la idea de aplicar los diagramas de Schöenfeld a la estrategia propuesta es fruto de esta misma necesidad, y surgió después de aplicar el test post hoc.

La figura 9 (§ 2.2) corresponde a uno de los seis casos seleccionados tras dicho test, mostrándose cómo el estudiante ACS es capaz de aplicar dos veces la misma técnica lógica de limitación, durante la etapa de transformación. La logicidad en la ejecución de las acciones permitió que se evaluara esta estrategia en el nivel medio, lo cual es un ejemplo de la independencia entre este indicador y el problema, pues las transformaciones redujeron notablemente la complejidad de este último hasta lo trivial. En general, salvo dos casos (JRO y YSA), ningún estudiante logró implementar técnicas de naturaleza distinta, lo cual se esperaba por tratarse de estudiantes noveles.

La aplicación del test de Friedman, sobre la base de los rangos medios, reveló un alto nivel de significación ($\chi^2_p(3) = 42{,}33$; $p < 0{,}001$). Por su parte, el test de Nemenyi mostró un comportamiento distinto a los dos casos anteriores. En efecto, si bien se repite el alto nivel de significación ($\alpha \leq 0{,}01$) entre el primer y el cuarto control, no se observa otra significación salvo entre el segundo y el cuarto ($\alpha \leq 0{,}05$). Esta peculiaridad está asociada al aprendizaje de la mayoría de las técnicas en dicha etapa, así como al grado de sistematicidad en la implementación del conjunto de acciones.

Una vez evaluados los tres indicadores se procedió al análisis de la correlación existente entre ellos. Para esto se aplicó el test de Kendall, mostrando una correlación muy baja ($\chi^2_{0,000}(2) = 52{,}8$; $W = 0{,}147$). Esta independencia entre los indicadores pone de relieve la necesidad de considerar cada uno de ellos como condicionantes del proceso. La aplicación de este mismo test, en cada control por separado, puso en evidencia una tendencia al crecimiento para el coeficiente de correlación múltiple ($W = 0{,}093$; 0,123; 0,199 y 0,211; respectivamente). Esto es una consecuencia del rol jerárquico que juega la estrategia en el conjunto de indicadores.

La caracterización del proceso se efectuó conforme a la metodología propuesta en el § 2.2, revelando mejorías tangibles en el grupo. En la figura 17 puede observarse que las líneas de tendencia muestran una monotonía lenta, pero favorable. El análisis de los rangos medios mostró un elevado nivel de significación, de acuerdo con el test de Friedman ($\chi^2_p(3) = 45{,}3$; $p < 0{,}001$); mientras que la aplicación ulterior del test de Nemenyi reveló significación ($\alpha \leq 0{,}05$) entre los controles 2 y 4, lo cual se esperaba pues un comportamiento similar ya se había constatado en dos de los tres indicadores. Es más, de 36 estudiantes cuyo proceso fue caracterizado como bajo en el control inicial, 19 pasaron al nivel medio (52,8%); mientras que de 9 en el nivel medio, 5 pasaron al alto (55,6%). En ningún caso se observó involución lo cual, junto a la observación anterior, constituye una muestra de desarrollo uniforme.

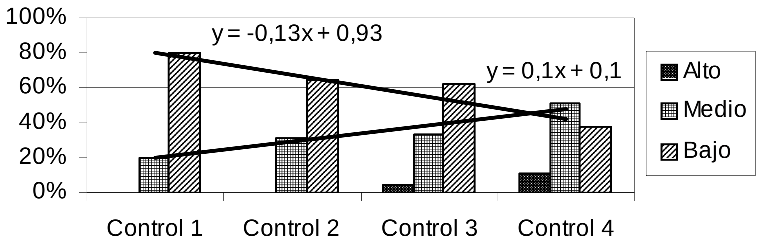


Figura 17. *Comportamiento del proceso de formulación*.

Otro hecho positivo consistió en que el proceso de formulación también se favoreció de manera uniforme en ambos subgrupos (como estratos de muestra). En efecto, la aplicación de la prueba no paramétrica de Mann–Whitney (también conocida como prueba U), para la evaluación ordinal del proceso, mostró una ausencia de diferencias significativas tanto en el primer control (Z_p = –0,442; p = 0,658 > 0,05) como en el cuarto (Z_p = –0,353; p = 0,724 > 0,05). Todo lo anterior permite aceptar como válida la hipótesis de investigación.

Con el fin de comparar los resultados obtenidos en esta investigación con los de otras afines, se procedió a calcular la correlación no paramétrica entre el proceso de resolución (al inicio del experimento, véase el anexo 2) y el de formulación. La aplicación del test de Spearman reveló que, en la medida en que el proceso de formulación se iba favoreciendo, la correlación con el proceso de resolución tendía a crecer en cada control (r_s = 0, 628; 0,654; 0,635 y 0,734; respectivamente). Esto reafirma una tesis defendida por muchos autores, referida a la estrecha interrelación que enlaza ambos procesos (véase § 1.2). Finalmente, con el objetivo de valorar el grado de fijación de la estrategia una vez concluido el experimento, se aplicó un control post hoc tres meses después.

En la figura 18 puede observarse la existencia de diferencias entre el control final y el post hoc, respecto al proceso de formulación. No obstante, el test de Wilcoxon para el análisis de los rangos de signos muestra que este cambio no fue significativo (Z_p = –0,816; p = 0,414 > 0,05). Asimismo, tampoco se observaron cambios significativos en ninguno de los indicadores, especialmente en el problema (Z_p = –0,333; p = 0,739 >> 0,05). Esto permite concluir que el aprendizaje fue sólido, pero advierte la necesidad de dar continuidad al desarrollo del proceso.

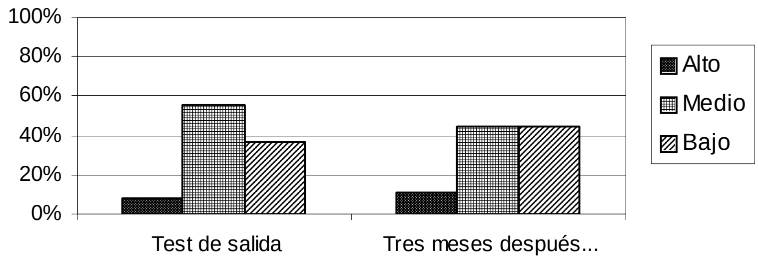


Figura 18. *Comparación entre el test de salida y otro post hoc*.

Es necesario destacar que el nivel más inestable fue el nivel medio, pues tres estudiantes obtuvieron una evaluación inferior, mientras que otros dos pasaron al nivel alto. Los primeros (YLS, YHR y BPP) manifestaron dificultades durante la implementación de la estrategia, especialmente en la acción de búsqueda, tal y como les había ocurrido en al menos dos controles anteriores. Por su parte, los segundos (FAC y YCG) habían tenido un comportamiento más estable, llegando a plantear problemas moderados y a ejecutar exactamente una técnica. Estos últimos estudiantes demostraron un desarrollo aún superior en el control post hoc, pues combinaron dos técnicas de tipo heurístico durante la etapa de transformación y uno de ellos (YCG) llegó a plantear un problema difícil. Esta observación saca a colación el hecho de que también es posible el autoaprendizaje y el autodesarrollo en la formulación de problemas, lo que reafirma la tendencia del lazo recurrente (figura 2, § 1.1) hacia el nivel II.

Conclusiones del capítulo.

En esta última parte se ha concretado la propuesta en la formación del profesor de Matemática–Computación del ISP “José de la Luz y Caballero”, especialmente en el primer año de la carrera. En primer lugar, se develaron las principales deficiencias manifestadas por el maestro de Matemática holguinero en la formulación de problemas, mostrando el nivel de incidencia que esto tiene sobre el estudiantado. A continuación se adecuó la enseñanza de la estrategia metacognitiva a las particularidades del grupo seleccionado, considerando una pluralidad de elementos para la implementación del ambiente de aprendizaje (creencias sobre la Matemática y sus problemas, currículo, diseño de la Práctica Laboral, desarrollo del proceso de resolución de problemas, entre otros).

El análisis complementado de aspectos cuantitativos y cualitativos, constató mejorías en todos los indicadores del proceso. Particularmente, la aplicación de un test post hoc demostró que, si bien el proceso se favorece como un todo, la cualidad alcanzada tiende a ser perdurable. Además, en la dinámica de este estudio se corroboraron otros aspectos de orden teórico, como la correlación subyacente entre los procesos de formulación y resolución de problemas. Finalmente, se concluyó que es posible aceptar como válida la hipótesis de investigación, advirtiendo la necesidad de dar continuidad al desarrollo del proceso de formulación.

CONCLUSIONES

El problema científico abordado se enmarcó en el proceso de formulación de problemas escolares, por parte del profesor en formación. La literatura ha abordado este objeto de investigación con cierta superficialidad, pasando por alto la necesidad indefectible de esclarecer su esencia. Los presupuestos teóricos, establecidos en esta tesis, constituyen una primera aproximación al esclarecimiento de esta esencia.

Inicialmente se abordó el concepto “problema” como una cualidad del concepto ejercicio y, en general, de cualquier tarea docente. Esta cualidad demanda un estado psicológico favorable para la acción pedagógica sobre la ZDP. Además, el proceso de formulación fue caracterizado como un caso especial del proceso cognitivo de resolución de problemas. Esto permitió fundamentar cómo la Enseñaza Problémica puede facilitar su aprendizaje, destacando la necesidad de potenciar un cambio en las creencias limitativas del estudiante.

Con el objetivo de esclarecer las relaciones que se establecen entre la formulación, la resolución y el perfeccionamiento del problema, se modeló la compleja actividad que debe desarrollar el futuro egresado cuando elabore ejercicios en la escuela. También se develó la naturaleza de las estrategias específicas de formulación, fundamentando la pertinencia de enfocarlas como técnicas. La analogía que se establece, entre estas y los procedimientos de resolución de problemas, permitió la introducción de una tipología tricotómica que facilita el aprendizaje de la estrategia. Entre las clases que componen esta tipología se encuentran las algorítmicas, de las cuales no se tiene referencia en la literatura, a pesar de su carácter más elemental.

En general, la analogía facilitó un abordaje multilateral del objeto, de manera que muchos resultados del ámbito de la resolución de problemas fueron modificados e incorporados a la formulación de problemas. No obstante, esta aproximación a la sistematización teórica todavía está lejos de una disquisición que permita, más que describir, prescribir la formulación de nuevos problemas.

Después de un análisis crítico de las estrategias conocidas, se observó la necesidad de integrarlas en una estrategia más general. Así, el aporte teórico fundamental se enmarcó en la elaboración de una estrategia metacognitiva, dirigida a favorecer el proceso de formulación. Esta estrategia fue conformada por un conjunto de acciones y operaciones, que permiten integrar y sistematizar todas las estrategias registradas en la literatura hasta la actualidad. Las complejas interrelaciones que le son subyacentes han sido fundamentadas y ejemplificadas. Además, a diferencia de otras estrategias conocidas, esta se caracteriza por su estructura no lineal.

La significación práctica de este trabajo consistió, primeramente, en la propuesta de una metodología dirigida a evaluar el desarrollo del proceso de formulación. Para ello fueron develados los indicadores fundamentales, junto con los respectivos subindicadores de caracterización. En segundo lugar, también se elaboraron indicaciones metodológicas para la enseñanza de la estrategia en los ISP.

Una característica muy peculiar de esta investigación ha sido la identificación de varios problemas abiertos. Algunos de ellos fueron formulados de manera explícita, por la importancia que revisten. Esto se esperaba, pues el objeto de investigación abordado, y especialmente el campo seleccionado, son terrenos verdaderamente vírgenes de la Matemática Educativa.

La aplicación de un experimento pedagógico formativo mostró que la puesta en práctica de la estrategia metacognitiva favorece el proceso de formulación de problemas, por parte del estudiante de Matemática–Computación en los ISP. Así, al aceptar como válida la hipótesis de investigación, se concluyó que el objetivo de esta tesis ha sido cumplido.

RECOMENDACIONES

La connotación nacional del problema de investigación amerita una intervención pedagógica de mayor escala. Es por ello que se recomienda la introducción de estos resultados en la formación inicial del profesorado cubano. La enseñanza requiere sistematicidad, y debe extenderse hasta la aplicación de paquetes computacionales (v. gr.: “Mathematics”, “Maple” y “Geometer’s Sketchpad”). Por otra parte, teniendo en cuenta el comportamiento cíclico que experimenta el problema (descrito en la introducción de esta tesis), tampoco es posible pasar por alto la inclusión de la estrategia propuesta en la formación permanente del profesorado.

La incorporación de los aportes de esta tesis, al perfeccionamiento curricular de la disciplina “Metodología de la Enseñanza de la Matemática”, es primordial. De esta manera, el futuro profesional podrá enfrentar con éxito los nuevos retos que plantean las actuales transformaciones de la escuela media. No basta con enseñarlo a formular problemas, también es medular que aprenda a enseñar a hacerlo.

Desde el punto de vista teórico, es sugerente explorar los problemas abiertos, declarados en las conclusiones de los capítulos 1 y 2, así como diseñar nuevos instrumentos para el análisis del proceso de formulación. También es necesario que, en investigaciones ulteriores, se apliquen y validen los “diagramas de Schöenfeld”, adaptados al estudio de las acciones que conforman la estrategia. En particular, subsiste la posibilidad de perfeccionar la estrategia, de incorporarle nuevas técnicas e, incluso, de generalizarla todavía más, con el fin de incorporarla a la formulación de problemas en otras asignaturas.

Es recomendable que en los trabajos futuros se controle, paulatinamente, el desarrollo del proceso de resolución de problemas. Como se pudo observar, tiende a crecer la correlación entre este (medido antes del experimento) y el proceso de formulación. Sería interesante examinar el comportamiento de dicha correlación, durante y al final del experimento.

La medida ordinal que se empleó para caracterizar el problema debe perfeccionarse, de manera que pueda ser aplicada durante el cumplimiento de objetivos que exigen “que los alumnos logren resolver problemas de hasta dificultad media”, cuando no está claro en qué consiste ese grado de “dificultad media”. También debe examinarse la posibilidad de enriquecer los subindicadores, relacionados con la estrategia y la metacognición, refinando las categorías empleadas como se hizo con el problema.

Finalmente, en vista de que en la parte experimental se detectaron errores y creencias comunes, los cuales no habían sido reportados por otras investigaciones, se sugiere que en la extensión de este trabajo se analice si se trata de una peculiaridad provincial o bien de una regularidad del estudiantado cubano. Esta sería una conexión concreta entre la formulación de problemas y la “Etnomatemática”.

BIBLIOGRAFÍA

Abu–Elwan, R. (2002) *The development of Mathematical Problem Posing Skills for Prospective Middle School Teachers*. Sultan Qaboos University, Muscat, Sultan of Oman.

Aguilar, A. (2001) *Un modelo didáctico para el estudio y transformación de las creencias limitativas acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en la formación de profesores*. Tesis de maestría, ISP "José de la Luz y Caballero", Holguín.

Aguilar, A. y Cruz, M. (2002) Manifestación y reestructuración de las creencias acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática en la formación del profesorado. Por aparecer en: *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 16, t. 2, Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Alonso, I. (2001) *La resolución de problemas Matemáticos: Una alternativa didáctica centrada en la representación*. Tesis doctoral, Centro de estudios "Manuel F. Gran", Universidad de Oriente.

Alsina, C. et al. (1998, Eds.) *8th International Congress on Mathematical Education. Selected lectures*. SAEM "Thales", Sevilla.

Álvarez, C. M. (1999) *La escuela en la vida. Didáctica*. Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

Bermúdez, R. y Rodríguez, M. (1996) *Teoría y metodología del aprendizaje*. Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

Betancourt, J. (1995a) La creatividad: una ciencia del futuro. En: *Pensar y crear. Estrategias, métodos y programas* (pp. 3–9). Editorial Academia, La Habana.

Betancourt, J. (1995b) Estrategias para pensar y crear. En: *Pensar y crear. Estrategias, métodos y programas* (pp. 18–79). Editorial Academia, La Habana.

Blanco, L. (1991) *Conocimiento y acción en la enseñanza de las Matemáticas de profesores de E. G. B. y estudiantes para profesores*. Tesis doctoral, Manuales Unex, No. 11, Madrid.

Bright, L. et al. (1998) Disponibilidade, metas, e relacionamentos: Variáveis críticas em desenvolvimento de professores. Em: *Actas do IV Congresso RIBIE*, Brasilia.

Brown, S. I. & Walter, M. I. (1990) *The art of problem posing* (2nd ed.). Erlbaum, Hillsdale, New Jersey. (1st ed. in 1983.)

Brown, S. I. & Walter, M. I. (1993, Eds.) *Problem posing: reflections and applications*. Erlbaum, Hillsdale, New Jersey.

Brugman, G. M. (1991) Problem finding: discovering and formulating problems. In: *European journal of hight abilities*, Vol 2, No. 2, pp. 212–227.

Bruner, J. (1990) Las estrategias de selección en la obtención de conceptos. En Mitjáns, A. y Manzano, M. (Eds.): *Selección de Lecturas de Psicología General* (pp. 328–394). Segunda parte. Ministerio de Educación Superior.

Campistrous, L. y Rizo, C. (1996) *Aprende a resolver problemas aritméticos*. Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

Campistrous, L. y Rizo, C. (2000) *Tecnología, resolución de problemas y didáctica de la Matemática*. ICCP, Ministerio de Educación, La Habana

Carss, M.; Koman, M. & Pascual, J. R. (1998) Preparation and enhancement of teachers. In C. Alsina et al. (Eds.): *Proceedings of the 8th International Congress on Mathematical Education* (pp. 189–195). SAEM "Thales", Seville.

Chapman, O. (1999) Problem solving in mathematics: approaches to classroom practice. Em: *Actas do ProfMat' 99* (pp. 39–49), Associação de Professores de Matemática, Lisboa.

Chevallard, Y.; Bosch, M. y Gascón, J. (1998) *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Biblioteca del Normalista de la SEP, España.

Choi, J–I. & Hannafin, M. (1997) The effects of instructional context and reasoning complexity on mathematics problem–solving. In: *Educational technology research and development*, Vol. 45, No. 3, pp. 43–55.

Cofman, J. (1998) Exploration and discoveries in the classroom. In: *The teaching of mathematics*. Vol. I, pp. 23–30.

Contreras, J. N. (2001) *Using dynamic geometry software as a springboard for making conjectures, solving problems and posing problems*. University of Southern Mississippi, USA.

Contreras, J. N. & Martínez–Cruz, A. M. (1999) Examining what prospective secondary teachers bring to teacher education: A preliminary analysis of their initial problem–solving abilities within geometric tasks. In F. Hitt & M. Santos (Eds.): *Proceedings of PME–NA XXI*, Vol. 2, pp. 413–420, Columbus, OH: ERICK Clearinghouse for Science.

Contreras, L. C. y Carrillo, J. (2000) El amplio campo de la resolución de problemas. En Carrillo, J. y Contreras, L. C. (Eds.): *Resolución de problemas en los albores del siglo XXI: Una visión desde múltiples perspectivas y niveles educativos* (pp. 13–37). Editorial Hergué, Huelva.

Corral, R. (1999) Las “lecturas” de la zona de desarrollo próximo. En: *Revista Cubana de Psicología*. Vol. 16, No. 3, pp. 200–204, Universidad de la Habana.

Cruz, M. (1995) *Resolución de ecuaciones en números enteros*. Pedagogía’ 95, La Habana.

Cruz, M. (1997) Sobre la formulación de problemas diofánticos. *Actas de Compumat’ 97*, Universidad de Cienfuegos / Universidad de Oviedo.

Cruz, M. (1998) *Sobre la formulación de problemas matemáticos*. Comat’ 98, ISP “Juan Marinello”, Matanzas.

Cruz, M. (1999) *Sobre el planteo de problemas matemáticos*. Revista electrónica *Órbita*, ISP “Enrique José Varona”, La Habana.

Cruz, M. (2000) Estrategias para la elaboración de ejercicios del análisis diofántico. *Biblioteca Virtual para los ISP*, No. 1, Ministerio de Educación, La Habana.

Cruz, M. y Aguilar, A. (2001) Evolución de la Didáctica de la Matemática. En: *Función Continua*, No. 12, Año II, pp. 23–41.

Cruz, M. y Álvarez, S. (2002) La formulación de problemas para la enseñanza de la Matemática. En: *Actas del II Congreso “Didáctica de las Ciencias*.*”* MINED – Organización de Estados Iberoamericanos, La Habana.

Cruz, M.; Álvarez, S. y Torno, L. (2002) Sobre la formulación de problemas matemáticos. Por aparecer en: *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 16, t. 2, Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Cudmore, D. H. & English, L. D. (1998) *Using intranets to foster statistical problem posing and critiquing in secondary mathematics classrooms*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Diego, CA. (URL: http://ourquestions.com/98aera/98aera.doc)

Dalla, A. (1999) Quelques commentaires tirés des travaux du grupe “Recherche en didactique des mathématiques et formation des maîtres”. In Jaquet, F. (Ed.): *Relationship between Classroom Practice and Research in Mathematics Education*. Proceeding of CIEAEM 50, Vol. 3, pp. 281–283.

D’Ambrosio, U. (1998) Matemáticas de ontem on de hoje na educação para o amanhã. En: *Épsilon*, Vol. 42, pp. 551–560.

D’Amore, B. & Zan, R. (1996) Italian research on problem solving 1988–1995. In A. Gagatsis & L. Rogers (Eds.): *Didactic and History of Mathematics* (pp. 35–51). Thessaloniki.

D’Amore, B. et al. (1996) The re-formulation of text of standard school problems. In A. Gagatsis & L. Rogers (Eds.): *Didactic and History of Mathematics* (pp. 53–72). Thessaloniki.

D’Amore, B. (1997) *Problemas. Pedagogía y psicología de la matemática en la actividad de resolución de problemas*. Editorial Síntesis, Madrid.

De Anta, G.; Manrique, J. y Ruiz, M. L. (1995) Noticias para plantear problemas. En: *ALAMBIQUE: Didáctica de las ciencias experimentales*, No. 5, pp. 59–65.

De Corte, E. et al. (2001) Collaborative learning of mathematical problem solving and problem posing. In: *Webknowledge forum: A design experiment*. Center for Instructional Psychology & Technology, University of Leuven, Belgium.

Díaz, G. J. y Batanero, M. C. (1994) Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. En: *Reserches en didactique de mathemátiques*, Vol. 14, No. 3, pp. 325–355.

Domínguez, R. (1999) *Propuesta metodológica para la enseñanza explícita de la resolución de problemas matemáticos*. Tesis de maestría, IPLAC, La Habana.

Dowker, A. (1992) Computational estimation strategies of professional mathematicians. In: *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 23, No. 1, pp. 45–55.

Dowker, A. et al. (1996) Estimation strategies of four groups. In: *Mathematical Cognition*, Vol. 2, No. 2, pp. 113–135.

Elichiribehety, I. et al. (2002) Los modelos mentales que subyacen en la resolución de problemas algebraicos: un estudio transversal. En: *Relime*, Vol. 5, No. 2, pp. 169–198.

English, L. D. (1997a) The development of fith–grade children's problem–posing abilities. In: *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 34, pp. 183–217.

English, L. D. (1997b) Promoting a problem–posing classroom. In: *Teaching Children Mathematics*, Vol. 4, No. 3, pp. 172–179.

English, L. D. (1998) Children's problem posing within formal and informal context. In: *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 29, No. 1, pp. 83–107.

English, L. D.; Cudmore, D. H. & Tilley, D. (1998) Problem posing and critiquing: How it can happen in your classroom. In: *Mathematics Teaching in the Middle School*, Vol. 4, No. 2, pp. 124–129.

English, L. D. & Cudmore, D. H. (2000) Using extranets in fostering international communities of mathematical inquiry. In M. J. Burke & F. R. Curcio (Eds.): *Learning Mathematics for a New Century*. Yearbook 2000 of NCTM, Reston.

Ernest, P. (1989) The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher: A model. In: *British Educational Research Journal*, Vol. 15, No. 1, pp. 13–33.

Ernest, P. (2000) Why teach mathematics. In White, J. & Bramall, S. (Eds.): *Why Learn Math?*, London University Institute of Education. (URL: http:// www.ex.ac.uk/~PErnest/ why.htm)

Fariñas, G. (1999) Hacia un redescubrimiento de la teoría del aprendizaje. En: *Revista Cubana de Psicología*. Vol. 16, No. 3, pp. 227–234, Universidad de la Habana.

Feria, F. F. (1996) *Modelo didáctico dirigido a la formación de profesores de Matemática–Computación*. Tesis de maestría, ISP “José de la Luz y Caballero”, Holguín.

Ferrari, M. e Sforzini, M. (1995) Mathematica e Creatività. In: *L’ Insegnamento della Matematica e della Scienze Integrate* (pp. 38–64). Vol. 18A, No. 1, Gennaio.

Ferrer, M. (2000) *La resolución de problemas en la estructuración de un sistema de habilidades matemáticas en la escuela media cubana*. Tesis doctoral, Biblioteca digital para los ISP, No. 1, MINED.

Flores, P. (1995) *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Evolución durante las prácticas de enseñanza*. Tesis doctoral, Universidad de Granada.

Frykholm, J. A. (1996) Pre–service teachers in mathematics: struggling with the Standards. In: *Teaching & Teacher Education*, Vol. 12, No. 6, pp. 665–681.

Fuentes, H. C.; Cruz, S. y Álvarez, I. B. (1998) *Modelo holístico configuracional de la Didáctica*. Centro de estudios “Manuel F. Gran”, Universidad de Oriente.

Fuentes, I. (2001) *La formulación de problemas en la asignatura Matemática de la Secundaria Básica*. Tesis de maestría, ISP “Frank País”, Santiago de Cuba.

Galperin, P. (1986) Sobre el método de formación por etapas de las acciones mentales. En: *Antología de la Psicología Pedagógica y de las Edades*. Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

Garcés, W. (2002) *Enseñar a aprender mediante sistemas de tareas: una alternativa dirigida a ofrecer modos de actuación en la formación inicial del profesor de Matemática*. Tesis doctoral en proceso de defensa, ISP “José de la Luz y Caballero”, Holguín.

Gascón, J. (1994) El papel de la resolución de problemas en la enseñanza de la matemática. En: *Educación Matemática*, Vol. 6, No. 3, pp. 37–51.

Gascón, J. (1998) Evolución de la didáctica de la matemática como disciplina científica. En: *Reserches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 18, No. 1, pp. 7–34.

González, D. (2001a) *La preparación de los maestros para la enseñanza–aprendizaje de la formulación de problemas matemáticos*. Pedagogía' 01, Curso 78, La Habana.

González, D. (2001b) *La superación de los maestros primarios en la formulación de problemas matemáticos*. Tesis doctoral, ISP "Enrique José Varona", La Habana.

González, D.; Mora, M. y Suárez, C. (2002) El tratamiento didáctico de la formulación de problemas matemáticos. En: *Actas del II Congreso Internacional "Didáctica de las Ciencias*.*"* MINED – Organización de Estados Iberoamericanos, La Habana.

Gowers, W. T. (2000) The two cultures of mathematics. In V. Arnold et al. (Eds.): *Mathematics: Frontiers and Perspectives* (pp. 65–78). International Mathematical Union & American Mathematical Society.

Guétmanova, A. (1989) *Lógica*. Editorial Progreso, Moscú.

Hodgson, B. R. (1995) The roles and needs of mathematics teachers using IT. In D. Watson & D. Tinsley (Eds.): *Integrating information technology into Education*. Chepman & Hall.

Hodgson, B. R. (1996) Primary and secondary school teacher education in mathematics: Role and responsibilities of the mathematician. In N. Dinh Tri et al. (Eds.): *Proceedings of the SEACME 7* (pp. 41–72), Hanoi.

Jungk, W. (1981) *Conferencias sobre metodología de la enseñanza de la Matemática 2* (segunda parte). Editorial de Libros para la Educación, La Habana.

Kratochvílová, J. (1998) Triády jako nástroj výzkumu myšlenkových procesu pri rešení problému. In Ausbergerová, M. & Novotná, J. (Eds.): *6. setkání ucitelu matematiky všech typu a stupnu škol*. (pp. 119–126), Mariánské Lázne, Praha.

Kratochvílová, J. (2001) *The structure of triads and pilot experiments*. Charles University, Faculty of Education, Praha. (URL: http://www.ex.ac.uk/~PErnest/ pome12/article11. htm)

Kahane, J. (2000) La commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques. En: *Gazette des Mathematiciens*, Vol. 84, pp. 63–69.

Kilpatrick, J. (1987a) Is teaching teachable? George Pòlya's view on the training of mathematics teacher. In F. R. Curcio (Ed.): *Teaching and learning: A problem–*

solving focus (pp. 85–97). National Council of Teachers of Mathematics, Reston, V. A.

Kilpatrick, J. (1987b) Problem formulating: where do good problems come from? In A. H. Schöenfeld (Ed.): *Cognitive science and mathematics education* (pp. 123–147). Erlbaum, Hillsdale.

Kubínová, M. (2001) *The position of didactics of mathematics in the training of mathematics teachers*. (URL: http://www.ex.ac.uk/~PErnest/pome12/article6.htm)

Labarrere, A. F. (1980) Sobre la formulación de problemas matemáticos por los escolares. En: *Educación*, No. 6, pp. 65–75.

Labarrere, A. F. (1988) *Como enseñar a los alumnos de primaria a resolver problemas*. Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

Labarrere, A. F. (1996) *Pensamiento. Análisis y autorregulación de la actividad cognoscitiva de los alumnos*. Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

Leung, S. S. (1993) *The relation of mathematical knowledge and creative thinking to the mathematical problem posing of prospective elementary school teachers on tasks differing in numerical information content*. Doctoral dissertation, University of Pittsburgh.

Leung, S. S. (1997) *On the role of creative thinking in problem solving*. (URL: http://www-emis.cwi.nl/journals/ZDM/zdm973a4.pdf)

Llivina, M. J. (1999) *Una propuesta metodológica para contribuir al desarrollo de la capacidad para resolver problemas*. Tesis doctoral, ISPEJV, La Habana.

Llivina, M. J. et al. (2000) *Un sistema básico de competencias matemáticas*. Ponencia presentada en el evento internacional "Contextualización de Problemas Matemáticos y Desarrollo de Competencias", Fundación Colegio UIS, Santander, Colombia.

López, E.; Fuentes, I. y Borrás, D. (2000) *Una alternativa metodológica para la formulación de problemas a la luz de las nuevas transformaciones en la asignatura Matemática en la secundaria básica*. Evento provincial Pedagogía' 2001, Santiago de Cuba.

Malara, N. A. (1997, Ed.) *An international view on didactics of mathematics as a scientific discipline*. Proceedings of working group 25 of ICME 8, University of Modena.

Martín, A. V. (1999) Más allá de Piaget: cognición adulta y educación. En: *Teoría de la Educación*, No. 11, pp. 127–157.

Martínez–Cruz, A. M. et al. (2001) Problem solving and problem posing in geometry with dynamic software. In: *Ohio journal of school mathematics*. No. 43, pp. 21–25.

Martínez–Cruz, A. M. & Contreras, J. N. (2001) An exploratory study of problem posing from numerical expressions by preservice elementary teachers. In Speiser, R., Maher, C. A. & Walter, C. N. (Eds.): *Proceedings of the twenty–third annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 2, pp. 859–865. Columbus, OH: ERICK Clearinghouse for Science.

Martínez–Cruz, A. M. & Contreras, J. N. (2002) Changing the goal: An adventure in problem solving, problem posing, and symbolic meaning with a TI–92. Paper accepted for publication in the *Mathematics Teacher*.

Mason, J.; Burton, L. & Stacey, K. (1982) *Thinking mathematically*. Addison Wesley Publishing Co. Inc., London.

Matos, J. M. (1997) Aprendizagens em matemática: Problemáticas da investigação portuguesa. Em A. M. Boavida et al. (Eds.): *Aprendizagens en matemática* (pp. 43–61). Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

McCrae, B. & Stacey, K. (1997) Testing problem solving in a high–stakes environment. In E. Pehkonen (Ed.): *Use of open–ended problems in mathematics classroom* (pp. 34–48). University of Helsinki.

Mitjáns, A. (1995) Como desarrollar la creatividad en la escuela. En: *Pensar y crear. Estrategias, métodos y programas* (pp. 156–208). Editorial Academia, La Habana.

Ministerio de Educación Nacional (1998) *Lineamientos Curriculares*. Cooperativa Editorial Magisterio, Santafé de Bogotá.

Ministerio de Educación (2002) *Plan de Estudio de la Carrera Matemática–Computación*. Vigente a partir del curso escolar 2002–2003, MINED, La Habana.

Muñoz, A. (1999) Experiencias de aprendizaje propuestas por los alumnos y su resolución en un taller de matemáticas. En: *Resúmenes del Relme 13* (p. 179). Universidad Autónoma de Santo Domingo, Editora Universitaria.

Nachtergaele, J. (1978) Inventing problems. In: *Mathematic pedagogie*, Vol. 4, No. 16, pp. 21–23, Belgium.

Nápoles, J. E. y Cruz, M. (2000) La resolución de problemas en la escuela. Algunas reflexiones*.* En: *Función Continua*, No. 8, Año I, pp. 21–42.

Nakano, A.; Hirashima, T. & Takeuchi, A. (2002) A learning environment for problem posing in simple arithmetical word problem. Takeuchi Lab, Kyushu Institute of Technology Department of Artificial Intelligence (URL: http://www.minnie.ai.kyutech.ac.jp/1/thesis/icce2000.pdf)

NCTM (2000) *Principles and standards for school mathematics*. (URL: http://standards.nctm.org/protoFINAL)

Nunokawa, K. (2000) Heuristic strategies and probing problem situations. En Carrillo, J. y Contreras, L. C. (Eds.): *Resolución de problemas en los albores del siglo XXI: Una visión desde múltiples perspectivas y niveles educativos* (pp. 81–117). Editorial Hergué, Huelva.

Pehkonen, E. (1995) Using open–ended problems in mathematics. In: *ZDM*, Vol. 27, No. 2, pp. 55–57.

Pehkonen, E. (1997) The state–of art in mathematical creativity. In: *ZDM*, Vol. 29, No. 3, pp. 63–67.

Pehkonen, E. & Segarra, L. (1998) Fostering of mathematical creativity. In C. Alsina et al. (Eds.): *Proceedings of the 8th International Congress on Mathematical Education* (pp. 271–275), SAEM “Thales”, Seville.

Perales, F. J. (1995) La resolución de problemas en la enseñanza–aprendizaje de las ciencias. En: *A distancia*, pp. 75–78, Madrid.

Pòlya, G. (1957) *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (2nd ed.). Princeton University Press, Princeton. (1st ed. in 1945.)

Pòlya, G. (1981) *Mathematical discovery* (combined ed.). Wiley, New York.

Posamentier, A. S. & Stepelman, J. (1996) *Teaching secondary school mathematics*. Prentice–Hall, Inc., Englewood Clifs, New Jersey.

Ratliff, M. I., Martínez–Cruz, A. M. & Contreras, J. N. (2001) Problem solving, problem posing, and technology in geometry. En: C. Cortés et al. (Eds.): *Memorias de la conferencia internacional sobre el uso de tecnologías en la enseñanza de las matemáticas* (pp. 191–196), Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Rebolledo, R. (1999) Mathematics, a key for development. In *World mathematical year 2000*, Newsletter 7 of IMU, pp. 1–2.

Reusser, K. (1996) From cognitive modeling to the design of pedagogical tools. In S. Vosniadou et al. (Eds.): *International perspectives on the design of technology–supported learning environments* (pp. 81–103). Mahwah, Lawrence Erlbaum Ass., New York.

Río, J. del; Hernández, L. Y. y Rodríguez, M. J. (1992) *Análisis comparado del currículo de Matemática (nivel medio) en Iberoamérica*. Mare Nostrum Ediciones Didácticas, S. A., Madrid.

Rizo, C. y Campistrous, L. (1999) Estrategias de resolución de problemas en la escuela. En: *Relime*, Vol. 2, No. 3, pp. 31–45.

Santana, H. (1998) *La validación en la Licenciatura en Educación de la carrera de Matemática–Computación en el período 1992–97*. Tesis de maestría, ISP "Enrique José Varona", La Habana.

Santos, L. M. (1993) *Learning mathematics: A perspective based on problem solving*. CINVESTAV–IPN, Dakota, Mexico.

Santos, L. M. (1994) *La resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. Cuadernos de Investigación, No. 28, UNAM, México.

Sarygin, I. (1991) Otkuda berutsa zadaci. *Kvant*, Vol. 8, pp. 42–48.

Schöenfeld, A. H. (1985) *Mathematical problem–solving*. Academic Press, New York.

Schöenfeld, A. H. (1992) Learning to think mathematically: Problem–solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. Grouws (Ed.): *Handbook* *of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334–370). Macmillan Publishing Co., New York. (URL: http://www-gse.berkeley.edu/Faculty/aschoenfeld/LearningToThink/)

Schöenfeld, A. H. (2000) *Purposes and methods of researching mathematics education*. University of California, Berkeley.

Sierpinska, A. et al. (1993) What is research in mathematics education, and what are its results? *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 24, No. 3, pp. 274–278.

Sierpinska, A. (1998) WMY 2000: Some themes for discussion. *World Mathematical Year 2000*, Newsletter 6 of IMU, pp. 1–2.

Silva, C. (1999) Usando las estrategias metacognitivas en la enseñanza de la Matemática. Universidad de Playa Ancha, Valparaíso.

Silver, E. A. (1994) On mathematical problem posing. In: *For the Learning of Mathematics*, Vol. 14, No. 1, pp. 19–28.

Silver, E. A. (1995) The nature and use of open problems in mathematics education: Mathematical and pedagogical perspectives. In: *ZDM*, Vol. 2, pp. 67–72.

Silver, E. A. (1997) Fostering through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. In: *ZDM*, Vol. 3, pp. 75–80

Silver, E. A. et al. (1996) Posing mathematical problems: an exploratory study. In: *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 27, No. 3, pp. 293–309.

Siñeriz, L. (2002) La enseñanza de la resolución de problemas de regla y compás. Del mundo de la pura resolución de problemas a la Escuela Media Argentina: estudio de dos casos. En: *Relime*, Vol. 5, No. 1, pp. 79–101.

Slepkan, Z. I. (1983) *Psijo–pedagoguicheskie osnovi obuchenia matematiki*. Radianska Shkola, Kíev.

Stacey, K. (1995) The challenges of keeping open problem–solving open in school mathematics. In: *ZDM*, Vol. 2, pp. 62–67.

Stacey, K. (1995) Problem solving in the mathematics classroom. Ten years on. In: *Prime Number*, Vol. 10, No. 1, pp. 24–25.

Stacey, K. & McCrae, B. (1998) Assessing problem solving: give and take. In: *The Mathematics Educator*, Vol. 3, No. 1, pp. 26–37.

Stacey, K. & Groves, S. (1999) *Resolver problemas: Estrategias*. Narcea, S. A. de Ediciones, Madrid.

Stacey, K. & Scott, N. (2000) *Orientation to deep structure when trying examples: a key to successful problem solving*. University of Melbourne.

Stephens, M. & McCrae, B. (1995) *Assessing problem solving in a school system: Principles to practice*. Preprint number 2, University of Melbourne.

Smilansky, J. (1984) Problem solving and the quality of invention. An empirical investigation. In: *Journal of educational psychology*, Vol. 76, No. 3, pp. 377–386, USA.

Tajika, H. et al. (1997) Mathematical problem–solving processes of students in Japan and The United States: a cross–cultural comparison. In: *Psychologia*, Vol. 40, No. 3, pp. 131–140.

Talízina, N. (1988) *Psicología de la enseñanza*. Editorial Progreso, Moscú.

Tonelli, M. e Zan, R. (1995) Il roulo dei comportamenti metacognitivi nella risoluzione dei problemi. In: *L'Insegnamento della Matematica e della Scienze Integrate*, Vol. 18A, No. 1, pp. 8–35, Gennaio.

Torres, P. (1993) *La enseñanza problémica de la Matemática del nivel medio general*. Tesis doctoral, ISP "Enrique José Varona", La Habana.

Torres, P. (1996) *Didácticas cubanas en la enseñanza de la Matemática*. Colección PROMET, Editorial Academia, La Habana.

Torres, P. (2000) *La enseñanza de la Matemática en Cuba en los umbrales del siglo XXI: logros y retos*. ISP "Enrique José Varona", La Habana.

Torres, P. et al. (1998) *Tendencias iberoamericanas en la educación matemática*. ISP "Enrique José Varona", La Habana.

Than, T. (1996) Application of Psychology and Pedagogy in Innovating Mathematics Teaching. In N. Dinh Tri et al. (Eds.): *Proceedings of the SEACME 7* (pp. 181–184), Hanoi.

Turner, S. & Sullenger, K. (1999) Kuhn in the classroom, Lakatos in the lab: Science educators confront the nature–of–science debate. In: *Science, Technology & Human Values*, Vol. 24, No. 1, pp. 5–31.

Verschaffel, L.; De Corte, E. & Borghart, I. (1997) Pre–service teachers' conceptions and beliefs about the role of real–world knowledge in mathematical modeling of school word problems. In: *Learning and Instruction*, Vol. 7, No. 4, pp. 339–359.

Verschaffel, L. et al. (1998) *Learning to solve mathematical application problems. A design experiment with fifth graders*. University of Leuven, Belgium.

Vîgotskiy, L. S. (1982) *Pensamiento y lenguaje*. Editorial Pueblo y Educación, La Habana. (Primera edición en 1934.)

Walter, M. I. & Brown, S. I. (1977) Problem posing and problem solving: an illustration of their interdependence. In: *Mathematics teacher*, Vol. 70, No. 1, pp. 4–13.

Wyndhamn, J. (1993) *Problem–solving revisited. On school mathematics as a situated practice*. Doctoral dissertation. Linköping Studies in Arts and Science. Linköping University, Sweden.

Yeap, B. (1996) Problem posing, problem solving and achievement in mathematics: an exploratory study. In N. Dinh Tri et al. (Eds.): *Proceedings of the SEACME 7* (pp. 185–189), Hanoi.

Zillmer, W. (1981) *Complementos de metodología de la enseñanza de la Matemática*. Editorial de Libros para la Educación, La Habana.

Zamorano, R. (1999) Constructivismo y modelos de cambio científico. En: *Educación en Ciencias*, Vol. III, No. 7, pp. 65–77.

Zimmermann, B. (1985) From problem solving to problem posing in mathematics education. In P. Kupari (Ed.): *Mathematics education research in Finland*. Yearbook 1985, Finland.

ANEXO 1

Encuesta sobre la elaboración de problemas en la escuela media.

Estimado profesor:

Para el desarrollo de nuestra investigación necesitamos de su amable colaboración. Las preguntas que siguen no persiguen ningún fin evaluativo; además, sus respuestas serán de carácter anónimo. Muchas gracias.

Datos profesionales:

Funciones que realiza:______________________ Enseñanza:________________

Municipio:_________________ Años de experiencia:____

1. Marque con una equis (x):

(**N** = Nunca; **P** = Pocas veces; **O** = En ocasiones; **M** = A menudo; **S** = Siempre)

		N	**P**	**O**	**M**	**S**
1	Me intereso por buscar ejercicios nuevos e interesantes para mis estudiantes.					
2	Elaboro ejercicios variando algunos datos.					
3	Cuando se culmina la realización de un ejercicio en mis clases discuto con mis estudiantes otros problemas que surgen.					
4	Yo mismo elaboro los ejercicios que propongo a mis estudiantes.					
5	A partir de un ejercicio puedo elaborar otro más general (aunque no lo sepa resolver).					
6	Los nuevos ejercicios se me ocurren al concluir la resolución de otro ejercicio.					
7	Logro variar el grado de dificultad de los ejercicios.					
8	A partir de un ejercicio puedo elaborar otro análogo.					
9	Se me ocurren nuevos ejercicios fuera del contexto escolar.					
10	Me resulta más fácil elaborar ejercicios relacionados con los contenidos que más domino.					
11	Elaboro nuevos ejercicios intercambiando lo dado con lo buscado (o bien parte de ello).					

2. En las transformaciones escolares de secundarias básicas aparece como objetivo que los estudiantes sean capaces no solo de resolver, sino también de '*plantear*' problemas. ¿Qué opina usted al respecto?
3. Describa brevemente cómo se le ocurren aquellos ejercicios que usted propone en los exámenes finales. (Trate de exponer lo que ocurre en su pensamiento.)

ANEXO 2

Resultados de los controles efectuados.

		CONTROL # 1				CONTROL # 2				CONTROL # 3				CONTROL # 4				POST HOC			
Estud.	**RP**	M1	P1	E1	**T1**	M2	P2	E2	**T2**	M3	P3	E3	**T3**	M4	P4	E4	**T4**	M5	P5	E5	**T5**
ACS	**2**	2	2	1	**1**	2	2	2	**2**	2	2	1	**1**	3	2	2	**2**	3	1	2	**2**
AHV	**2**	1	1	1	**1**	1	1	1	**1**	1	2	2	**2**	1	2	2	**2**	1	2	2	**2**
AMG	**1**	1	1	1	**1**	2	1	1	**1**	2	2	2	**2**	2	2	2	**2**	2	2	2	**2**
YLR	**1**	2	2	1	**1**	2	1	1	**1**	2	2	1	**1**	2	1	2	**2**	2	2	1	**1**
YLS	**1**	1	1	1	**1**	2	1	1	**1**	1	1	1	**1**	2	1	1	**1**	2	1	1	**1**
ASG	**1**	1	1	1	**1**	1	1	1	**1**	2	1	1	**1**	2	2	1	**1**	2	2	1	**1**
YRQ	**2**	1	2	2	**2**	1	2	2	**2**	1	2	2	**2**	2	2	2	**2**		BAJA		
JRO	**3**	2	2	2	**2**	2	2	2	**2**	3	2	3	**3**	3	3	3	**3**	3	3	3	**3**
YHR	**2**	1	1	1	**1**	1	1	2	**1**	1	2	2	**2**	1	2	2	**2**	2	2	1	**1**
TAR	**2**	1	1	1	**1**	2	2	2	**2**	2	2	2	**2**	2	2	2	**2**	2	2	2	**2**
NBH	**3**	2	2	2	**2**	2	2	2	**2**	3	2	2	**2**	3	3	3	**3**	3	3	2	**2**
YVP	**2**	1	1	1	**1**	1	2	1	**1**	1	1	1	**1**	2	2	2	**2**	2	2	2	**2**
JCR	**2**	2	1	1	**1**	2	1	2	**2**	3	2	2	**2**	3	2	2	**2**	3	3	2	**2**
ASA	**1**	1	1	1	**1**	1	2	1	**1**	2	1	1	**1**	2	2	1	**1**	2	2	1	**1**
AAS	**2**	1	1	1	**1**	1	2	1	**1**	1	2	1	**1**	1	2	1	**1**	1	2	1	**1**
FAC	**2**	2	2	2	**2**	3	2	2	**2**	3	2	2	**2**	3	2	2	**2**	3	2	3	**3**
RHA	**2**	1	1	1	**1**	1	3	1	**1**	1	2	1	**1**	2	2	1	**1**	2	1	1	**1**
KLG	**1**	1	1	1	**1**	1	1	1	**1**	2	1	1	**1**	2	2	1	**1**	2	1	1	**1**
YGA	**1**	1	1	1	**1**	2	2	1	**1**	2	1	1	**1**	2	2	1	**1**	2	1	1	**1**
YBC	**2**	1	2	1	**1**	2	2	1	**1**	1	2	1	**1**	1	2	2	**2**	2	2	2	**2**
LPL	**2**	2	1	1	**1**	2	1	1	**1**	3	2	1	**1**	3	2	2	**2**		BAJA		
ACP	**1**	1	1	1	**1**	1	1	1	**1**	1	2	1	**1**	2	2	1	**1**	2	1	1	**1**
RQR	**1**	1	1	1	**1**	1	1	1	**1**	1	1	1	**1**	2	1	1	**1**	1	1	1	**1**
MRA	**2**	2	2	2	**2**	3	2	2	**2**	2	2	2	**2**	3	2	2	**2**	3	2	2	**2**
YZA	**2**	1	1	2	**1**	1	2	2	**2**	2	2	2	**2**	3	2	1	**1**	2	2	1	**1**
BPP	**2**	1	1	1	**1**	1	2	1	**1**	1	1	1	**1**	2	1	2	**2**	2	2	1	**1**
MCG	**2**	1	2	1	**1**	1	2	2	**2**	2	2	1	**1**	2	2	2	**2**	2	2	2	**2**
LME	**1**	2	1	1	**1**	3	1	1	**1**	3	1	1	**1**	3	2	1	**1**	2	1	1	**1**
BFB	**2**	2	1	1	**1**	2	2	1	**1**	3	2	1	**1**	2	2	2	**2**	2	2	2	**2**
JSP	**1**	1	1	1	**1**	1	2	1	**1**	2	1	1	**1**	2	1	1	**1**	2	1	1	**1**
LLB	**2**	2	2	1	**1**	2	1	1	**1**	3	2	2	**2**	3	2	2	**2**	3	2	2	**2**
YSQ	**1**	1	1	1	**1**	1	2	1	**1**	2	1	1	**1**	1	2	2	**2**	2	2	2	**2**
AMD	**1**	2	1	1	**1**	2	2	1	**1**	2	2	1	**1**	2	2	2	**2**	2	2	2	**2**
RHR	**1**	1	1	1	**1**	1	2	1	**1**	1	1	1	**1**	1	2	1	**1**		SUSPENSO		
YMR	**2**	2	2	1	**1**	2	1	1	**1**	2	2	1	**1**	3	2	2	**2**	3	2	2	**2**
YSA	**3**	3	2	2	**2**	3	2	2	**2**	3	3	2	**2**	3	3	3	**3**	3	3	3	**3**
CCR	**3**	2	2	2	**2**	2	2	2	**2**	2	3	3	**3**	3	3	3	**3**		BAJA		
YCG	**3**	2	2	2	**2**	3	1	2	**2**	2	2	2	**2**	3	3	2	**2**	2	3	3	**3**
NLB	**2**	1	2	1	**1**	2	2	1	**1**	2	2	2	**2**	3	2	2	**2**	2	3	2	**2**
YBR	**1**	1	1	1	**1**	1	2	1	**1**	2	1	1	**1**	2	2	1	**1**	2	2	1	**1**
ODE	**2**	1	1	1	**1**	1	2	1	**1**	2	2	1	**1**	2	2	2	**2**	2	2	2	**2**

SLO	**3**	3	3	2	**2**	3	2	2	**2**	3	2	2	**2**	3	2	3	**3**	LICENCIA			
RHU	**2**	1	1	1	**1**	1	2	1	**1**	1	1	1	**1**	2	2	1	**1**	SUSPENSO			
RCT	**1**	1	1	1	**1**	1	2	1	**1**	1	1	1	**1**	2	1	1	**1**	SUSPENSO			
YMA	**1**	1	1	1	**1**	2	1	1	**1**	2	1	1	**1**	2	2	1	**1**	2	2	1	**1**

Leyenda:

RP = Evaluación del proceso de resolución de problemas; **M** = Metacognición;

P = Problema propuesto; **E** = Estrategia; **T** = Evaluación del proceso de formulación;

1 = nivel bajo; **2** = nivel medio; **3** = nivel alto

Tabulación de la frecuencia (test de entrada × test de salida).

Metacognición		M4			Total
		bajo	medio	alto	
M1	bajo	6	20	2	28
	medio	0	3	12	15
	alto	0	0	2	2
Total		6	23	16	45

Problema		P4			Total
		bajo	medio	alto	
P1	bajo	5	24	0	29
	medio	1	9	5	15
	alto	0	1	0	1
Total		6	34	5	45

Estrategia		E4			Total
		bajo	medio	alto	
E1	bajo	16	19	0	35
	medio	1	4	5	10
	alto	0	0	0	0
Total		17	23	5	45

Proceso		T4			Total
		bajo	medio	alto	
T1	bajo	17	19		36
	medio		4	5	9
	alto	0	0	0	0
Total		17	23	5	45

ANEXO 3
Test de creencias sobre los problemas matemáticos.

Responde por separado cada una de las siguientes preguntas.

1. ¿Qué es para ti un ejercicio matemático?
2. ¿Cuándo consideras que un ejercicio es interesante?
3. ¿Qué características tienen los ejercicios que no te gustan?
4. ¿Te gustaría inventar ejercicios interesantes? ¿Por qué?
5. ¿Te gusta resolver ejercicios matemáticos complicados? ¿Por qué?
6. ¿Cuándo consideras que un ejercicio es difícil?
7. El notable matemático británico Paul Halmos escribió en 1980:
   "*Yo estoy convencido de que los problemas son el corazón de la Matemática*…"
   ¿Qué opinas al respecto?

Transcripción literal de una de las respuestas (con idéntica redacción y ortografía):

"*1. Es un problema que da la posibilidad de razonar que está compuesto por números, variables, incógnitas entre otros datos.*

2. Un ejercicio es interesante cuando a través de él puedes resolver problemas de la vida diaria.

3. Los ejercicios que no me gustan son aquellos que no necesito razonar porque no cumplen ninguna función para mí.

4. Me gustaría inventar problemas interesantes porque en el puedo encontrar las respuestas a problemas de la vida y ya que estos le llaman más la atención a los alumnos.

5. Me gusta resolver ejercicios complicados porque así voy adquiriendo más conocimientos.

6. Considero que un ejercicio es difícil cuando no cuento con varios datos y cuando tenga que utilizar conocimientos no acostumbrados.

7. *Pienso igual que el matemático porque sin problemas la Matemática no tiene sentido además en ellos está la esencia de la Matemática.*”

Como puede apreciarse, los ítems 2, 3 y 5 revelan concepciones instrumentales (énfasis en la aplicación práctica y en el desarrollo del pensamiento). Esta misma concepción se manifiesta en forma dual en el ítem 4, mostrando razones instrumentales del tercer grupo (tanto para sí como para otros). Por otra parte, en el ítem 7 existen rasgos ligeramente platónicos, al identificar los problemas como objetos externos a sí. Esto es una muestra de que las concepciones sobre los objetos matemáticos no se expresan de manera pura, aunque una tenderá a ser predominante (como la instrumental en este caso).

ANEXO 4

El método problémico de búsqueda parcial en el planteo y solución de un problema.

En una tarea extraclase se orientó construir y clasificar según sus ángulos los siguientes triángulos:[21]

a) ΔABC; AB = 5 cm, BC = 7 cm y CA = 6 cm

b) ΔPQR; PQ = 5 cm, QR = 4 cm y RP = 3 cm

c) ΔDEF; DE = 5 cm, EF = 4 cm y FD = 2 cm

Una vez que se ha controlado esta actividad en una clase práctica subsiguiente, el maestro comienza la orientación de una nueva tarea:

Profesor. — *En la Enseñanza Secundaria estudiamos varios teoremas relativos a los triángulos; uno de ellos está relacionado con sus mediatrices. ¿En qué consistía?*

Alumnos. — *Las mediatrices se cortan en el mismo punto.*

Profesor. — *¿En qué punto?*

Alumnos. — *En el circuncentro… esto nos permitía construir la circunferencia circunscrita.*

En este momento el maestro orienta la tarea problémica de circunscribir los tres triángulos, haciendo uso de regla y compás. Al concluir esta actividad él plantea la siguiente pregunta problémica:

Profesor. — *Observen detenidamente las tres construcciones. ¿Qué les llama la atención?*

Alumnos. — *La posición del circuncentro en cada triángulo.*

Profesor. — *¿Pueden formular una conjetura?*

Alumnos. — *Parece ser que el circuncentro está dentro, sobre un lado o fuera, según el triángulo sea, respectivamente, acutángulo, rectángulo u obtusángulo.*

Después de demostrar la hipótesis para el triángulo rectángulo (los otros casos quedan de estudio independiente), observando que el circuncentro coincide con el

---

[21] Para efectuar esta clasificación es suficiente analizar el signo del coseno del ángulo opuesto al primer lado, haciendo uso de la Ley de los Cosenos.

punto medio de la hipotenusa, el maestro conduce un estudio retrospectivo que facilita la aparición de nuevas situaciones problémicas:

Profesor. — *¿Qué ocurriría si variamos algunas condiciones del problema?… Por ejemplo, ¿qué pasará si los triángulos se hubieran clasificado según los lados?*

Alumnos. — *Para tener una idea debemos probar primero con algunos casos… .*

La riqueza de este análisis puede incrementarse todavía más:

Profesor. — *Supongamos que se ha mantenido la clasificación original. ¿Qué otro elemento del problema podríamos variar?*

Alumnos. — *El punto notable. Tendríamos problemas nuevos relativos a la posición del baricentro, el ortocentro y el incentro.*

Profesor. — *Esto es una muestra de que la Matemática es una ciencia rica en problemas. Imaginen cuántas interrogantes más podrían aparecer si variamos, tanto la clasificación, como el punto notable.*

ANEXO 5

Un ejemplo de crítica para un problema propuesto.

El estudiante JSP propone el siguiente problema (con idéntica redacción y ortografía):

> “*Tal y como aseguró Fidel, con el nuevo programa los clubes de computación contarán con una tres mil máquinas de última generación para cumplir sus funciones sin intereses mercantiles. En tanto, de 883 instructores en una primera etapa, la cifra hoy se aspira a 1662. (Fuente; Bohemia).*
>
> *a) ¿Qué por ciento representa la cifra de la primera etapa de 1662?*
>
> b) *Representa el por ciento que obtengas como fracción.*
>
> c) *¿En qué por ciento creció la cantidad de instructores?*”

Como puede observarse se trata de un problema aritmético muy sencillo, donde los dos primeros incisos tienen sentido. Sin embargo, en el tercer inciso se exige el cálculo de algo que realmente ocurrió, cuando el texto asegura que supuestamente ocurrirá. Este problema fue entregado con su respectiva respuesta al experimentador; a continuación se entregó el problema sin la solución a una pareja de estudiantes (YLR y ASG), para que emitieran un juicio crítico después de resolverlo. Una vez que solucionaron exitosamente los dos primeros incisos, señalaron (refiriéndose al tercero): “… *no encontramos ninguna vía para hacer lo que pide (la pregunta está confusa o quizás mal elaborada)*.” A continuación se reproducen las respuestas que emitieron en la hoja de crítica.

Completa después de responder el problema en el reverso de la hoja.

Nombres: ___YLR___ y ___ASG___.
Autor del problema: ____JSP____.

1. En general el problema es… (Marquen una.)

( ) muy bueno ( ) bueno (X) regular ( ) malo

2a. ¿Qué les gusta más del problema?

Los datos reales que ofrece el ejercicio que aparecen en la Bohemia.

2b. ¿Qué les gusta menos del problema?

Que no elabora bien la pregunta (como el inciso c que está un poco confuso).

3a. ¿Puede resolverse el problema? (Marquen una.)

(X) si ( ) no ( ) no existe seguridad

3b. Si la respuesta fue “no” o “no existe seguridad” expliquen por qué.

4a. ¿Cómo es la Matemática contenida en el problema? (Marquen una.)

( ) muy difícil ( ) difícil ( ) moderada (X) baja ( ) muy baja

4b. ¿Qué fue lo que causó las mayores dificultades?

La forma de preguntar lo que hay que encontrar.

5a. ¿Es claro o confuso el planteo del problema? (Marquen una.)

( ) perfectamente claro ( ) falta claridad (X) algo confuso ( ) muy confuso

5b. ¿Qué fue lo que causó confusión? (En caso de haber existido.)

En el inciso c no encontramos ninguna vía para hacer lo que pide (la pregunta está confusa o quizás mal elaborada).

6a. ¿Es interesante el problema? (Marquen una.)

( ) muy interesante (X) interesante ( ) poco interesante ( ) puede interesarle a otros, pero no a mí

6b. ¿Qué causó mayor interés?

El tema que abordó.

7. ¿Qué le sugerirían al autor para mejorar y enriquecer el problema?

Que la pregunta se corresponda con los datos que nos brinda el problema o que cambie el modo de preguntar para ver si uno llega a lo que él pregunta, ya que así como está elaborado no sabemos con claridad lo que hay que encontrar.

Al entregar esta hoja de crítica al experimentador, se realizó un análisis minucioso de todas las respuestas emitidas. Tanto el problema como, las soluciones y la crítica, fueron puestas en manos del autor del problema, a fin de que este conociera la opinión de sus compañeros. Al día siguiente, se estableció un intercambio constructivo entre este estudiante y el experimentador:

Profesor. — *¿Leíste la crítica de tu problema?*

JSP. — *Sí.*

Profesor. — *¿Qué opinión tienes de lo que te señalan tus compañeros?*

JSP. — *Creo que tienen razón. Fue que no me fijé bien… debí decir que en qué porciento se aspira a crecer.*

Profesor. — *Sin embargo, tú emitiste una respuesta.*

JSP. — *Sí, profe, pero yo estaba pensando como si ya hubiera ocurrido.*

Profesor. — *Me parece muy bueno que reconozcas ese problema. Sin embargo, ellos te señalan que el problema es sencillo. ¿Tú querías elaborar un problema sencillo, o trataste de que fuera algo difícil?*

JSP. — *La verdad es que me preocupé más por buscar datos interesantes, pero cuando los encontré no supe qué preguntar y me acordé del tanto porciento y esas cosas que siempre están relacionadas con problemas de esos.* [Se refiere a los problemas con texto.]

Profesor. — *Yo también pienso que los datos que escogiste son muy interesantes, y creo que hiciste muy bien en colocar la fuente. ¿Te gustaría perfeccionar tu problema?*

JSP. — *Sí.*

Profesor. — *Entonces te sugiero dos cosas: En primer lugar, debes ser más cuidadoso con la redacción… puedes pedirle ayuda a la profesora de Español. En segundo lugar, trata de combinar mejor los datos que ofreces. Mira, la información sobre los clubes de computación es superflua, no la utilizas en ningún momento. No obstante, creo que si lo intentas puedes elaborar un problema todavía mejor y más complicado. ¿Qué opinas?*

JSP. — *Bueno, yo creo que sí.*

ANEXO 6

Un ejemplo de la aplicación del instrumento de Silver enriquecido.

Hoja de trabajo # 1.

Nombre:______________________________ Subgrupo:_____

1. Selecciona uno de los siguientes objetos matemáticos y formula un problema que, a tu modo de ver, resulte interesante para tus compañeros. No debes borrar; tacha si es necesario. Anota todas las ideas que se te ocurran y, cuando concluyas, describe qué procedimiento seguiste durante la formulación de tu problema. (Tiempo = 15 minutos.)

(1) $H(x) = (x^2 + x + 1)/(x + 1)$

(2) $S_n = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \ldots + 1/n$

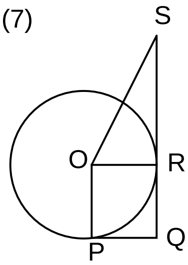
(3) $\operatorname{sen}^2 x + 2\cos x$

(4) $f(x) = x^2 + 2x$

(5) $2x - y = 5$

(6)
```
    1
   2  3
  4  5  6
 7  8  9  10
    …
```

(7)



2. ¿Por qué escogiste el objeto matemático anterior para la formulación de tu problema?

Hoja de trabajo # 2.

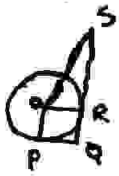
Nombre:______________________________ Subgrupo:_____

1. Resuelve el problema que formulaste en la hoja anterior. Si consideras que es necesario cambiar algunos datos o modificar la pregunta puedes hacerlo, pero debes escribir las razones que te obliguen a hacerlo. Puedes incluso transformar el objeto que elegiste inicialmente. No debes borrar; tacha si es necesario. Tampoco debes escribir en la hoja anterior. (Tiempo = 25 minutos.)

A continuación se reproduce un facsímile de las respectivas hojas de trabajo del estudiante ASA, cuyo proceso de formulación mostró un desarrollo bajo durante el tercer control.

Hoja de trabajo # 1 del estudiante ASA.

* En la siguiente ~~figura~~ circunferencia de centro O y radio OR, PQRO es un cuadrado y el ángulo OSR tiene una amplitud de 30° y $\overline{SR}$ es tangente en R, $3\overline{RQ} = \overline{OS}$. ¿Prueba que $\overline{SR}$ es igual a la suma de dos de los lados del cuadrado? ¿Calcula el área del triángulo ORS?



- tomé que PQRO es un cuadrado
- tomé que O era el centro de la circunferencia y OR radio.
- tomé a $\overline{SR}$ tangente a la circunferencia.
- le dí al ángulo OSR una amplitud de 30°.
- pensé que $\overline{OS} = 3\overline{RQ}$.
- realizé el problema e hice las preguntas correspondientes, según se me ocurrieron con respecto a la figura.

* me pareció el más fácil para elaborar un problema.

Hoja de trabajo # 2 del estudiante ASA.

$$\overline{OS}^2 = \overline{OR}^2 + \overline{RS}^2$$

Falso

$3RQ = \overline{OS}$

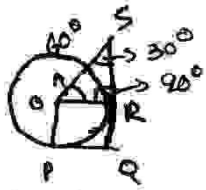
$\overline{SR} = \overline{OR} + \overline{PQ}$

$\overline{SR} =$ diametro

$(3\overline{RQ})^2 - \overline{OR}^2 = \overline{RS}^2$

$9\overline{RQ}^2 - \overline{OR}^2 = \overline{RS}^2$

$\overline{RS} = \sqrt{9\overline{RQ}^2 - \overline{OR}^2}$



- si el Δ OSR sus ángulos son 30°, 60°, 90° entonces $\overline{OS} = 2RQ$

---

modificaciones

- Le doy longitud a cualquier lado del cuadrado por ejemplo $\overline{PQ} = 2$ cm y cambio las preguntas.

¿Prueba que $\overline{SR} = \overline{OP}\cdot\sqrt{3}$?

$\overline{OS}^2 = \overline{OR}^2 + \overline{RS}^2$

$4^2 = 2^2 + \overline{RS}^2$

$\overline{RS}^2 = 4^2 - 2^2$

$\overline{RS}^2 = 16 - 4$

$\overline{RS}^2 = 12$

$\overline{RS} = \sqrt{12}$

$\overline{RS} = 2\sqrt{3}$

$\downarrow$

$\overline{RS} = OP\cdot\sqrt{3}$

* Elimino que $3\overline{RQ} = \overline{OS}$

¿Calcula el área del ΔORS si donde corta a la base, la altura es la mitad del lado $\overline{SR}$?

$h = \dfrac{\overline{SR}}{2}$

$h = \dfrac{8\sqrt{3}}{8}$

$h = \sqrt{3}$

$A_\Delta = \dfrac{b \cdot h}{2}$

$A_\Delta = \dfrac{4\cdot\sqrt{3}}{2}$

$A_\Delta = 2\sqrt{3}$