UNIVERSIDAD DE HOLGUÍN
FACULTAD DE INFORMÁTICA MATEMÁTICA

ÁLGEBRA CUATERNIÓNICA Y ALGUNAS APLICACIONES

SISTEMATIZACIÓN MONOGRÁFICA EN OPCIÓN AL TÍTULO DE MÁSTER EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA UNIVERSITARIA

Lic. RAFAEL MAURO ÁVILA ÁVILA

UNIVERSIDAD DE HOLGUÍN

HOLGUÍN
2015

UNIVERSIDAD DE HOLGUÍN
FACULTAD DE INFORMÁTICA MATEMÁTICA

ÁLGEBRA CUATERNIÓNICA Y ALGUNAS APLICACIONES

SISTEMATIZACIÓN MONOGRÁFICA EN OPCIÓN AL TÍTULO DE MÁSTER EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA UNIVERSITARIA

Lic. Rafael Mauro Ávila Ávila

UNIVERSIDAD DE HOLGUÍN

TUTOR: Dr.Cs. Ricardo Abreu Blaya

HOLGUÍN
2015

AGRADECIMIENTOS

A mi tutor Dr.Cs. Ricardo Abreu Blaya quien han sabido guiarme por el universo cuaterniónico y cliffordiano.

A la DrC. Rosa Isabel Urquiza Salgado, a quien le debo la inmensa motivación por iniciar y llevar a término el presente proyecto.

Al Profesor brasileño Dr. André Luiz Furtado, por su contribución a la formación y educación matemáticas en la Universidad de Holguín.

A todos aquellos quienes creen en la virtud como el Apóstol José Martí y en el poder de razonamiento matemático.

DEDICATORIA

A mi padre y hermana Magalis in memoriam

A mi madre, a mis hijos Rafa y Albert, a mi esposa María

A mi familia

A mi otra gran familia de hermanos gajoides: Richard, Pito, Jose, Joly

A mis amigos

A los matemáticos y físicos jóvenes y menos jóvenes de la Universidad de Holguín

RESUMEN

El tratamiento de los cuaterniones ha estado ausente en la mayoría de los diferentes programas y planes de estudio correspondientes a las matemáticas superiores, si bien constituyen objetos relevantes por sus diversos usos y las herramientas analíticas que generan. A partir del contexto general de las investigaciones en tópicos educacionales, se esboza un marco conceptual para la educación matemática universitaria en la universidad de Holguín, que contempla las dimensiones filosóficas, sociológicas y psicológicas y está inspirado en los esfuerzos teorizadores de varios pedagogos cubanos. En dicho ámbito se definen los conceptos y categorías básicas que se recomienda incorporar al proceso de formación continua de los futuros profesionales y que están imbricados en el subproceso de enseñanza aprendizaje del Álgebra Superior, uno de cuyos eslabones lo constituye el Álgebra Cuaterniónica. Se establecen ciertas bases teóricas y metodológicas que fundamentan la inclusión del tema en una monografía que sistematiza en un todo único la génesis de los cuaterniones y su evolución histórica, sus bases epistemológicas y filosóficas, las principales propiedades, sus relaciones con el Álgebra Vectorial y el Análisis Vectorial y algunas de las aplicaciones físicas de mayor. Se sugiere un conjunto de recomendaciones metodológicas en aras de una mejor lectura y empleo de la monografía propuesta.

Educación matemática, álgebra, cuaterniones, aplicaciones.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

En la actualidad la universidad cubana tiene la responsabilidad de formar profesionales capaces de enfrentar los problemas de su esfera y resolverlos con creatividad e independencia. Ello entraña la actualización y la profundización constante en el sistema de conocimientos, tanto desde una perspectiva teórica como aplicada.

En el ámbito de la tercera revolución educacional con sus transformaciones y cambios de paradigmas, se deben considerar los nuevos contextos sociales, económicos y culturales, que plantean modificaciones o análisis críticos de los métodos de enseñanza, planes de estudios y programas.

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, demanda una perpetua actualización. El mismo constituye un eslabón imprescindible no sólo para estimular la investigación en sus más disímiles disciplinas sino para inculcar también la necesidad de empleo de esta ciencia en función de determinados intereses sociales, en la búsqueda de soluciones a diversos problemas planteados por la práctica cotidiana y en la formulación de enfoques desde posiciones teóricas sólidas. Todo lo anterior se traduce en la consolidación de una concepción científica del mundo, en el desarrollo de la cultura general integral y en el fomento de las competencias y actitudes vitales en los estudiantes.

La Matemática es un fenómeno de la cultura universal; es a la vez ciencia impregnada de un dinamismo renovador; sus conceptos sufren transformaciones, a veces de forma acelerada; no se excluye el cambio más lento hasta de su propia concepción[1]. El valor de su conocimiento, de la información y la innovación que genera, constituyen elementos fundamentales para enriquecer esa cultura que necesita retroalimentarse de las incesantes contribuciones.

El fomento de diversas expresiones de la cultura matemática es posible a partir de la divulgación de las mismas en todos sus campos. Así se pueden aportar soluciones a la manifiesta contradicción entre el volumen de información a transmitir en consonancia con la necesaria actualización y el tiempo limitado para comunicarla.

Se han identificado varios aportes vinculados con el Análisis de Clifford. Tal hecho presupone propiciar una actualización al respecto. No obstante se requiere de la familiarización con las álgebras de cuaternios, un caso particular de las álgebras cliffordianas.

Durante los últimos cuarenta años se ha evidenciado una acelerada aplicación de los cuaterniones y sus generalizaciones en muchas disciplinas. Sin embargo resulta irónico que, la verdadera naturaleza de estos fue inicialmente mal entendida, lo cual causó un retraso de casi cuatro décadas en sus aplicaciones físicas[2]. La idea inicial, inspirada además en la creación de un tipo de números hipercomplejos referidos al espacio tridimensional[3] fue olvidada.

La aplicación de los cuaterniones a la solución de diferentes problemas ingenieriles es frecuente. Se ha demostrado que muchos de ellos asociados a visión computacional, robótica, navegación y fotogrametría pueden ser reformulados en términos cuaterniónicos[4]. Otros ejemplos de las áreas en las cuales se aplican, incluyen la termodinámica, la hidrodinámica, la geofísica y la mecánica estructural, todas con contenidos implicados en los programas universitarios de Física que se imparten en el país. Los cuaterniones a su vez, juegan un importante rol como lenguaje unificador de teorías físicas y matemáticas.

Hay cuestiones históricas poco conocidas. Así resulta que el Cálculo Vectorial representa el ejemplo más natural de una herramienta elemental ampliamente usada en la Geometría, la Física y las ciencias técnicas. Sin embargo casi se ignora que tanto el Álgebra, como el Análisis Vectoriales y el cálculo asociado, están genéticamente vinculados con los cuaternios, como lo demuestran las investigaciones históricas. La herencia cuaterniónica, al parecer fue eclipsada por las contribuciones de Willard Gibbs y Oliver Heaviside[5], tendencia que se ha mantenido por mucho tiempo y se refleja en la selección de los contenidos impartidos en el contexto del Álgebra y el Análisis.

Una importante literatura sobre el tratamiento de los cuaternios está disponible en otros idiomas. Algunas de las obras más representativas se deben K. Gürlebeck y W. Sprössig[6, 7], J.P. Ward[8], K. Gürlebeck, K. Habetha y W. Sprössig[9], V. Kravchenkov, M. Shapiro[10] y V. Kravchenkov[11]. En las mismas, los cuaterniones constituyen o bien capítulos dentro de contenidos más extensos del Análisis Cuaterniónico o apartados para introducir temas de mayor complejidad.

En el país no se tienen abundantes antecedentes en materia de publicaciones de libros escritos por autores cubanos, que aborden tópicos referidos a cuaterniones. Una monografía sobre Álgebra Multilineal[12] se publicó en a principios de la década del setenta del siglo pasado. La misma constituye un trabajo pionero importante en la exposición de una temática cuaterniónica aunque la trata de manera fugaz. En ella no se hacen referencias a las aplicaciones de los cuaterniones, ni a las propiedades, al origen histórico y otros asuntos de interés.

Se identifica un vacío epistemológico en los treinta años posteriores. Los programas tampoco contienen explícitamente el tema cuaterniónico.

A finales del siglo pasado comienza una etapa singular con investigaciones autóctonas vinculadas con la temática. Los artículos publicados[13, 14, 15, 16,17] no persiguen el propósito de sistematizar el Álgebra Cuaterniónica, si bien se destacan en ellos aportes indiscutibles a las Matemáticas. Otros trabajos dados a conocer en fecha relativamente reciente, abordan aplicaciones físicas en un ámbito cuaterniónico[18, 19, 20, 21, 22, 23,24]. El estudio de todos ellos requiere el dominio de las herramientas y el aparato conceptual básico, no sistematizado hasta el momento en un libro con tales fines.

A partir del análisis de la investigación matemática en el país y de las fuentes consultadas, se constatan las siguientes insuficiencias asociadas a:

- El desconocimiento en general por parte de los docentes y estudiantes universitarios, en unos casos, absoluto, de temas fundamentales que abordan el Álgebra Cuaterniónica, sus aplicaciones y generalizaciones así como el origen y evolución de los cuaterniones.
- La espontaneidad en el tratamiento esporádico de contenidos asociados a los cuaterniones en la enseñanza de la Matemática, sin una concepción previa que permita integrarlos al programa de Álgebra o de otras ciencias, lo cual limita la familiarización de los estudiantes de las especialidades de Matemática, ciencias técnicas, ingeniería y Física con estas temáticas y su profundización ulterior.
- La no presencia del tema en los programas de disciplinas claves para la formación científica del profesional como es el caso de la Matemática y la Física universitarias.

- La ausencia de publicaciones nacionales que sistematicen contenidos que traten sobre los conceptos, propiedades y aplicaciones de los cuaterniones y sus interrelaciones con el álgebra de vectores y los números complejos.

Los elementos expuestos permiten enunciar el siguiente **problema científico**:

La bibliografía empleada en el proceso de enseñanza aprendizaje del Álgebra en las carreras de Matemática y Física no sistematiza tópicos esenciales acerca de los cuaterniones y sus aplicaciones, limitando el conocimiento actualizado sobre el tema.

La investigación tiene como **objeto** el proceso de enseñanza aprendizaje del Álgebra. Este objeto determina, como **campo de acción**, los recursos bibliográficos para las asignaturas de Álgebra en el programa de Matemática vigente en el plan de estudios de las carreras de Física y Matemática.

En consonancia con el problema planteado, el **objetivo** central de la investigación consiste en elaborar una monografía que sistematice contenidos básicos de Álgebra Cuaterniónica y sus aplicaciones en aras de favorecer el conocimiento de sus fundamentos, en el ámbito de la educación matemática en la universidad.

Para el logro del objetivo general ha sido necesario dar respuesta a las siguientes **preguntas científicas**:

- ¿Qué elementos conforman el marco conceptual de la educación matemática universitaria y que permiten sustentar la propuesta de una monografía sobre el álgebra de cuaternios y sus aplicaciones?
- ¿Cuáles constituyen los tópicos básicos contemplados en la enseñanza del Álgebra que permiten introducir las temáticas referentes a los cuaterniones?
- ¿Qué características han de ser inherentes a una monografía sobre Álgebra Cuaterniónica que posibiliten familiarizar con sus conceptos y aplicaciones?

Durante el desarrollo de la investigación, se ha dado cumplimiento a las siguientes **tareas científicas:**

- Identificación de los elementos teóricos básicos del marco conceptual de la educación matemática universitaria y que sustentan una sistematización monográfica acerca del tema cuaterniónico.
- Caracterización del estado del arte en educación matemática universitaria así como de los contenidos relacionados con la enseñanza del Álgebra.

- Diseño en cuanto a estructura, contenido, forma y otros requisitos básicos que debe reunir una monografía en aras de propiciar el conocimiento de los fundamentos del álgebra de los cuaterniones, ciertas aplicaciones y otros temas.

Los **métodos científicos** del nivel teórico empleados son:

El análisis y síntesis: en la valoración y resumen de la información obtenida sobre las asignaturas que integran el currículo de pregrado en las especialidades de Matemática y Física, en el tratamiento analítico de lo interdisciplinar y transdisciplinar en el contexto de tales disciplinas, en las valoraciones sobre la literatura empleada en los programas de Álgebra y sobre la necesidad de contar con recursos bibliográficos en correspondencia con las demandas del proceso de enseñanza aprendizaje del Álgebra de cuaterniones en el ámbito de la educación matemática en la universidad, desde un perspectiva que integre lo filosófico y los histórico.

El método histórico-lógico: resultó fructífero en la investigación del objeto, de sus antecedentes, de la bibliografía disponible, especialmente sobre el álgebra de los cuaterniones en diferentes etapas así como en las indagaciones acerca del empleo de tales recursos bibliográficos en la enseñanza a nivel universitario.

En cuanto al nivel empírico se utilizó la observación científica expresada en: la experiencia del autor en la impartición de programas afines en distintas etapas asociadas con los planes de estudios, la exposición de temas selectos referidos a cuaterniones así como en la observación del desempeño de estudiantes y el profesor en un curso impartido sobre tales temas.

Otro método consistió en la revisión de documentos: se empleó con el fin de analizar y procesar la información que ofrecen los programas de disciplina y asignaturas, particularmente los de Álgebra, Matemática, Física General y Física Teórica.

La **novedad científica** de la investigación reside en la elaboración de una monografía en idioma Español en aras de facilitar el proceso de conocimiento de los rudimentos del Álgebra Cuaterniónica, sus aplicaciones así como sus relaciones con el Álgebra Vectorial y la sistematización de los contenidos específicos de aquella. Dicha monografía no sólo se limita a una exposición sistemática del tecnicismo algebraico cuaterniónico, sino también incorpora elementos de la historia de la ciencia, la filosofía y las aplicaciones de los cuaterniones, en especial en la Física, además de contener un conjunto de ejercicios y problemas en aras de propiciar la asimilación de los contenidos seleccionados.

La monografía contribuye a la enseñanza del Álgebra y está en correspondencia con las necesidades de la formación avanzada de estudiantes universitarios de especialidades de ciencias matemáticas, físicas y algunas técnicas. Se tratan en ella temas olvidados por mucho tiempo en los programas y que están a tono con los logros obtenidos en los últimos años con ayuda del Álgebra y el Análisis de Clifford.

La **significación práctica** se asocia con la confección de una monografía sobre un tema poco conocido, acompañada de la elaboración de indicaciones metodológicas para viabilizar el conocimiento del álgebra de los cuaterniones y algunas de sus aplicaciones.

El hecho de disponer de la misma, familiariza con los conceptos fundamentales del Álgebra Cuaterniónica, sistematiza algunas de sus aplicaciones y confiere gran **actualidad** a la investigación acometida.

La tesis está compuesta, además de la introducción, por dos capítulos. En el primero, se establecen los presupuestos teóricos necesarios para la escritura de la monografía teniendo en cuenta la sugerencia de un marco conceptual para la educación matemática en la universidad. De igual forma, se expone el estado del arte en tal campo así como el del Álgebra Cuaterniónica. Se caracterizan además los temas que han sido objeto de estudio y favorecen la comprensión y asimilación de aquellos tópicos cuaterniónicos básicos.

El capítulo dos incluye la monografía elaborada según los fines que persigue la investigación desarrollada. Dicha monografía está precedida de un análisis de las particularidades de su diseño y estructura, de los contenidos esenciales seleccionados, de los nexos entre el álgebra de vectores y el álgebra de los cuaterniones y otros tópicos.

Se ofrecen recomendaciones metodológicas que enfatizan en las vías para el empleo de la monografía, los contenidos teóricos que resultan necesarios para abordar un estudio sistemático de los cuaternios y sus aplicaciones. Se sintetizan también valoraciones acerca de la utilización de los contenidos de la monografía en un contexto más general y no sólo en el marco de la educación matemática superior.

CAPÍTULO I

I.1 Fundamentos teóricos para la sistematización monográfica del Álgebra Cuaterniónica y sus aplicaciones

I.1.1 Investigación en educación matemática universitaria

En el contexto de la educación superior cubana, no son pocas las especialidades que incluyen a la Matemática en sus programas de estudio. Esto obedece al papel que se le atribuye a dicha disciplina en la formación del profesional. Sin embargo subsisten incomprensiones acerca de su rol, sobre lo que debe enseñarse en función del perfil profesional del egresado y sobre la contribución de tal ciencia a la cultura y educación del individuo.

La experiencia demuestra que los estudios de Matemática durante casi doce años en la escuela, no garantizan que buena parte de los estudiantes tengan aquellos conocimientos en este campo, capaces de proporcionar la competencia necesaria para asimilar un curso de matemáticas superiores, ni para entender a cabalidad el rol de esta ciencia en el desarrollo del pensamiento del hombre. Ello se refleja al menos en el primer año de las carreras que contemplan a tal disciplina en el currículo y representa un serio obstáculo que es necesario superar en aras de hacer más efectivo el proceso de transmisión y asimilación de los contenidos propios de los programas y convertir su saber en elemento distintivo de la cultura del universitario.

Tal y como se constata a partir de las tendencias contemporáneas, la Matemática ha evolucionado tanto en su carácter de ciencia básica como en su estatus de saber susceptible de ser transmitido, asimilado e incorporado al acervo cultural del hombre. El carácter de saber que debe ser aprendido y enseñado, al parecer tiene sus orígenes en las raíces mismas de su surgimiento como ciencia. Según la Metafísica de Aristóteles, las ciencias o artes matemáticas (mathematikai technai) aparecieron junto a la actividad de los sacerdotes egipcios por ser los únicos en tener la posibilidad de disponer de mucho tiempo libre para estudiarlas en sus esencias.

La designación de mathematikoi (matemáticos) a quienes se dedicaban al estudio de ellas, procede de la época de los pitagóricos. De acuerdo a los trabajos de Salomón Bochner[25], el término inicialmente se usó para designar a los estudiantes de una escuela de graduados, quienes eran asiduos asistentes a las clases. Los asistentes eventuales fueron llamados oidores (akousmatikoi)[26].

A veces se emplea el término matemática y otras el vocablo matemáticas. Este último, tal y como está escrito, se pronuncia con la letra s al final y se usa desde la época de los antiguos griegos en el sentido "de aquello que ha sido aprendido o entendido, o conocimiento adquirido o adquirible en virtud del aprendizaje"[26].

Jean Etienne Montucla, primer historiador moderno de las matemáticas, hizo referencia a les mathematiques (en plural) en su historia de esta ciencia que data de 1799. La supresión de la letra s en los idiomas Español y Francés, se debe a la Escuela Bourbaki cuyo desarrollo comenzó alrededor de 1940. De acuerdo a lo expresado, la letra s en la palabra de origen griego no necesariamente indica plural como en los casos de los vocablos psiquis, análisis o hipótesis.

Por otra parte, la restricción que usualmente se hace del conocimiento general al específico de lo que hoy se entiende por matemáticas, procede del tiempo de Aristóteles. Ello hace sospechar que las matemáticas han estado vinculadas con la enseñanza y el aprendizaje desde sus mismos orígenes. Por tanto lo que se refiere a la educación matemática es consustancial con los métodos de enseñarla y aprenderla, los cuales han sido de importancia trascendente en su conceptualización. No es casual que varias de las publicaciones sobre el tema en las últimas décadas se refieran precisamente a los métodos referidos[27,28,29,30,31,32,33,34,35] o determinados tópicos esenciales propios del proceso de enseñanza aprendizaje[36,37,38,39].

La educación matemática universitaria constituye un activo campo de investigación en diferentes países. En los últimos diez años las pesquisas se han incrementado esencialmente en el área de la enseñanza y el aprendizaje. No obstante en ésta aún se genera menos información que la generada a raíz de las investigaciones que tienen por base la práctica pedagógica de los maestros de matemática en la escuela[40].

A finales del siglo pasado se afirmaba que las investigaciones en dicho campo habían sido marcadas por la prevalencia del enfoque constructivista de J. Piaget. Sin embargo la crítica a tal concepción subsistió puesto que era reducida al proceso de aprendizaje en la Matemática sin considerar suficientemente la existencia de dimensiones culturales y sociales, entre otras[41].

En lo que va de siglo, en el campo de investigación han ido apareciendo tendencias que incorporan tanto lo empírico como lo teórico para enfocar la enseñanza. Duval's[42] ha abordado las interrelaciones con la semiótica; Wood, Joyce, Petosz y Rodd[43] promueven la representación múltiple de conceptos matemáticos, Artemeva y Fox[44] se acercan al tópico de la enseñanza de la Matemática desde una perspectiva lingüística; Fukawa-Connelly[45] investiga la enseñanza de la demostración en cursos de álgebra abstracta mientras que Gücler[46] emplea una teoría comognitiva para abordar la educación matemática en la universidad.

En relación con esta última línea investigativa, la teoría está basada en el marco conceptual desarrollado por Sfard[47] con el fin de estudiar el pensamiento matemático y en particular la enseñanza y el aprendizaje de esta ciencia. Se inspira en los principios de Vigotsky y su enfoque histórico cultural. Él acuña el neologismo comognición, derivado de los vocablos comunicación y cognición.

En ámbitos más cercanos al contexto cubano, algunas investigaciones se han desarrollado centrando también el interés en la enseñanza y aprendizaje. Temas como la demostración matemática y su enfoque a partir de guías secuenciadas[48], y la enseñanza de la Matemática teniendo en cuenta lo didáctico, lo epistemológico y la textualización[49] resultan de interés. Se buscan alternativas educacionales más orientadas hacia nuevas contribuciones desde una perspectiva histórica[50] e incluso se explora la didáctica general constructivista y se identifican obstáculos epistemológicos[51].

Tal y como trasciende de la práctica educativa, lo que se enseña y aprende en Matemática está influenciado por puntos de vistas diversos, especialmente por los que proceden de la epistemología y la filosofía. Es de esperar así que la educación matemática no sólo se restrinja únicamente a los aspectos propios de la enseñanza y el aprendizaje, sino a un conjunto de otros factores más allá de la interacción entre alumno-profesor. Es necesario complementar el diseño de los planes y programas de estudio, la adecuación y contextualización de los libros de texto, el desarrollo de las metodologías de la enseñanza y las diversas teorías del aprendizaje o la construcción de marcos teóricos para la investigación educativa, puestos en práctica a partir de concepciones filosóficas y epistemológicas amplias[52].

En consonancia con lo expresado, se hace a veces referencia a una contextualización didáctica en la contemporaneidad que representa “la unidad dialéctica de un proceso determinante en las conexiones objetivas entre la cultura matemática y el contenido de la enseñanza”[53] y en el cual se integran resultados, creaciones, la producción científica, los proyectos y fines de la ciencia, los fenómenos de socialización de sus resultados y los medios y mecanismos para lograrlos, a partir de las propias necesidades de su desarrollo. Se convierte así la cultura matemática conformada en un primer escalón por los propios avances de esta ciencia, en uno de los elementos claves para la transformación y la vitalidad de los contenidos, los cuales necesitan una nueva manera de sintetizarse, sistematizarse, de explicarse y publicarse.

Hay resultados de interés asociados a estrategias metacognitivas y motivacionales durante el proceso de formación matemática en estudiantes universitarios. En los mismos se identifican varias destrezas como razonar lógicamente, sintetizar información, resolver problemas, argumentar demostraciones o modelar situaciones reales[54]. No se deja de reconocer que aparejado a ello, el profesional debe emerger competente, con preparación científica, con una formación integral, desarrollo humanístico y con los valores como pilar básico de esa formación.

A partir del análisis de las publicaciones se identifica un punto de vista que hace referencia a la educación matemática en términos de métodos de enseñarla y aprenderla, lo cual ha sido una consecuencia del vínculo entre enseñanza y aprendizaje de lo específico de la Matemática desde los propios orígenes de esta. No obstante no aparecen bien definidos los términos educación matemática en la universidad ni su aparato categorial esencial.

Por otra parte se reconoce también que tal tipo de educación no sólo tiene en cuenta la relación alumno-profesor, sino otros factores que van más allá de las enseñanzas y aprendizajes, por lo que se requiere de adaptar, construir o asumir un marco teórico que integre dimensiones filosóficas y epistemológicas, entre otras.

La ausencia de tal marco en el contexto de la universidad entorpece la investigación educativa en conexión con las matemáticas. En aras de lograr el necesario fundamento para la sistematización monográfica del Álgebra Cuaterniónica y algunas aplicaciones y que esté a tono con la educación matemática, es necesario asumir ante todo un marco conceptual con determinada coherencia.

I.1.2 Un marco conceptual para la educación matemática universitaria

Las matemáticas, una de las herramientas básicas para el análisis, la cuantificación y la modelización de fenómenos investigados por diversas disciplinas, juegan un importante papel junto a los disímiles saberes de los cuales se nutre la cultura humana. El reconocimiento de tal rol no ha impedido la promoción del cuestionamiento al que ha sido sometida la propia matematización desde hace algún tiempo[55]. Sin embargo y muy a pesar de las polémicas que suscita tanto la propia Matemática como la referida matematización, una verdad se impone: sin las contribuciones de esta ciencia no hubiesen sido posibles cuantiosos avances científicos y tecnológicos que sustentan la sociedad y contribuyen al bienestar del hombre.

Las consideraciones abstractas sobre las nociones de número, espacio, estructura así como los procedimientos deductivos en los que se involucran, han sido capitalizadas gracias a la Matemática. Esta tiene un enorme poder descriptivo, prescriptivo y predictivo con una potencia que reside en la capacidad de favorecer el desarrollo del pensamiento y en particular uno de sus atributos más poderosos: el razonamiento. Con ayuda de este, se pueden inferir consecuencias en diferentes escenarios antes de que las acciones se desencadenen y apelando tanto a herramientas cualitativas como cuantitativas.

Desde el aspecto interno, la Matemática con sus conjeturas, postulados, teoremas, lemas, intuiciones y métodos de demostración, constituye un exponente de la capacidad creativa del intelecto humano; es también ciencia capaz de proporcionar un esquema conceptual que junto al método experimental conforman la base de la ciencia moderna; en su marco, la tecnología ha encontrado un soporte para realizaciones concretas y se funde con aquella para conformar junto a innumerables disciplinas, la denominada tecnociencia[56].

Aparejado al impetuoso desarrollo del conocimiento matemático, hay que reconocer que si bien existe la tendencia de asimilar lo más novedoso logrado en este campo, no siempre los adelantos son incorporados de manera inmediata a los programas de formación universitaria. Sea crea así cierta falta de coordinación entre ciencia matemática de avanzada y formación-educación matemática, muy a pesar de la evolución que han experimentado las ideas relacionadas con la educación.

De las antiguas y fragmentarias reflexiones sobre el saber pedagógico hasta los enfoques renovadores y las últimas tendencias, han transcurrido varios siglos. Juan Amos Comenius confirió a la Pedagogía un gran impulso en el siglo XVII, al estructurarla como ciencia autónoma y establecer sus primeros principios. No obstante, es curioso que aún en la actualidad, se declaren tendencias de la teoría educativa latinoamericana[57] por un lado, mientras que por otro se propongan parámetros para fundamentar el carácter científico de la ciencia pedagógica. Un resultado de ello es el debate en torno a desarrollos de teorías educativas en estadios en que muchos autores no le han conferido a la Pedagogía el status de ciencia constituida.

Varios investigadores cubanos trabajan en el campo de la Pedagogía[58]. Resultados abundantes se refieren al ámbito escolar y son menos copiosos en el contexto de la educación matemática en la universidad. Varios problemas permanecen aún sin resolver, en particular el asociado a la representación simbólica conceptual de partida para la organización del proceso de transmisión de conocimientos que es objeto de apropiación por parte de los estudiantes[59].

Resulta difícil aceptar que los hechos educativos de la realidad cubana, se resistan a ser enfocados a partir de la construcción de conjeturas sobre el mecanismo subyacente a la formación multilateral y armónica del hombre, nucleada alrededor de la formación de valores morales y que integre al individuo al desarrollo y perfeccionamiento de la sociedad mediante influencias conscientemente organizadas, dirigidas y sistematizadas[60].

Si la categoría general de educación ha de adquirir matices dimensionales nuevos, revelando las contradicciones en su unidad, de modo que la ciencia de la educación sea también expresión de tales matices y contradicciones dialécticas[57] y por otra parte, se precisa de un sistema de principios generales o axiomas fundamentales sobre la base de la sistematización de los hechos del campo pedagógico y la precisión de su aparato categorial y conceptual, la construcción de una teoría factual[61] puede ser la primera fase de las elaboraciones teóricas.

El punto capital de la teorización constituye la representación conceptual y contrastable de la realidad educativa en una cadena que abarca: el descubrimiento de nuevos hechos observables, el planteamiento de hipótesis para explicar los hechos conocidos; el descubrimiento del hecho nuevo de que las hipótesis satisfacen algunas de las contrastaciones y determinan su expansión hasta conseguirse una teoría que unifique las piezas sueltas del conocimiento educativo.

Los momentos actuales necesitan una manera de educar a partir de una concepción científica propia y en concordancia con lo más avanzado de las ciencias en el mundo, aunque no exista una teoría pedagógica cubana; tampoco una teoría de la educación universitaria y mucho menos una teoría de la educación matemática en la universidad. Incursionar en estos campos puede contribuir a la búsqueda de eslabones perdidos entre una ciencia exacta par excellence como la Matemática en la universidad y una social como lo representa la Pedagogía.

La idea de un marco conceptual[60] para la construcción de una teoría pedagógica cubana, ofrece alternativas para desarrollar una manera de teorizar a partir de axiomas, postulados o principios[62]. Las teorías maduras construidas según este modelo, recuerdan la construcción primaria de la Geometría en el marco del paradigma euclidiano de los Principios y que sirvió a la vez como modelo de ciencia deductiva edificada con ayuda del empleo del método axiomático. Sin embargo, la ausencia aún de una teoría de los hechos pedagógicos universitarios, dificulta el camino hacia su formalización.

El marco conceptual para elaborar una concepción integral acerca de la educación matemática universitaria, constituye una alternativa en el presente estadio en el que se encuentran las pesquisas sobre tal temática. Dicho enfoque ha sido empleado en aras de sentar las bases para la construcción de una teoría pedagógica de aplicabilidad en los ámbitos de la escuela cubana. Ello sin embargo, no constituye ningún obstáculo para que puedan explorarse los criterios tenidos en cuenta con la perspectiva de aplicarlos en otros ámbitos escolarizados.

La universidad como institución social antecede en muchos años al presente período del desarrollo histórico. Los cambios operados en ella imprimen a los entornos universitarios dinámicas bastante diferentes con emergencias y comportamientos caóticos, atractores y ciclos límites que ponen a prueba la capacidad de los modelos tradicionales[63].

La identificación de procesos sustantivos tales como el formativo, la investigación científica y el extensionismo, es esencial en un intento de metrizar las características de la universidad que se demanda.

Si se aborda el proceso formativo y la exigencia de profesionales con una formación más integral, todo parece indicar que se ha avanzado en tal dirección con relación a años precedentes. Sin embargo es deseable indagar la medida de la heterogeneidad u homogeneidad de esa preparación, la posibilidad de introducir criterios que posibiliten la evaluación real de la preparación integral y de valorar las influencias educativas sistemáticas.

En tal sentido, cobra importancia reflexionar tanto sobre educación en general como acerca de educación matemática universitaria. Hacer referencia a este último término implica reconocer la existencia de toda una taxonomía referida a ella que incluye a la educación matemática preescolar, la educación matemática escolar, la educación matemática general y otras clases.

La indagación sobre los mecanismos educativos posibles que inmiscuyen parcelas del saber y la creación, como lo representa la Matemática en la educación superior requiere esfuerzos teorizadores de envergadura. En estos momentos no se cuenta con teorías pedagógicas autóctonas capaces de explicar todos los hechos de la realidad educativa, si bien se han dado pasos sólidos para elaborar una de aplicabilidad a la escuela[60, 62,64].

Dada la profundidad y las particularidades de los estudios universitarios en ciencias matemáticas y el papel de estas en la formación profesional y en la cultura general, es necesario adoptar determinado marco conceptual.

El conocimiento científico opera con conceptos y sistemas de conceptos interrelacionados de diversas maneras. El concepto constituye una unidad de pensamiento[61], una forma de pensamiento abstracto en el que se reflejan los indicios sustanciales y distintivos de un objeto o de una clase de objetos homogéneos[65]. Hacer referencias a marcos conceptuales es referirse a sistemas conceptuales cuya estructura y sentido pueden ser esclarecidos con ayuda del análisis filosófico como instrumento valioso para analizar el conocimiento conceptual y para generar otros sistemas conceptuales mediante análisis, síntesis, abstracción, generalización y comparación.

Una concepción de la educación matemática del estudiante universitario, especialmente allí donde esta ciencia constituye uno de los núcleos duros del plan de estudios, es deseable y saludable.

La ciencia y la tecnología han experimentado avances significativos por caminos insospechados; sus entrelazamientos con la sociedad son cada vez más acentuados y los impactos de aquellas en la cosmovisión del individuo moderno son irrefutables, modificando a veces el sistema de valores establecidos. De ahí otro de los imperativos para el desarrollo de un pensamiento teorizador acerca de la Matemática y la educación en el ámbito de la universidad.

La construcción coherente de un sistema de ideas que permitan elaborar una teoría de la educación matemática en la universidad, ha de orientar los esfuerzos sistematizadores así como aglutinar las ricas experiencias de la práctica pedagógica universitaria de quienes han dedicado años a la formación de profesionales capaces de incorporar a su acervo el aparato conceptual y categorial de tal ciencia.

Si la ciencia constituye una forma de la conciencia social como “sistema históricamente formado de conocimientos ordenados cuya veracidad se comprueba y se puntualiza constantemente en el curso de la práctica social”[66], la construcción de la noción de marco conceptual partiendo de tal comprensión filosófica, resulta válida.

Se adopta aquí como definición de marco conceptual “el conjunto o sistema de postulados, principios, preceptos o reglas que posibilitan estructurar el conocimiento científico y sus métodos y deducir de ellos nuevos principios metodológicos que posibiliten investigar diversos problemas científicos”[60]. Por tanto representa los cimientos de un sistema categorial básico, capaz de potenciar las pesquisas en educación matemática en el nivel universitario, guiar la práctica pedagógica asociada a tal ciencia en dicho nivel, elaborar un cuerpo teórico coherente en torno a ella, orientar las concepciones y estructurar las investigaciones con relación a tal campo de actividad.

I.2 Dimensiones del marco conceptual para la educación matemática universitaria

Los vínculos multilaterales entre universidad y sociedad, Matemática y Filosofía, educación y Psicología, perfilan un marco conceptual para la educación universitaria que puede representarse mediante un espacio abstracto tetradimensional cuyas dimensiones son la filosófica, la psicológica y la sociológica y el tiempo. Las primeras tres han sido elegidas de acuerdo a la experiencia educativa cubana. Un punto en tal espacio de configuración representa cierto estado, cuya evolución conduce a cierta trayectoria abstracta que representa el comportamiento dinámico o la evolución de dicho marco.

Tal carácter evolutivo es consecuente con los principios de la Dialéctica, según los cuales, no es posible construir un sistema definitivo y cerrado de concatenaciones universales físicas, espirituales e históricas, pues de lograrse, se cerraría el campo de los conocimientos humanos, resultado absurdo y que entraña un contrasentido. Conserva plena validez el hecho de que “toda imagen conceptual del sistema del mundo es y seguirá siendo siempre limitada, objetivamente, por la situación histórica, y subjetivamente, por la contextura física y espiritual de su autor”[67].

I.2.1 La dimensión filosófica

De la misma forma que la Pedagogía en Cuba reclama una filosofía de la educación como disciplina teórica en la interface entre ella y la Filosofía, que le sirva de fundamento teórico, oriente los otros fundamentos y la acción educativa, la educación matemática en la universidad precisa de una filosofía aunque en un contexto más particularizado.

En virtud de que una base filosófica de la educación en Cuba la constituye la Dialéctica Materialista combinada con los principios de profundas raíces martianas, la educación matemática universitaria debe propiciar aprehenderlos. Los fundamentos filosóficos sobre los cuales se estructura, perfilan los fines de tal educación así como el tipo de profesional que se desea formar considerando tanto las competencias como los valores.

Esta dimensión tiene en cuenta la característica del hombre como ser biopsicosocial, su desarrollo y transformación en el curso de la historia, su capacidad para ser educado, educarse y educar a los demás. Por tanto la concepción de una educación matemática universitaria debe partir de la educabilidad del ser humano dada su intrínseca naturaleza racional. Ello justifica la organización de un sistema armonizado de influencias para formarlo de manera multilateral, competente y pertrechado de valores en aras de su integración a la sociedad y de propiciar su contribución al desarrollo.

No es deseable formar un matemático en abstracto, encasillado en los aspectos técnicos de su ciencia, porque la ciencia no constituye un mundo divorciado de la realidad como consideran los positivistas. La Matemática y la ciencia en general "tienen profundas raíces en la propia realidad, en la cultura de los pueblos, a la que nutre en reciprocidad"[68].

El ser humano es educable toda la vida, idea congruente con los postulados martianos sintetizados en la máxima: "la educación empieza con la vida y no acaba sino con la muerte"[69].

La dimensión filosófica de la educación matemática en la universidad, tiene en cuenta los siguientes aspectos:

- El estudio profundo de los vínculos entre Matemática y Filosofía como uno de los elementos esenciales para propiciar el desarrollo de un pensamiento teórico.

Las indagaciones en la historia de la ciencia, permiten ser partícipes de valiosas lecciones. Una de ellas radica en el convencimiento de que la Filosofía es a menudo el resorte necesario para descubrimientos científicos fundamentales, que se hallan en el origen de una nueva teoría, de un nuevo punto de vista o de una revolución del pensamiento[67].

Abordar las relaciones filosófico-matemáticas facilita el pensar teórico; este no es un don natural, sino debe ser cultivado y desarrollado. La Filosofía constituye una vía para tal cultivo y desarrollo. Vale recordar que "una nación que quiera mantenerse a la altura de la ciencia, no puede prescindir de un pensamiento teórico"[67].

- La combinación de una formación científica profunda en correspondencia con la época y el despliegue de las potencialidades espirituales del futuro profesional, expresada en el desarrollo de la creatividad y el espíritu crítico, desprejuiciado y la libertad de pensamiento.
- El conjunto de valores que debe incorporar un profesional y la posibilidad de incorporar las tradiciones culturales universales y autóctonas, con un papel

protagónico en el momento histórico que le corresponde, todo lo cual le permite avanzar hacia nuevas cumbres del saber.

La filosofía de la educación matemática universitaria incorpora elementos conceptuales propios de la axiología como teoría de los valores, que permiten fundamentar la regulación y orientación de la conducta de los estudiantes y la actividad de éstos.

- La preparación del futuro egresado para el trabajo y para la vida en general, esencia de toda acción educativa.

El reconocimiento de las matemáticas y su utilidad para el progreso de las ciencias así como sus disímiles aplicaciones a éstas y a la tecnología, constituyen un hecho innegable. Sin embargo, la propia naturaleza de esta ciencia y sus objetivos como actividad humana deliberada, no pocas veces han sido objeto de polémicas. No es un secreto que todo estudio matemático riguroso aparece saturado de tecnicismos acompañados de un intrincado simbolismo, que limita su accesibilidad más allá del círculo de expertos. La filosofía de la educación matemática debe preparar al profesional para enfrentar estos retos y hacer una apertura a los métodos que permitan socializar de forma más accesible el resultado de las contribuciones, si ellas tienen como ingrediente básico a las propias matemáticas.

Un estudio reposado de la vida de grandes hombres[70] convence que, además de genialidad y talento, hay que cultivar la concentración, la capacidad de aprender por sí mismo, de indagar en las más diversas ramas del saber, de incorporar la cultura de la obra humana precedente.

- La teoría histórica-cultural del desarrollo humano debida a L.S.Vigotsky, uno de los fundamentos en los cuales se basan las concepciones educativas actuales y “expresión del desarrollo y aplicación más original y creativa de la filosofía materialista dialéctica a la pedagogía”[60].

I.2.2 La dimensión psicológica

Existen dificultades no insuperables relacionadas con la nutrida variedad de corrientes en la psicología pedagógica, especialmente en lo que respecta a la adopción de los principios de algunas de ellas a la hora de estructurar los enfoques educativos[57, 60]. Es presumible que dificultades similares se hereden en el caso de la estructuración de otros enfoques en el ámbito universitario.

La educación matemática en la universidad es un subsistema del sistema que representa la educación superior. No obstante, si toda categoría pedagógica está vinculada a determinada teoría psicológica, ello posibilita el acercamiento de la Psicología a la práctica en tal nivel, mediante la reflexión pedagógica.

La experiencia acumulada a partir de investigaciones desarrolladas en el ámbito de la escuela cubana, sobre la asimilación de principios medulares de la teoría vigotskiana, sugiere explorar la incorporación de elementos de tal teoría a la dimensión psicológica de la educación matemática en la universidad.

Hay razones que sustentan las ideas anteriores. En primer lugar, en los principios de Vigotsky se apoyan explicaciones consistentes acerca de las cuantiosas reservas y potencialidades del hombre en cuanto a educabilidad y el papel de la acción educativa en todo contexto social y en el medio académico. En tal marco teórico aparecen ideas nítidas con referencias al elemento histórico condicionante de todo fenómeno social y sus implicaciones en el análisis de la formación del hombre en el contexto en el cual se desarrolla. Se conceptúa así al hombre como ser social condicionado por el medio socio-cultural en el cual se educa[60].

Existen otros argumentos sólidos: la unidad de lo afectivo y lo cognitivo que entraña la idea central de educar enseñando y enseñar educando; “la apropiación por el hombre de la herencia social, elaborada por las generaciones precedentes”[60]. Otros corolarios derivados pueden resultar trascendentes en el proceso de educación-instrucción o instrucción-educación matemática.

La idea de zona de desarrollo próximo (ZDP) es alentadora en lo que respecta también a las potencialidades del individuo para aprender. En su interpretación clásica se introduce la métrica vigotskiana: "distancia entre el nivel real o actual de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz"[71].

Según Vigotsky, el hombre dirige su conducta y sus procesos psíquicos en general mediante los signos elaborados en el transcurso de la evolución social; el lenguaje constituye un signo esencial. Pero si el signo es una formación social, una parte de la cultura humana y en consecuencia, el desarrollo de las funciones psíquicas tiene lugar como resultado del proceso de asimilación de la cultura humana, entonces si se asimila la cultura matemática que es parte de esa cultura, tiene que producirse un reforzamiento del desarrollo de esas funciones.

La concepción vigotskiana también explora los procesos mediante los cuales se construyen los conceptos matemáticos, y ello no carece de interés para la educación matemática en la universidad. Se necesita un lenguaje especial, un lenguaje semiótico, pues los objetos matemáticos como los números, ya sean naturales reales, complejos o cuaterniónicos, requieren de sistemas de representación para su designación. El aprendizaje de éstos es propiamente conceptual y por ende, mediante representaciones semióticas se hace posible la actividad sobre objetos matemáticos.

En general las "operaciones semióticas señalan el paso a procesos psíquicos de mayor complejidad, (…) indican que se produce el tránsito de la historia natural de la psiquis al ámbito de las formaciones históricas del comportamiento"[72]. El proceso de educación matemática propicia el reforzamiento de tales operaciones, particularmente es el nivel universitario.

La teoría de Vigotsky lejos de permanecer estática fue impulsada por varios connotados investigadores. Es presumible que los aportes posteriores enriquezcan la dimensión psicológica de la educación matemática, especialmente los trabajos de P. Ya Galperin[73, 74], A.A. Leontiev[75], S.L. Rubinstein[76] y de N. Talizina[77].

Hay acercamientos a la zona de desarrollo próximo desde perspectivas cubanas[78, 79] y apuntando hacia su empleo en la pedagogía universitaria. Es de interés el punto de vista que propone la posibilidad de extensión de este concepto, considerando una realidad que se expande de la relación entre enseñanza y desarrollo y el espacio educativo formal, hacia la propia comprensión de la ontogenia humana. Se interpreta así el concepto de ZDP desde una perspectiva dialéctica, como unidad de significación que posibilita su análisis desde la relación educativa y capaz de fundar la unidad de agentes (profesores, estudiantes), procesos (enseñanza, aprendizaje) y estructuras (grupos, instituciones universitarias, comunidades).

Se acude entonces a la descripción de tal zona no sólo en términos de una métrica características que apela a distancias, tiempos y niveles de ayuda, sino también como diferencias no indicadoras de una acción de reducción sino de síntesis entre distintos agentes; por ende “no se escribe un agente más capaz que otro, sino simplemente diferente, y por tanto, el efecto del desarrollo resultante es de enriquecimiento, no de crecimiento, de fusión más que de aumento”[79].

I.2.3 La dimensión sociológica

La educación constituye un fenómeno social determinado, al estar condicionado por la cultura, la comunicación social y otras esferas de la sociedad. En el nivel universitario, las interrelaciones entre los diferentes agentes educativos sociales no están ausentes. La educación matemática tiene en cuenta los vínculos universidad-comunidad, las relaciones con otros actores como las empresas en las cuales se insertan estudiantes para las prácticas laborales y los nexos con la cultura. Se educa un profesional en ciernes no para exacerbar lo individual sino para que sea capaz de asimilar el marco social en que se desenvuelve y sus retos y en aras de que se integre a él.

La cuestión de si la Matemática puede ser social o no, con independencia de las polémicas que pueda suscitar este punto de vista, ha sido abordada por otros investigadores. Harrison ofrece una representación flexible de sus interacciones con disímiles procesos en el orden sociológico y adelanta su construcción desde una perspectiva sociocultural[80], lo que de hecho resulta un resultado de gran interés.

La creencia de que la Matemática es un cuerpo de verdades independiente de la sociedad está profundamente arraigada en la educación y la investigación. Esta situación subyace detrás de una pantalla de objetividad que oculta el rol social de esta ciencia[81] y entorpece la valoración de los impactos sociales que tiene así como el modo de conceptuar sus logros, métodos e importancia en el progreso del pensamiento científico.

La Matemática si bien tiene independencia cognoscitiva al estar constituida por líneas de investigación que se enriquecen con otras precedentes así como del propio diálogo con otros saberes, no constituye un sistema cerrado. Abarca las dimensiones de la ciencia como actividad y se erige como fuerza social por su reconocida capacidad de explicación y elaboración de datos y hechos. Sin embargo el conocimiento matemático lo portan personas con motivaciones intereses, puntos de vistas, necesidades, voliciones y valores.

Si la “sociedad es un continuo pluridimensional donde cada fenómeno, incluso la elaboración de conocimientos, cobra sentido exclusivamente si se relaciona con el todo”, entonces el conocimiento matemático representa una cierta función de la existencia humana en tanto que es “una dimensión de la actividad social desenvuelta por hombres que contraen relaciones objetivamente condicionadas”[56]. Así, el movimiento histórico de la ciencia matemática es comprensible dentro de todo ese conjunto de relaciones y no puede tener lugar aisladamente ni estar dinamizado por robinsones o personas en una urna de cristal representada por sus propios pensamientos e ideas.

La Matemática tiene diferentes interpenetraciones e interrelaciones con la actividad humana pero a la vez sus propias particularidades difíciles de extirpar por un enfoque social de la ciencia en sí. Sin embargo esto último no niega que se desarrolle y socialice como producción, difusión y aplicación de conocimiento, pero “penetrada de determinaciones práctico materiales e ideológico valorativas”[56] por cuanto, esas actividades las lleva adelante el propio sujeto. De otra parte, la sociedad condiciona los objetivos, el agente y el modo en que funciona la producción científica matemática.

I.2.4 Algunas categorías en la educación matemática universitaria

En el marco conceptual expuesto es posible hacer referencias a las categorías básicas propias de la pedagogía y a su contextualización al ambiente universitario, con lo cual se aporta mayor solidez y coherencia al sistema teórico adoptado y sus fundamentos.

Las principales categorías que se tratan en este contexto gravitan alrededor de educación, instrucción, enseñanza-aprendizaje, formación y otras no menos importantes.

A partir del análisis del concepto de educación que definen López Hurtado, Esteva Boronat y Rosés[60], educación matemática universitaria puede definirse como: ensemble sistémico de influencias procesales, conscientemente sistematizado, dirigido y organizado que tiene como fundamento determinada concepción pedagógica, cuyo objetivo general consiste en la formación matemática multilateral y armónica del estudiante, con núcleos vitales dirigidos hacia la formación de valores propios del matemático conjugados con otros isomorfos a los valores preconizados en la sociedad y con el fin de propiciar la integración del egresado a la sociedad y su contribución al perfeccionamiento de todos sus entornos, aprovechando el carácter diferencial de sus personalidades.

El proceso de educación matemática en la universidad debe erigirse como un proceso general, permanente, estable, integrador de las actividades instructivas, formativas y desarrolladoras, en el cual se materialice el sistema de influencias e incluya entre otras, la esfera cognitiva, la afectiva y la volitiva, aunque con las particularidades que caracterizan al adulto. Su esencia ha de consistir en propiciar una concepción del mundo que tenga por bases sólidos conocimientos científicos, aparejada a su transformación en motivos de conducta y acciones acompañadas de una ética del saber al lado de los más sublimes ideales de humanismo.

Dicho proceso reafirma la función social de la educación matemática a través de la transmisión de conocimientos, capacidades, experiencias sociales, formas de conductas e ideas[82]. Y es que la persona no nace dotada de las conquistas culturales e históricas de la humanidad, sino ha de apropiarse de ellas a lo largo de todo un proceso en el cual se forma.

La unidad de lo instructivo y lo educativo no elimina la diversidad de las actividades aludidas, sino las presupone al considerar las diferencias entre las categorías involucradas. El proceso de instrucción matemática es aquel que transcurre no disociado del conjunto de influencias contempladas en el proceso educativo general y abarca el sistema de información, los conocimientos, el contenido de los programas y planes de estudio así como los procedimientos y métodos que debe aprehender el profesional en formación, de acuerdo a la concepción curricular.

El proceso educativo en el ámbito universitario, se despliega especialmente en la enseñanza y el aprendizaje de la propia Matemática. En tales actividades tiene lugar tanto la comunicación y la interacción entre el profesor y los estudiantes como entre éstos. Lo anterior presupone el diálogo, la motivación, la creación de un ambiente de trabajo conjunto, la comprensión y el surgimiento de nuevos motivos cognoscitivos que impulsen a la acción del estudiante.

De este modo la enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la universidad constituye un proceso mediante el cual el estudiante refuerza o desarrolla capacidades, hábitos, habilidades que le permiten la apropiación de la cultura matemática en particular, de los medios para enriquecerla, de los métodos de investigación propios de esta ciencia y de las vías y procedimientos para aplicarlos en la práctica. Es un proceso social e individual a la vez, activo donde se produce el contacto con el sistema de valores, intereses y motivaciones[60].

Se asume aquí que las diversas forma organizativas de la actividad docente constituyen las actividades en las cuales se estructura el accionar del profesor basado en los principios didácticos y en función del cumplimiento de los objetivos establecidos en los programas y en el proceso educativo integral. En ellas es donde la didáctica se despliega en su plenitud, con las diferentes formas de concepción, estructuración y dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje en su unidad de lo instructivo y lo educativo, considerando las particularidades metodológicas del propio proceso, de las actividades a orientar y los principios del enfoque histórico cultural.

La categoría formación matemática se puede entender como “la orientación del desarrollo hacia el logro de los objetivos de la educación” reconociendo los determinantes ideológicos y culturales de ésta[60], pero que es resultado de “un conjunto de actividades organizadas de modo sistemático y coherente, que le permiten al estudiante actuar consciente y creadoramente”[83].

En correspondencia con el marco conceptual delineado y sus dimensiones, la educación matemática en el contexto universitario se asume como un proceso que incluye a otros relacionados con la formación del hombre, el aprendizaje, la enseñanza y el desarrollo. La pedagogía y la didáctica se conceptúan como ciencias capaces de ofrecer herramientas que potencian y enfatizan los aspectos funcionales de profesores y los estudiantes. Se tiene en cuenta, además el papel de los objetivos, los contenidos, métodos, medios, formas de organización de las actividades docentes así como la evaluación.

Los componentes referidos mediatizan la comunicación durante el proceso de enseñanza-aprendizaje y están enmarcados en una concepción desarrolladora del aprendizaje del futuro profesional.

I.3 El Álgebra Cuaterniónica en el contexto de la educación matemática en la universidad

Existen dos áreas que se han beneficiado con las investigaciones en el ámbito de la educación matemática en la universidad: el Álgebra Lineal y el cálculo[41]. Sin embargo, muy poco se ha investigado con relación al tratamiento de los cuaterniones en los aspectos referidos a su enseñanza y aprendizaje en el marco del Álgebra y asociado a la perspectiva histórica de su origen, la filosofía que entraña este objeto matemático y su creciente aplicación en diversas disciplinas, especialmente en el análisis, la Física o las ingenierías.

Una revisión del programa de la disciplina Álgebra para la carrera de Licenciatura en Matemática, correspondiente al plan de estudio D[84], pone de manifiesto la ausencia explícita de contenidos concretos que versen sobre la temática de los cuaterniones.

Del análisis del programa referido puede inferirse que antes de la Reforma Universitaria de 1962 tales objetos matemáticos no estaban presentes en los planes de estudios. Una vez reformados los mismos y con la introducción del lenguaje de las estructuras algebraicas, aparece la posibilidad de incluir tópicos cuaterniónicos en los planes.

En tal sentido apareció condensada en una importante obra con intervención de autores nacionales, una fugaz referencia a los cuaternios como ejercicio de intención propedéutica sobre las álgebras cliffordianas[12]. Los puntos de partida para su introducción a manera de ejercicio de puro reconocimiento y trámite, son los K-espacios o E-espacios vectoriales sobre cuerpos conmutativos, las formas cuadráticas sobre tales espacios-E y la elección de una base ortogonal con respecto a la forma cuadrática. Es indudable la importancia de esa contribución pionera, a la difusión de un tema tan atractivo y de tanto interés desde varios puntos de vista, aunque en un marco restringido ya que el libro persigue un fin más abarcador al tratar el Álgebra Multilineal.

Después de ese aporte, se desconoce sobre algún libro, monografía u obra de factura nacional que verse, aunque sea en forma sintética sobre los rudimentos del cálculo con cuaterniones, sus aplicaciones, el origen y sus implicaciones para la Matemática y la Física así como otros aspectos de interés para los estudiosos de las matemáticas en sus orígenes clásicos.

No obstante, la amplia y variada bibliografía generada en otros países, a la cual se hace referencia en los programas y de la cual se han nutrido generaciones de matemáticos del país, de alguna manera ha incluido a los cuaternios, sin que el propósito en ella haya sido una sistematización de los mismos. De ahí el hecho de que sean muy pocas las páginas que se le dediquen al tópico.

Un texto clásico los introduce de la siguiente manera: “Por último obsérvese que la construcción expuesta del sistema de números complejos nos lleva a la siguiente pregunta: ¿se puede definir la suma y el producto de los puntos del espacio de tres dimensiones, de modo que el conjunto de éstos forme un sistema de números que contenga al sistema de números complejos, o al menos, al sistema de números reales?”. A continuación se acota: “esta cuestión sale de los márgenes de nuestro curso y solamente señalaremos que la respuesta es negativa”[85].

Seguidamente, se concluye: “Por otra parte, observando que la suma de los números complejos definida anteriormente coincide en esencia con la suma de vectores en el plano, que parten del origen de coordenadas, (…) resulta natural la siguiente pregunta: ¿es posible definir para ciertos valores de n el producto de vectores del espacio vectorial real de n dimensiones, de modo que éste sea, con respecto a la multiplicación y a la adición ordinaria de los vectores, un sistema numérico que contenga al sistema de números reales? Se puede demostrar que esto no se puede hacer si se quiere que se cumplan todas las propiedades de las operaciones que tienen lugar en los sistemas de números racionales, reales y complejos. En el espacio de cuatro dimensiones, esta construcción es posible si se prescinde de la conmutatividad de la multiplicación; el sistema de números obtenidos se denomina sistema de cuaterniones”[85].

Van Der Waerden[86] los introduce a partir de los espacios vectoriales tetradimensionales, explicitando las unidades reales e imaginarias y definiendo las reglas de multiplicación. A partir de ahí define un álgebra de cuaternios generalizados y define también la norma, a la vez que discute la posibilidad de existencia de divisores de cero, a partir de la forma cuadrática obtenida. Se hace referencia a la representación matricial cuaterniónica y deduce la forma que tienen los cuaterniones de Hamilton.

En cambio Maltsev, hace su introducción al tema a partir de las ideas multilineales: “El problema de transformación de formas cuadráticas mediante sustituciones lineales de las variables “adquirió cada vez mayor importancia y “resultó ser también uno de los centrales en el desarrollo de las ideas geométricas de Lobachevski y Riemann, que llevó a la teoría de espacios lineales multidimensionales (Grassmann)”[87].

A continuación considera el anillo R_2 de todas las matrices cuadradas de segundo orden sobre el cuerpo R de los números reales, plantea fórmulas para la suma y multiplicación de matrices y compara las expresiones obtenidas con las expresiones correspondientes a la suma y multiplicación de números complejos. Luego construye matrices cuadradas de cuarto orden cuyo producto permite deducir las reglas de multiplicación de las mismas y pasa a la definición de cuaterniones en términos matriciales y algebraicos usuales. Se ofrecen también reglas de adición y sustracción cuaterniónicas y la demostración de que el conjunto de los cuaternios en representación matricial constituye un anillo con unidad y no es conmutativo. También se define la operación de conjugación cuaterniónica, la norma y se demuestra una propiedad de ésta. Un ejercicio único es sugerido al concluir el breve epígrafe.

Birkhoff y MacLane exponen un tratamiento cuaterniónico a partir del vínculo con las matrices de igual cantidad de filas y columnas y declaran directamente: “las leyes algebraicas válidas para matrices cuadradas, se aplican a otros sistemas algebraicos como los cuaternios de Hamilton”. Los autores los definen en términos de “cantidades que resultan de adjuntar a los números complejos ordinarios con +-i, otra cantidad j que representa otra raíz cuadrada de -1”[88].

Dichos autores justifican la no conmutatividad cuaterniónica a partir de la imposibilidad de construir un campo que contenga a ambos elementos **i** e **j**, definen las reglas de multiplicación de cuaterniones, la igualdad entre ellos, las operaciones de multiplicación por un escalar así como la adición, los cuaternios puros y su producto. A continuación elaboran una conclusión de interés: “los cuaterniones forman un espacio lineal vectorial sobre el campo de los números reales con la base **1, i, j, k** de cuatro elementos linealmente independientes”. Esta es inferida de la similitud entre las propiedades de adición y multiplicación por un escalar y la adición y multiplicación por un escalar para el caso de vectores. Seis ejercicios son sugeridos en aras de consolidar el contenido expuesto.

Michel Queysanne dedica a los cuaterniones un ejercicio presentado al final del capítulo siete dedicado al estudio de los espacios vectoriales, en su ilustrada obra[89]. A juicio del autor referido, dichos espacios constituyen un todo coherente y tienen aplicaciones muy ricas, lo cual sirve de preámbulo para introducir en el enunciado del ejercicio, el espacio vectorial R^4 sobre R con su base canónica y definir las reglas de multiplicación de las unidades cuaterniónicas.

Uno de los libros básicos[90] en el programa de Álgebra para la especialidad de Licenciatura en Matemática en universidades cubanas, aborda los cuaterniones como parte del estudio de las estructuras algebraicas denominadas anillos de división. Preceden a los cuaternios, los conceptos de divisores de cero y cuerpo, así como la invalidez de la propiedad para anillos de mayor generalidad y que establece que si el producto de dos elementos es nulo es porque o uno u otro es cero. Luego analizan un subconjunto del conjunto de las matrices complejas de orden 2, la escriben de la manera más adecuada y explicitando las reglas de multiplicación de las unidades cuaterniónicas.

Es de interés la nota histórica a la que hacen referencia: “En 1843, Hamilton construyó este ejemplo, que es una ampliación del cuerpo de los números complejos y está formado por cuádruplos (α_0, α_1, α_2, α_3) de números reales para los cuales la suma y el producto se definen de forma tal, que satisfacen las relaciones expuestas. (…) Hamilton llamó cuaterniones a éstos cuádruplos y su descubrimiento constituyó un punto de partida para importantes investigaciones en Álgebra”[90].

De interés histórico es otra nota que aparece en una copiosa obra de introducción a las matemáticas superiores y en la que son referidos como entes numéricos cuyo producto no exhibe la conmutatividad: “El primer sistema de números no conmutativos lo constituyen los llamados cuaterniones. (…) El cálculo de los cuaterniones de Hamilton fue la primera variante de cálculo vectorial. (…) El famoso Tratado sobre Electricidad y Magnetismo de J.C.Maxwell (1873) fue expuesto no en el lenguaje de los vectores habitual (…) sino en el lenguaje afín a los cuaterniones”[91].

Es de interés prestar atención a dos importantes hechos que aparecen explícitos en la anterior referencia, aunque de forma bastante escueta. El primero de ellos, da cuenta de los cuaterniones y el cálculo asociado como variante primaria de cálculo vectorial, algo que puede parecer insólito para quienes sólo han tenido ocasión de relacionarse con este último tipo de cálculo; el segundo la no muy conocida idea de vínculo de los cuaterniones con el sistema más famoso de la Electrodinámica Clásica.

En obras dedicadas a la Física y a las que se ha podido tener acceso en el país, la temática cuaterniónica, no ha pasado inadvertida aunque sigue la tónica de brevedad en la exposición. En una de ellas, dedicada a la Teoría Cuántica del Campo y sus relaciones con la Topología, se ofrece la definición de cuaternios, su representación en forma de una parte escalar y una vectorial, las reglas de multiplicación de las unidades cuaterniónicas y las definiciones de norma e inverso cuaterniónico, todo enmarcado en el álgebra de los cuaternios reales[92].

Por su parte la Disciplina Matemática para la carrera de Física, integrada por once asignaturas semestrales, dos de ellas dedicadas al estudio del Álgebra, no tiene declarados de manera explícita, contenidos referidos a los cuaterniones. Sin embargo la flexibilidad del programa permite el desarrollo de asignaturas optativas de perfil matemático y de utilidad al futuro profesional físico, con la posibilidad de escoger las materias que pueden y deben impartirse a partir de la selección de los contenidos que no puedan ser desarrollados[93].

Temas de envergadura contemplados en la disciplina Física Teórica[94] y abordados en la Electrodinámica Clásica a partir del estudio y aplicación de las ecuaciones de Maxwell, motivan la introducir los rudimentos del álgebra de cuaterniones. En tal sentido, los programas universitarios de Física han ignorado la relación de éstos con el sistema de ecuaciones referido, entre otros importantes tópicos que ameritan ser tratados en este marco. No ha sido posible identificar si tales contenidos en las universidades cubanas, se ha desarrollado empleando el enfoque cuaterniónico.

Tanto en las especialidades de Matemática como en la de Física, los contenidos de mayor relevancia, capaces de propiciar las bases para abordar un estudio introductorio y en profundidad de los cuaterniones resultan: los vectores, las operaciones con éstos y los productos involucrados; las matrices y las operaciones típicas; estructuras tales como anillos, grupos y cuerpos así como los espacios vectoriales y los conceptos, teoremas y propiedades asociadas, los espacios normados, euclidianos y pseudoeuclidianos. El enfoque axiomático enfatizado en algunos tópicos no aporta claridad a la exposición de los orígenes del cálculo cuaterniónico, sus aplicaciones e implicaciones para la Física y el propio desarrollo de esta y la propia Matemática.

Es notorio el caso del álgebra de vectores, en la que productos típicos como el escalar y el vectorial se traten inicialmente de manera independiente, sin tener en cuenta los orígenes de tal punto de vista y las consecuencias epistémicas, filosóficas y en el retraso de las aplicaciones cuaterniónicas en otras disciplinas. Tales contenidos, por citar sólo dos, muestran su alcance inter y transdisciplinar.

El Análisis vectorial, contenido esencial en los programas de ambas especialidades, ofrece otra ocasión oportuna para hacer referencia al álgebra de cuaternios y su carácter esencial en el desarrollo de un Análisis Cuaterniónico, cuasidesconocido en tales programas. No existen tampoco referencias en cuanto a la actualización de los vínculos de tal álgebra con los teoremas clásicos de Stokes y Gauss-Ostrogradski así como con la Teoría de Funciones de una variable Compleja.

En la especialidad de Matemática, la reducción de la duración de la carrera a cuatro años, ha tenido entre sus consecuencias, la no inclusión de asignaturas propias de la disciplina Física y en el mejor de los casos, se sugieren asignaturas optativas que traten temas de tal disciplina. De manera que el cuadro es más deficitario en cuanto a literatura capaz de abordar una integración de contenidos propios del Álgebra Cuaterniónica y de Física. Ello parece imponer una ruptura entre dos ciencias emparentadas por su historia y orígenes, sus estilos, sus métodos y alcances.

Si en lo concerniente a los contenidos teóricos básicos, la literatura sobre tópicos cuaterniónicos no ha contemplado un tratamiento sistemático de ellos en unos casos y en otros, apenas los abordan, limitándose a definiciones y propiedades aisladas, tampoco se dispone de una bibliografía que incluya ejercicios típicos y que coadyuven a la consolidación de los conocimientos en este campo algébrico cuaterniónico.

Entre los manuales consultados que enfatizan en la resolución de ejercicios y problemas, se ha identificado un texto de Álgebra Lineal[95] en el cual aparecen sugeridos dos tareas, cuyo enfoque se centra en la problemática del isomorfismo entre el álgebra de las matrices y el álgebra de cuaterniones reales. El resto de las obras mencionadas contienen muy pocos ejercicios y problemas por lo que poco pueden aportar en la ejercitación y aplicaciones del material teórico.

Otra situación muy distinta se aprecia cuando se analizan las obras que abordan contenidos relacionados con los cuaterniones y que proceden de otros países. Existe una variada bibliografía sobre el tema. Algunos de los textos no han sido publicados por editoras nacionales y se han sido escritos para quienes han avanzado más allá de la familiarización con entes cuaterniónicos.

En la obra clásica de Hamilton[96] está la génesis cuaterniónica. Se aprecian tres partes del tratado en unidad orgánica: la primera dedicada a la concepción de vectores; la segunda a la introducción de los cuaterniones como cociente entre vectores y la tercera al producto cuaterniónico. El lenguaje no es tan claro, no está expuesta la controversia entre vectorialistas y cuaternionistas y se echa de menos a las aplicaciones variadas, aspectos lógicos si se tiene en cuenta que resulta una obra pionera en el tema.

El libro de Klaus Gürlebeck, Klaus Habetha y Wolfgang Sprössig[9], constituye una instructiva obra en la que se dedica una parte del primer capítulo a la temática cuaterniónica. Se aprecia en ella el tratamiento paralelo de los números de Clifford y los resultados esenciales del análisis complejo y sus generalizaciones a dimensiones superiores. El texto tiene propósitos más abarcadores y lo convierten en una obra muy densa para una iniciación cuaterniónica.

La obra de A J.P.Ward[8] desarrolla los contenidos, presentando los textos como especie de desafío para aquellos quienes se sientan tentados a descubrir el empleo del álgebra de los números de Cayley en la Física. Es un libro de mayor alcance y en el que no sólo son tratadas las álgebras de división cuaterniónicas.

Klaus Gürlebeck y Wolfgang Sprössig[6,7], imbrican los temas del Álgebra Cuaterniónica en ambientes que introducen en el análisis que lleva el mismo nombre. Los contenidos expuestos constituyen un preámbulo exquisito para considerar importantes aportes relacionados con la teoría de las funciones cuaterniónicas. Su lectura requiere de un gran bagaje de conocimientos matemáticos.

Joao Pedro Morais, Svetlin Georgiev y Wolfgang Sprössig han publicado un texto[97] en el que combinan temas clásicos enriquecidos con tópicos tan interesantes como sucesiones, series de potencias y funciones cuaterniónicas. Es un libro avanzado.

V.V. Kravchenko y A.V. Shapiro[10], dedican un epígrafe al álgebra de los cuaternios reales y complejos. Una exposición de los elementos del análisis cuaterniónico aparece en otro libro de V. Kravchenkov[11]. En ambos libros se detecta un sublime enfoque generalizador, propósito de mayor alcance que una simple exposición de temáticas algebraicas.

El análisis fáctico evidencia que el tema cuaterniónico en el ámbito nacional, ha sido tratado de manera escueta en algunas de las principales obras traducidas al idioma Español, fundamentalmente en las décadas comprendidas entre los años sesenta y noventa del siglo pasado y que constituyeron y aún muchas de ellas constituyen parte de la literatura recomendada en los programas. Las mismas han estado a disposición de los estudiantes que cursan especialidades de Matemática y Física en las universidades cubanas y si bien han sido de extraordinario valor, no han contemplando el tratamiento de los cuaterniones con la amplitud que ameritan.

Es notable el enfoque que se ha hecho de los mismos, reducido en casos muy particulares a la terminología de las estructuras algebraicas, sin hacer referencia a su génesis. Esto ha conducido a la pérdida de una elegante oportunidad de seguir el curso histórico lógico del pensamiento matemático y explorar la filosofía que subyace en sus orígenes.

La literatura procedente de algunos países, en cambio, sí dispone de un nutrido arsenal de libros que abordan los cuaterniones. El tratamiento se realiza en un contexto que, o bien es parte de un material preparatorio dentro del propio texto en aras de acometer el estudio de otros temas de alto rigor, o constituye un preámbulo sintético, introductorio a temáticas conexas. No se aprecian en tales obras estudios sistemáticos desde el punto de vista filosófico, epistemológico e histórico, aunque abundan notas históricas sueltas como elementos motivacionales a determinadas temáticas.

La ausencia de libros sobre cuaterniones escritos por autores cubanos, que conjuguen el material teórico básico con ejercicios que coadyuven a la consolidación de los contenidos expuestos, constituye un vacío que no se ha podido erradicar en la actualidad. Son llamativas también las escasas referencias a los cuaternios en programas y planes de estudio, muy a pesar de sus importantes y cada vez más variadas aplicaciones en disímiles campos del saber y de que se van consolidando cada vez más las investigaciones que los involucran.

Es significativa la ausencia de una bibliografía, al menos con carácter introductorio que conjugue los elementos teóricos esenciales del álgebra de los cuaterniones con tópicos vinculados a su origen, las aplicaciones a la Física, las relaciones con ésta o los desarrollos posteriores que han experimentado. El hecho de no contar con obras que integren contenidos de tal índole dificulta la actualización en un tema en el que ya hace quince años se obtienen resultados de impacto científico y del que la educación matemática puede beneficiarse al propiciar la formación de un profesional más integral y culto.

Capítulo II

RECOMENDACIONES METODOLÓGICAS PARA EL USO DE LA MONOGRAFÍA "ÁLGEBRA CUATERNIÓNICA Y ALGUNAS APLICACIONES"

II.1 Estructura de la monografía

La monografía Introducción al Álgebra cuaterniónica y algunas aplicaciones (con elementos de historia de la ciencia y Análisis Matemático, tiene en cuenta los elementos generales que se sugieren para la confección de una obra de tal envergadura[98, 99,100], aunque adaptada a los propósitos que persigue la educación matemática universitaria y cuyo marco conceptual fue esbozado en el primer capítulo de este informe.

Las partes constitutivas del estudio monográfico se resumen en: una introducción, seis capítulos, dos complementos y la bibliografía. Una estructura más detallada del mismo se ofrece al final de este capítulo.

El capítulo 3 dedicado a las definiciones y propiedades fundamentales de los cuaternios reales y complejos, constituye el apartado más denso de la obra y el motivo original de su escritura. El análisis de una extensa literatura no pudo sino dejar una impronta en el carácter de la presentación del mismo. Se apela a los conceptos, teoremas y propiedades acompañados de las necesarias formalizaciones inherentes a un estudio más riguroso. A pesar de ello, se presta especial atención a las cuestiones de claridad y accesibilidad de las exposiciones, al tratarse de una introducción general al tema que se prioriza por toda la obra, sin menospreciar el rigor.

Se ha tenido especial cuidado en no iniciar el apartado con un exceso de simbolismo, el cual cede su lugar, por razones de índole didáctica, a una breve síntesis de los tópicos cuaterniónicos en la literatura especializada actual.

Esta idea de no comenzar directamente con el simbolismo característico del álgebra se inspira en la concepción de Félix Klein: "Siempre hay gente que, asemejándose a los escolásticos medievales, empieza la enseñanza con las ideas más generales defendiendo este método como si fuera auténticamente científico. Entre tanto, esta sugerencia tampoco es cierta, pues enseñar científicamente significa instruir a un ser humano a pensar científicamente y no a aturdirlo desde el mismo principio con una sistematización fría, aunque tuviera ésta el aspecto científico"[101].

Por tal razón y sin restar valor al capítulo referido, se consideró más adecuado iniciar la monografía con dos capítulos de gran interés en los aspectos filosófico e histórico, imbuidos también por las ideas de Gájov: “Todo simbolismo especial reduce las formulaciones y representa grandes comodidades para aquellos que lo han asimilado, es decir, para la gente que siempre está en contacto con las cuestiones de género semejante. Sin embargo, el simbolismo resulta ser un obstáculo bastante serio con frecuencia para un gran círculo de lectores que, sin ser especialistas en un dominio dado, sienten deseo de familiarizarse con dicho dominio”[101].

Tal punto de vista no minimiza el carácter simbólico del Álgebra Cuaterniónica; simplemente se trata de introducirla inicialmente desde una perspectiva filosófica y epistémica por cuanto tanto la comprensión de conceptos y estructuras y la familiarización con las interrelaciones del álgebra de cuaternios con la historia de la Matemática y la Física, con la Filosofía y el mundo cotidiano, constituyen ingredientes de importancia antes de abordarla a partir de una formalización más estricta.

Así y de acuerdo al marco conceptual adoptado, la educación matemática, al incluir aspectos históricos, filosóficos y aplicados, adquiere una dimensión distinta por cuanto se otorga a la Matemática una visión más pluralista “con la esperanza de que esto haría a la materia interesante y más aceptada por un grupo más amplio de estudiantes”[102] cuestión que es de importancia estratégica y esencial para el rol de esta ciencia en el mundo actual.

Los capítulos cuatro y cinco tratan sobre las rotaciones y las relaciones del Álgebra Cuaterniónica y el Álgebra Vectorial respectivamente. En especial este último tópico abre perspectivas de nuevos enfoques algebraicos de los contenidos referidos a vectores y que son objeto de tratamiento detallado en los programas de Álgebra y Geometría Analítica.

El capítulo final sobre las aplicaciones físicas, muestra una vez más ese increíble poder eficaz y racional de las matemáticas y que la hace trascender sus marcos para erigirse como herramienta eficiente en la solución de problemas y a la vez en lenguaje para expresar las leyes de la realidad física.

Las notas biográficas constituyen un elemento que hace de la educación matemática un proceso de asimilación e incorporación de la obra humana antecedida. El estudio de tales notas, se convierte en una vía para el cultivo del talento, la dedicación, la capacidad de autosuperación, inspirada en la vida de los epígonos y sus indagaciones en diversos saberes para incorporar la cultura de la obra humana precedente.

Un conjunto de problemas y ejercicios se ofrecen también como complemento en aras de consolidar en forma progresiva, los conocimientos adquiridos.

II.2 Algunas recomendaciones metodológicas

Las bondades del último plan de estudio en cuanto a su carácter flexible, para las especialidades de Licenciaturas en Matemática y en Física, ofrecen la posibilidad de seleccionar y adecuar los contenidos, de manera tal que se incluya un conocimiento más profundo de ciertos tópicos cuaterniónicos, en la formación algebraica de los estudiantes.

En tal sentido la monografía que se propone, por su carácter básico, puede emplearse tanto en un curso breve que funcione de manera optativa como en aquellos casos en que se decida ahondar en las propiedades y aplicaciones de los cuaternios, como parte del curso de Álgebra y en función de los intereses de la investigación matemática de las universidades.

Es conveniente recordar que si se adopta la lección como elemento central del proceso de enseñanza-aprendizaje de los cuaterniones, no debe olvidarse que la misma desempeña en el nivel universitario un papel relevante como espacio en el cual se enfatiza la interacción alumno-profesor y de ahí lo deseable que resulta un vívido intercambio sobre los temas que se exponen.

La propia lección tiene varias funciones, tres de las cuales son: transmisión de información; proporcionar estrategias para el estudio y la resolución de problemas y para el desarrollo de formas de razonamiento y pensamiento e incentivar la motivación del estudiante[32]. Las funciones referidas aparecen en conjunción de lo instructivo, educativo y desarrollador y de acuerdo a lo que se ha definido en el marco conceptual por educación matemática en la universidad. De esta manera el docente debe esforzarse porque dichas funciones se cumplan a cabalidad al desarrollar los tópicos seleccionados.

El objeto básico de enseñanza de la Matemática en la monografía no se restringe solamente a los conceptos, propiedades, relaciones, métodos y procedimientos del aparato teórico del Álgebra Cuaterniónica como ciencia formal. También se abordan problemas de la Matemática en general y su relación con la Filosofía y con otras ciencias como la Física; se hacen referencias al objeto de estudio de aquella y su vínculo con la práctica social así como otras problemáticas en general "que justifican y posibilitan el desarrollo y conocimiento teórico y práctico, conjuntamente con los modos de actuación que preparan al sujeto en un contexto social para plantearse y resolver los problemas"[103].

Por tanto, en aquellos casos en que el interés se centre más en las aplicaciones, dicha monografía puede recomendarse a grupos científico estudiantiles o estudiantes de otras especialidades como Física o ingenierías afines (Geofísica, Mecánica, Informática) con intereses en la Matemática Aplicada.

Se asume que el lector tiene ciertas nociones de Mecánica y Electromagnetismo; no obstante en caso de no ser válida tal suposición, se recomienda un breve repaso de los contenidos esenciales de estas dos importantes ramas de las ciencias físicas. En el caso de estudiantes que cursan especialidades técnicas, interesados en profundizar en algunos temas físicos, es sugerente dedicar un mayor tiempo al estudio de los tópicos básicos tratados en los textos que constituyen la literatura básica empleada en tales carreras[104,105].

Esta sugerencia es válida también para aquellos de la carrera de Licenciatura en Matemática, aunque dada la profundidad de los contenidos que constituyen parte del currículo diseñado para tales especialidades, pueden consultar literatura en Física Teórica[106].

Otros textos que pueden resultar útiles para profundizar en Física son aquellos en los cuales se exponen contenidos compatibles con los impartidos en el marco del curso de Física General[107].

Se sugiere en ningún caso obviar el desarrollo histórico del tema objeto de estudio. El tratamiento de un tópico en la Matemática con carácter histórico, posibilita reconstruir el contenido con una riqueza extraordinaria ya que el proceso de reconstrucción misma parte de las fuentes originales; también permite captar parcial o totalmente el carácter del desarrollo histórico del objeto que se estudia. Asimismo, la exposición de los temas siguiendo el curso histórico, ofrece la posibilidad de ilustrar cómo surgieron los conceptos e ideas matemáticas, los métodos y la manera en que se estructuraron las teorías correspondientes[108].

Al emplear la monografía en las lecciones, es sugerente recrear la evolución histórica de las formas de describir y representar los números cuaterniónicos, establecer sus similitudes y diferencias con los números complejos y el carácter de éstos como integrantes de un subconjunto de aquellos, su vínculo con las matrices y las relaciones con los conceptos de Álgebra Lineal como base y dimensión, sus interrelaciones con los espacios cuatridimensionales y la aureola de misticismo de las que se rodearon, todo lo cual posibilita introducir la arista del significado de los números y sus correlaciones con las raíces culturales.

En el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática, la epistemología no debe relegarse a un segundo plano, pues de ser así, la educación matemática pudiera convertirse en una rutina de fórmulas y problemas, una acumulación de teoremas y conceptos, una formación estática de símbolos y términos. De ese modo es recomendable sugerir reflexiones acerca de lo epistémico. En tal caso, se tiene plena libertad para escoger el tópico, si bien uno que podría resultar de utilidad es el referido al producto cuaterniónico y los dos productos más usuales conocidos, el vectorial y el escalar, como eslabón para estudiar los productos típicos en las Álgebras de Clifford.

Las relaciones con la Filosofía pudieran abordarse, a partir de profundizar en las posturas filosóficas de Hamilton u otro de los matemáticos que contribuyeron en este campo así como en la aplicación de la metodología dialéctico materialista.

Al emplear la monografía, debe procurarse conservar el equilibrio entre el pensar matemático, el razonamiento filosófico y el enfoque histórico, la resolución de problemas, las aplicaciones y los contenidos teóricos básicos.

Si los conocimientos matemáticos existen en forma de conceptos que son fijados en el lenguaje, en el sistema de signos y el concepto es una forma de pensamiento humano, la asimilación de los conocimientos asociados a los contenidos expuestos en la monografía, significa asimilar los conceptos involucrados. No obstante, recordar la palabra término o el signo o símbolo que los designan, no basta para asimilarlos. Este punto de vista se puede aprovechar para propiciar las indagaciones acerca de la teoría de Vigotsky y sus implicaciones en la enseñanza y asimilación de la Matemática en la universidad.

En tal sentido se propone también hacer uso del método problémico como vía para revelar el contenido de los conceptos[108]. Para tales fines se ofrece una lista de tareas que complementan algunos de los capítulos y cuyas soluciones exigen razonamientos disímiles. La resolución de los ejercicios, tareas o problemas listados, refuerzan los temas tratados y son básicos para la reproducción de ciertos resultados de forma no muy complicada, aunque en ciertos casos se necesita apelar a todo un arsenal de conocimientos que pueden adquirirse individualmente o con ayuda del docente.

La idea de problema se emplea en el sentido etimológico de partida, como sinónimo de tarea, ejercicio, o pregunta teórica o práctica que exige solución, si bien el problema requiere precisión en su definición: "es reflejo de la contradicción lógico-psicológica del proceso de asimilación y determina el sentido de la búsqueda mental y (…) conduce a la asimilación de un concepto nuevo o de un modo nuevo de acción"[108].

Algunos ejercicios y problemas, terminología similar a la empleada por Demidovich[109], exigen menos esfuerzo y el proceso de resolución es análogo al que se expone en los epígrafes correspondientes. Otros requieren más creatividad, explorar conocimientos asociados por ejemplo al campo de los números complejos, el Álgebra Lineal o el Análisis Matemático. Entre tales conocimientos están, las operaciones con matrices, números complejos y vectores así como con los operadores diferenciales básicos. Se recomienda indistintamente, consultar la literatura básica al nivel del Curso de Análisis Matemático de S. Kudriatsev[110], Álgebra Lineal de I. Pazniak[111] y cualquier texto de Geometría Analítica[112, 113].

En caso de exponerse el material monográfico como parte de un curso, el docente puede incluir la exposición de tales tópicos como preámbulo pero teniendo en cuenta el tópico de Álgebra Cuaterniónica que desea desarrollar.

Los ejercicios de demostraciones, requieren mayor comprensión de la teoría y es deseable que cada una de las que se ofrecen en el texto, sea estudiada con sumo cuidado y atención, antes de proceder a resolver los ejercicios involucrados.

El lector notará que las demostraciones abundan. No hay que olvidar que éstas constituyen la argumentación para mostrar la veracidad de una proposición matemática y es en ella donde se devela con toda su esplendor esta ciencia. En tal sentido se sigue la tradición platónico-aristotélica: "la noción filosófica de demostración se relaciona con la derivación de un enunciado a partir de otros enunciados, llamados premisas, mediante la aplicación de determinadas leyes lógicas; en esta idea de demostración subyace siempre una búsqueda razonable de la verdad."[114].

Las demostraciones desarrolladas, han seguido el método tradicional basado en el formato definiciones-teoremas-demostración. Durante el estudio de las mismas se recomienda prestar atención al estilo lógico-estructural enfocado en el uso de las definiciones y la inferencia deductiva formal hasta llegar a la prueba completa de los teoremas o propiedades. En este caso no se hace referencia a las connotaciones semánticas. Sin embargo debe reflexionarse acerca de la posibilidad de emplear otras técnicas y recursos heurísticos para desarrollar la demostración y apelar a la semántica que entraña el uso de conceptos o el empleo de ideas intuitivas como elemento de motivación[115].

Se sugiere analizar tal proceso de demostración antes de realizar otras demostraciones más sofisticadas, sobre la base de una exposición constante, sistemática y prolongada del espíritu de argumentación y la naturaleza del pensamiento matemático[116].

Algunos de los temas ofrecen una oportunidad para que el docente que se sirva de la monografía, explore los métodos problémicos según Polya[117] o las posibilidades del enfoque vigotskiano y piagetiano, en aras de sistematizar reflexiones al respecto.

Es recomendable durante el intercambio de ideas, propiciar el debate y el planteamiento de interrogantes. Una podría ser: ¿es el constructivismo un punto de contacto entre Piaget y Vigotsky? Ello permite hacer recurrentes incursiones en la Psicología y teorías del aprendizaje. En el caso concreto de la pregunta planteada, una respuesta apresurada parece indicar que sí hay posiciones en que tal vez puedan coincidir. Con relación a esta cuestión: lo piagetiano enfatiza en la construcción de forma individual mientras que lo vigotskiano hace énfasis en tal construcción mediante las interacciones sociales.

Si el "constructivismo es un método de enseñar y aprender que se basa en la premisa de que la cognición es el resultado de una "construcción mental" por lo que los estudiantes aprenden fijando la información nueva a lo que ya conocen"[118], no resultaría en vano explorar la medida en que puede aprovecharse tal punto de contacto para salir del marco de las teorías de aprendizaje y encontrar una aplicación unificadora en la pedagogía, con el cuidado de no adoptar posiciones eclécticas.

En tal sentido, es recomendable estudiar la manera en que los números complejos, las nociones de Álgebra Vectorial y los fundamentos del Álgebra Lineal, posibilitan la construcción del conocimiento, antes de abordar el tratamiento sistemático de los cuaterniones.

En la figura número 1 aparece un diagrama en el cual se muestra la relación entre los capítulos de la monografía. El mismo no es un esquema absolutista pero puede servir de guía y orientación para la lectura de la misma. Se sugiere que esta abarque desde la introducción hasta el complemento que contempla los ejercicios y problemas y en base a ello, determinar cuáles elementos conceptuales necesita precisar para enfrascarse en una nueva lectura de la obra. Esta necesita en muchos casos lápiz y papel.

Aquellos lectores con una formación matemática en ciernes o necesitada de una preparación previa, pero interesados en aspectos filosóficos, históricos y epistémicos, pueden optar por leer hasta el capítulo 2 y luego las notas biográficas, hasta tanto no incorporen el conocimiento algebraico básico para enfrascarse en una lectura de los restantes capítulos.

Tal vez exista otro grupo que prefiera ahondar primeramente en los aspectos formales del Álgebra Cuaterniónica. En tal caso la lectura se puede iniciar por el capítulo 3. Otros que se interesen por las aplicaciones deben estudiar detalladamente dicho capítulo, además de los contenidos de Física esencial, en aras de comprender las aplicaciones que aparecen sintetizadas.

A pesar de estas acotaciones, se enfatiza que la monografía se ha confeccionado en aras de fomentar la educación matemática. Es recomendable que se haga uso de ella desde una perspectiva integradora de lo matemático, lo filosófico, lo histórico, lo sociológico, lo psicológico, lo pedagógico y lo didáctico, en aras de propiciar ese encuentro necesario que ha de producirse entre ciencias exactas y naturales y ciencias humanísticas y sociales.

Apuntes para consulta de bibliografía complementaria

Hay varias obras que pueden recomendarse a quienes se motiven por la profundización en los temas tratados, tanto en el ámbito del Álgebra como en el del Análisis. También constituyen una adecuada elección para el desarrollo de algunos tópicos en seminarios, en caso de que el docente que se sirve de la monografía, decida junto a sus discípulos, avanzar más en el conocimiento cuaterniónico.

Los libros están en idioma Inglés y su lectura se convierte en una buena ocasión para desarrollar habilidades típicas asociadas al empleo de literatura especializada pero escrita en otro idioma.

On a new Species of Imaginaries Quantities connected with a theory of Quaternions y Elements of quaternions[3, 96] constituyen fuentes de inestimable valor por cuanto remiten a trabajos originales de la gesta cuaterniónica.

Quaternionic Analysis and Elliptic Boundary Value Problems[6] está dedicada al Análisis Cuaterniónico y los problemas de valores de frontera de tipo elípticos; un capítulo trata del Álgebra Cuaterniónica Real.

Quaternionic and Clifford Calculus For Physicist and Engineers[7] aborda el tema cuaterniónico imbricado en las Álgebras de Clifford, los tensores, los multivectores y las matrices. Los contenidos están expuestos de forma tal que se conserva el balance entre los tópicos teóricos y las aplicaciones prácticas, lo cual convierte a la obra en un referente esencial.

Quaternions and Cayley Numbers[8] trata conceptos fundamentales del Álgebra Lineal; dos capítulos versan sobre cuaterniones y sus aplicaciones a las rotaciones en el espacio tridimensional y tetradimensional euclidianos, así como sus relaciones con el enfoque matricial clásico. Especial atención se dedica al álgebra de los cuaternios complejos y su vínculo con la métrica de Minkowski.

Holomorfic Functions in the plane and n-dimensional Space[9] constituye una excelente y amena obra en la que se dedica una parte del primer capítulo a la temática cuaterniónica. En ella, se estudian además las transformaciones y representaciones de los cuaternios. El texto sintetiza los resultados esenciales del análisis complejo y sus generalizaciones a dimensiones superiores, lo cual brinda la oportunidad para continuar profundizando en este atractivo campo del saber.

Integral representations for spatial models of mathematical physics[10] expone la teoría de las funciones α-holomorfas y dedica un epígrafe al álgebra de los cuaternios reales y complejos. En los tres primeros apéndices de esta obra se sintetizan las propiedades que son de gran utilidad para propósitos analíticos. Dicha profundización está fundamentada en el hecho de que tal y como declaran sus autores “el conjunto de los cuaterniones es mucho más rico estructuralmente y esa riqueza debe conducir a ulteriores consecuencias analíticas”.

Applied Quaternionic Analysis[11] es una excelente exposición de los elementos del Análisis Cuaterniónico, antecedida por un resumen coherente y claro acerca de la aritmética cuaterniónica.

Real Quaternionic Calculus[97] condensa temas referidos al cálculo con cuaterniones reales, sucesiones, series de potencias y funciones cuaterniónicas.

La lectura de los tópicos expuestos en la monografía que se presenta, junto a la profundización con ayuda de las obras referidas, ha de permitir iniciar estudios de mayor alcance, con ayuda de la obra Clifford Analysis[119] de Fred Brackx, Richard Delanghe y Franz Sommen, libro clásico y fuente inspiradora y de consulta obligada para todo el que desee adentrarse en el apasionante mundo del Análisis de Clifford.

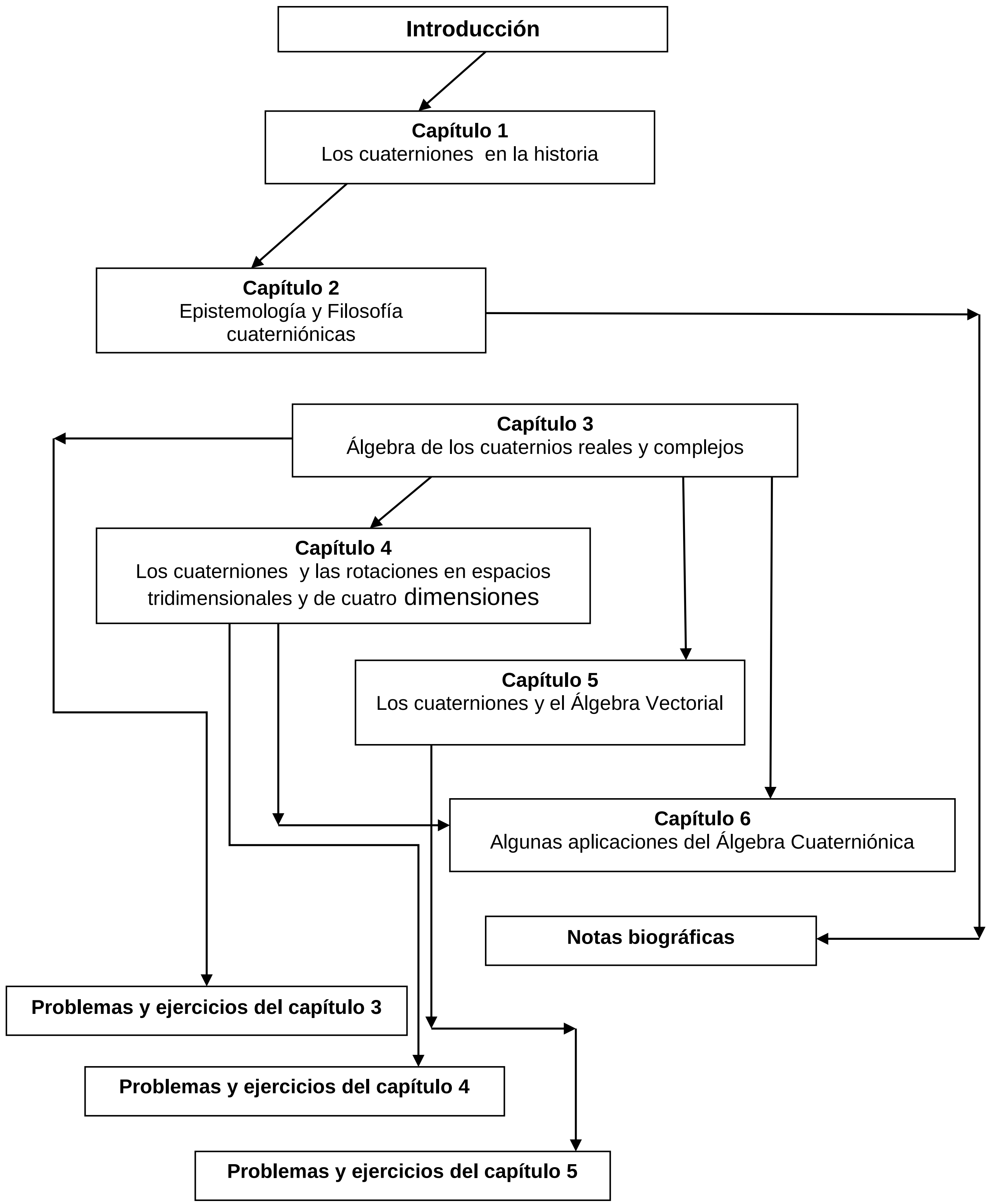
Tabla #1. Contenidos de la monografía

Prefacio
Introducción
Capítulo 1. Los cuaterniones en la historia 1.1 La génesis cuaterniónica. 1.2 Números complejos, vectores, más sobre la génesis de los cuaterniones. 1.3 Los cuaterniones y el Cálculo Vectorial. 1.4 Los cuaterniones, la Física y la historia de una polémica.
Capítulo 2. Epistemología y Filosofía Cuaterniónicas 2.1 Más sobre la contribución de Hamilton. 2.2 El rol de los cuaterniones y el tiempo.
Capítulo 3. Álgebra de los cuaterniones reales y complejos 3.1 El Álgebra Cuaterniónica en la literatura especializada actual. 3.2 Álgebra de los cuaterniones reales. 3.2.1 Cuaterniones reales: definición y propiedades. 3.3 Ecuaciones lineales y cuadráticas cuaterniónicas con coeficientes reales. 3.3.1 Ecuaciones cuaterniónicas de primer grado. 3.3.2 Ecuaciones cuadráticas cuaterniónicas en H(R). 3. 4 Álgebra de cuaterniones complejos: definición y propiedades. 3.5 Representación de los cuaterniones reales y complejos. 3.5.1 Representaciones de los cuaternios: caso H(R). 3.5.2 Representación de los cuaternios: caso H(C).
Capítulo 4. Los cuaterniones y las rotaciones en espacios tridimensionales y de cuatro dimensiones 4.1 Elementos de R^4 que operan sobre vectores de R^3. 4.2 Nociones sobre rotaciones en el espacio tridimensional. 4.3 Ideas básicas sobre rotaciones en R^4.

Tabla #1. Contenidos de la monografía (continuación).

Capítulo 5. Los cuaterniones y el Álgebra Vectorial 5.1 Sobre un artículo de Hamilton. 5.2 Relación entre el Álgebra Vectorial y el Álgebra Cuaterniónica.
Capítulo 6. Algunas aplicaciones del Álgebra Cuaterniónica 6.1 Los cuaterniones: entidades matemáticas de utilidad en las ciencias físicas. 6.2 Álgebra de cuaterniones: aplicaciones elementales en Física. 6.3 Otras aplicaciones de los cuaterniones en la Física. 6.4 Álgebra Cuaterniónica, Análisis Cuaterniónico, Análisis de Clifford.
Notas biográficas
Complementos. Problemas y ejercicios Problemas y ejercicios del capítulo 3. Problemas y ejercicios del capítulo 4. Problemas y ejercicios del capítulo 5.
Referencias bibliográficas

Figura #1. Relación entre los capítulos de la monografía



Referencias bibliográficas

(1) Cruz, M. (2002). Estrategia metacognitiva en la formulación de problemas para la enseñanza de la matemática. Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Instituto Superior Pedagógico de Holguín José de la Luz y Caballero.

(2) Dyson, F. (1972). Missed Opportunities, J. W. Gibbs. Lectures. Bull. AMS, vol. 78, 635-652.

(3) Hamilton, R. W. (1843). On a new Species of Imaginaries Quantities connected with a theory of Quaternions. Proceedings of the Royal Irish Academy, vol. 2, 424-434.

(4) Malonek, H.R. (2003). Quaternions in applied sciences: a historical perspective of a mathematical concept. 17th Inter. Conf. on the Appl. of Computer Science and Mathematics on Architecture and Civil Engineering, Weimar.

(5) Crowe, M.J. (1967). A history of Vector Analysis. Notre Dame, Indiana: University of Notre Dame Press.

(6) Gürlebeck, K. y Sprössig, W. (1990). Quaternionic Analysis and Elliptic Boundary Value Problems. Berlin: Birkhäuser, Verlag.

(7) Gürlebeck, K. y Sprössig, W. (1997). Quaternionic and Clifford Calculus For Physicist and Engineers. Chichester: John Wiley &Sons.

(8) Ward, J.P. (1997). Quaternions and Cayley Numbers. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publisher.

(9) Gürlebeck, K., Habetha, K. y Sprössig, W. (2008). Holomorfic Functions in the plane and n-dimensional Space. Berlin: Birkhäuser, Verlag.

(10) Kravchenkov, V.V. y Shapiro, M.V. (1996). Integral representations for spatial models of mathematical physics. London: Pitman Research Notes in Mathematics Series 351, Addison Wesley Longman Limited.

(11) Kravchenkov, V.V. (2003). Applied Quaternionic Analysis. Lemgo: Heldermann Verlag.

(12) Mutafian, C., Mariño Betancourt, M., de Arazoza Rodríguez, H., Cuesta Saínz de la Torre, L., Forneiro Rodríguez, R., López Lagomasino, G., Pérez Ruiz de Ugarrio, J. (1971). Álgebra Multilineal. La Habana: Edición Revolucionaria.

(13) Abreu Blaya, R. y Bory Reyes, J. (1999). Boundary value problems for quaternionic monogenic functions on non-smooth surfaces. Advances in Applied Clifford Algebras 9 no. 1, 1-22.

(14) Abreu Blaya, R., Bory Reyes, J. y Shapiro, M. (2006). On the Laplacian vector field theory in domains with rectifiable boundary. Mathematical Methods in the applied sciences. 29, 1861–1881.

(15) Abreu Blaya, R., Bory Reyes, J. y Moreno García, T. (2007). Minkowski Dimension and Cauchy Transform in Clifford Analysis. Complex Analysis and Operator Theory, 1, 301–315.

(16) Abreu-Blaya, R., Bory-Reyes, J. y Peña-Peña, D. (2007). Jump Problem and Removable Singularities for Monogenic Functions. The Journal of Geometric Analysis, vol. 17, no. 1, 1-13.

(17) Abreu Blaya, R., Bory Reyes, J., Moreno García, T. y Peña Peña, D. (2008). Laplacian Decomposition of vector fields on fractal surfaces. Mathematical Methods in the Applied Sciences. 31, 849-857.

(18) Abreu Blaya, R., Ávila, Ávila, R. y Bory Reyes, J. (2013). Acerca de un problema de campo eléctrico en el enfoque de la analogía tridimensional de la fórmula integral de Cauchy. Taller Internacional La Matemática, la Informática y la Física en el siglo XXI (FIMAT). Taller Análisis Complejo, Holguín.

(19) Abreu Blaya, R., Ávila, Ávila, R. y Bory Reyes, J. (2013). Método de los análogos tridimensionales de la fórmula integral de Cauchy aplicado a la magnetostática y la electrostática. Taller Internacional La Matemática, la Informática y la Física en el siglo XXI (FIMAT). Taller La Física y sus aplicaciones, Holguín.

(20) Abreu Blaya, R., Ávila, Ávila, R. y Bory Reyes, J. (2014). On a tridimensional Analogue of Cauchy Integral Formula and its application to Electrostatics. Rev. Cub. Fis. vol. 31, no. 1 E, E(42).

(21) Abreu Blaya, R., Ávila, Ávila, R. y Bory Reyes, J. (2014). El Algebra Cuaterniónica y algunas aplicaciones en la enseñanza de tópicos selectos de Física universitaria. XIII Simposio y XI Congreso de la Sociedad Cubana de Física. La Habana, marzo 17-21.

(22) Abreu Blaya, R., Ávila, Ávila, R., Bory Reyes, J. y Rodríguez Dagnino, R.M. (2015). 2D Quaternionic Time-Harmonic Maxwell System in Elliptic Coordinates. Advances in Applied Clifford Algebras, no 25, 255-270.

(23) Abreu Blaya, R.; Ávila Ávila, R. y Bory Reyes, J. (2015). Boundary value problems for Dirac operators and Maxwell's equations in fractal domains. Mathematical Methods in the Applied Sciences, vol. 38, 393-402.

(24) Abreu Blaya, R., Ávila Ávila, R., Bory Reyes, J. y Rodríguez-Dagnino, R.M. (2015). Cauchy representation formulas for Maxwell equations in 3-dimensional domains with fractal boundaries. Bull Braz Math Soc, New Series 46(4), 1-20.

(25) Bochner, S. (1981). The Role of Mathematics in the Rise of Science. Princeton: Princeton University Press.

(26) Pareja Heredia, D. (2015). En Busca de Alternativas Nuevas para la Educación Matemática Universitaria. [Citado 28 de abril de 2015]. Disponible en: http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/conferencias/Educ_Mate_Universitaria_Cusco.pdf

(27) Dorier, J.L. (1997). L'Enseignement de l'Algèbre Linéaire en Question. Grenoble: La Pensée Sauvage.

(28) Holton, D.A. (2001). The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study. Dordrecht: Kluwer.

(29) Neumann, R., Parry, S. y Becher, T. (2002). Teaching and learning in their disciplinary contexts: A conceptual analysis. Studies in Higher Education, 27, 405–417.

(30) Morgan, C. (2006). What does social semiotics have to offer mathematics education research? Educational Studies in Mathematics, no. 61, 219-245.

(31) Radford, L., Bardini, C. y Sabena, C. (2007). Perceiving the general: The multisemiotic dimension of students' algebraic activity. Journal for Research in Mathematics Education, vol. 38, no5, 507-530.

(32) Pritchard, D. (2010). Where learning starts? A framework for thinking about lectures in university mathematics. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, vol. 41, no. 5, 609-623.

(33) Biggs, J.B. y Tang, C.S. (2011). Teaching for quality learning at university: What the student does. E-book, 4th ed. Maidenhead: McGraw-Hill/Society for Research into Higher Education/Open University Press.

(34) Kjeldsen, T.H. y Blomhøj, M. (2012). Beyond motivation: history as a method for learning meta-discursive rules in mathematics. Educational Studies in Mathematics, no. 80, 327-349.

(35) Ioannou, M. (2012). Conceptual and learning issues in mathematics undergraduates' first encounter with group theory: A commognitive analysis. Doctoral dissertation. School of Education and Lifelong Learning, University of East Anglia.

(36) Viirman, O. (2013). The functions of function discourse: university mathematics teaching from a commognitive standpoint. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. DOI: 10.1080/0020739X.2013.855328.

(37) Viirman, O. (2015). The function concept and university mathematics teaching. Dissertation. Karlstad University Studies. Mathematics. Faculty of Health, Science and Technology; 2014. [Citado 15 de mayo de 2015]. Disponible en:
http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:693890/fulltext01.pdf

(38) Artemeva, N. y Fox, J. (2011). The writing's on the board: The global and the local in teaching undergraduate mathematics through chalk talk. Written Communication, 28 (4), 345-379.

(39) Attorps, I., Björk, K., Radic, M. y Tossavainen, T. (2013). Varied ways to teach the definite integral concept. International Electronic Journal of Mathematics Education, 8(2-3), 81-99.

(40) Speer, N., Smith, J. y Horvath, A. (2010). Collegiate mathematics teaching: An unexamined practice. Journal of Mathematical Behavior, no. 29, 99–114.

(41) Artigue, M. (1999). The Teaching and Learning of Mathematics at the University Level. Crucial Questions for Contemporary Research in Education. Notices of the AMS. [Citado 18 de junio de 2015]. Disponible en:
http://www.ams.org/notices/199911/fea-artigue.pdf

(42) Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, no. 61, 103–131.

(43) Wood, L., Joyce, S., Petosz, P. y Rodd, M. (2007). Learning in lectures: multiple representations. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, vol. 38, no. 7, 907-915.

(44) Artemeva, N. y Fox, J. (2011). The writing's on the board: The global and the local in teaching undergraduate mathematics through chalk talk. Written Communication, vol. 28, no. 4, 345-379.

(45) Fukawa-Connelly, P.T. (2012). A case study of one instructor's lecture-based teaching of proof in abstract algebra: Making sense of her pedagogical moves. Educational Studies in Mathematics, no. 81, 325-345.

(46) Gücler, B. (2013). Examining the discourse on the limit concept in a beginning-level calculus classroom. Educational Studies in Mathematics, no. 82, 439-453.

(47) Sfard, A. (2008). Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing. Cambridge: Cambridge University Press.

(48) D'Andrea, R.E. y Sastre Vázquez, P. (2013). ¿Cómo facilitar el proceso de demostración matemática en estudiantes universitarios? Revista Iberoamericana de Educación Matemática, no. 33, 137-145. [Citado 25 de junio de 2015]. Disponible en: http://www.fisem.org/web/union

(49) Gallego Corté, G.N. (2010). La enseñanza del saber matemático en la universidad: estudio epistemológico, didáctico y textual en tres programas académicos de la Universidad Tecnológica de Pereira. Tesis en opción al título de Máster en Educación. Universidad de Pereira. [Citado 2 de junio de 2015]. Disponible en: http://repositorio.utp.edu.co/dspace/bitstream/11059/1485/1/3781250151G166.pdf

(50) Malaspina Jurado, U. (2012). Enseñanza de las matemáticas: retos en un contexto global y aportes en una retrospectiva histórica. Revista Unión matemática Iberoamericana, no. 32, 9-27. [Citado 27 de junio de 2015]. Disponible en: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2012/32/archivo5_volumen32.pdf

(51) Tovar-Gálvez, J.C. y García Contreras, G.A (2012). Investigación en la práctica docente universitaria: obstáculos epistemológicos y alternativas desde la Didáctica General Constructivista. Educ. Pesqui., São Paulo, vol. 38, no. 04, 881-895. [Citado 22 de junio de 2015]. Disponible en: http://www.scielo.br/pdf/ep/v38n4/07.pdf

(58) Moreno, L. y Waldegg, Y.G. (1992). Constructivismo y Educación Matemática. Educación Matemática, vol. 4, no. 2, 7.

(53) López Arias, E. y Montoya Rivera, J. (2008). La contextualización de la didáctica matemática: un imperativo para la enseñanza de la Matemática del siglo XXI. Revista Pedagogía Universitaria, vol. XIII, no. 3.

(54) Torres Alfonso, A.M. y Martínez Martínez, D. (2008). Estrategias motivacionales y metacognitivas en la formación matemática de estudiantes universitarios. Revista Pedagogía Universitaria, vol. XIII, no. 5, 46.

(55) Delgado Díaz, C. (1999). El cambio de racionalidad y la matematización del saber. Revista colombiana de Filosofía de la Ciencia, I (I), 63-83.

(56) Núñez Jover, J. (1999). La Ciencia y la Tecnología como procesos sociales. La Habana: Editorial Félix Varela.

(57) Cánovas Fabelo, L. y Chávez Rodríguez, J. (2007). Problemas contemporáneos de la pedagogía en América Latina. En Gilberto García Batista (comp.), Compendio de Pedagogía (pp. 1-35). La Habana: ECIMED.

(58) García Batista, G. (2007). Compendio de Pedagogía. La Habana: ECIMED.

(59) Sierra Salcedo, R.A. (2007). Modelación y estrategia: algunas consideraciones desde una perspectiva pedagógica. En Gilberto García Batista (comp.), Compendio de Pedagogía (pp. 311-328). La Habana: ECIMED.

(60) López Hurtado, J., Esteva Boronat, M., Rosés, M.A., Chávez Rodríguez, J., Valera, O. y Ruiz Ariel, A. (2007). Marco conceptual para la elaboración de una teoría pedagógica. En Gilberto García Batista (comp.), Compendio de Pedagogía (pp. 45-60). La Habana: ECIMED.

(61) Bunge, M. (1972). La investigación científica. La Habana: Editorial de Ciencias Sociales.

(62) Addine Fernández, F., González Soca, A.M. y Recarey Fernández, S.C. (2007). Principios para la dirección del proceso pedagógico. En Gilberto García Batista (comp.), Compendio de Pedagogía (pp. 80-101). La Habana: ECIMED.

(63) Hourrutinier, P. (2009). La universidad latinoamericana en la época actual: tendencias, retos y propuestas innovadoras. Educación Cubana. Ministerio de Educación. [Citado 23 de junio de 2015]. Disponible en:

http://mediateca.rimed.cu/media/document/4754.pdf

(64) Sánchez Collazo, A.; Sánchez-Toledo Rodríguez, M.E. (2007) La pedagogía cubana: sus raíces y logros. En Gilberto García Batista (comp.), Compendio de Pedagogía (pp. 36-44). La Habana: ECIMED.

(65) Guetmanova, A. (1989). Lógica. Moscú: Editorial Progreso.

(66) Rosental, M. y Iudin, P. (1981). Diccionario Filosófico. La Habana: Editora Política.

(67) Engels, F. (1970). AntiDuhring. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

(68) Loi, M. (1982). Prólogo. En: Pensar la Matemática, Éditions du Seuil, pág. 8.

(69) Martí, J. (1975). Obras completas, vol. 18, pág. 390. La Habana: Editorial de Ciencias Sociales.

(70) Turnbull, H.W. (1984). Grandes matemáticos. La Habana: Editorial Científico-Técnica.

(71) González, O. (2007) El enfoque histórico-cultural como fundamento de una concepción pedagógica. En CEPES, Tendencias pedagógicas contemporáneas (pp. 81-93). La Habana: CEPES Universidad de la Habana.

(72) Schuare, M. (1990). La Psicología soviética tal y como yo la veo. Moscú: Progreso.

(73) Galperin, P.Y. (1982). Introducción a la Psicología. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

(74) Galperin, P.Y. (1986). Sobre el método de formación por etapas de las acciones intelectuales. En Iliasov I. I. y V. Ya. Liaudis (comps.), Antología de la Psicología Pedagógica y de las Edades (pp. 114-117). La Habana: Pueblo y Educación.

(75) Leontiev, A. A. (1986). La comprensión del significado por parte del portador de la lengua. En Iliasov I. I. y V. Ya. Liaudis (comps.), Antología de la Psicología Pedagógica y de las Edades (pp.260-264). La Habana: Pueblo y Educación.

(76) Rubinstein, J. L. (1986). El problema de las capacidades y las cuestiones relativas a la teoría psicológica. En Iliasov I. I. y V. Ya. Liaudis (comps.), Antología de la Psicología Pedagógica y de las Edades (pp. 54-67). La Habana: Pueblo y Educación.

(77) Talizina, N. (1988). Psicología de la Enseñanza. Moscú: Progreso.

(78) Corral Ruso, R. (2001). La Zona de Desarrollo Próximo: una interpretación. Revista Cubana de Psicología, vol. 17, no. 1.

(79) Corral Ruso, R. (2002). La Zona de Desarrollo Próximo y la Pedagogía Universitaria. Revista Temas, no.31.

(80) White, H.C. (1997). Can Mathematics Be Social? Flexible Representations for Interaction Process and Its Sociocultural Constructions. Sociological Forum, vol. 12, no.1, 53-71.

(81) Martin, B. (1988). Mathematics and social interests. Published in Search, vol. 19, no. 4, 209-214. [Citado 28 de mayo de 2015]. Disponible en: http://www.bmartin.cc/pubs/88search.html

(82) Sierra Salcedo, R.A. (2007). Modelación y estrategia: algunas consideraciones desde una perspectiva pedagógica. En Gilberto García Batista (comp.), Compendio de Pedagogía (pp. 311-328). La Habana: ECIMED. .

(83) Báxter Pérez, E., Amador Martínez, A. y Bonet Cruz, M. (2007). La escuela y el problema de la formación del hombre. En Gilberto García Batista (comp.), Compendio de Pedagogía (pp. 143-192). La Habana: ECIMED.

(84) Ministerio de Educación Superior. (2006). Programa de la disciplina Álgebra. Plan de estudio D. Carrera de Licenciatura en Matemática. La Habana: Autor.

(85) Kurosh, A.G. (1977). Curso de Álgebra Superior. Moscú: Mir.

(86) Van Der Waerden. (1979). Álgebra. Moscú: Nauka (en idioma Ruso).

(87) Maltsev, A.I. (1976). Fundamentos del Álgebra. Moscú: Mir.

(88) Birkhoff, G. y MacLane, S. (1973). Álgebra Moderna. La Habana: Pueblo y Educación.

(89) Queysanne, M. (1973). Álgebra Básica. Barcelona: Vicens-Vives.

(90) Noriega, T. y Piñeiro, L. (1985). Álgebra, Tomo II. La Habana: Pueblo y Educación.

(91) Zeldovich, Y. y Yaglom, I. (1987). Matemáticas Superiores. Moscú: Mir.

(92) Schwarz, A.S. (1989). Teoría Cuántica del Campo y Topología. Moscú: Nauka (en Idioma Ruso).

(93) Ministerio de Educación Superior. (2006). Programa de la disciplina Matemática. Plan de estudio D. Carrera de Licenciatura en Física. La Habana: Autor.

(94) Ministerio de Educación Superior. (2006). Programa de la disciplina Física Teórica. Plan de estudio D. Carrera de Licenciatura en Física. La Habana: Autor.

(95) Proskuriakov, I. (1986). Problemas de Álgebra Lineal. Moscú: Mir.

(96) Hamilton, W.R. (1866). Elements of quaternions. London: William Edwin Hamilton, A.B.T.C.D., C.E. Longmans Green & Co.

(97) Morais, J.P., Georgiev, S. y Sprössig, W. (2014). Real Quaternionic Calculus. New York: Springer Basel.

(98) Manzo, A. (1971). Manual para la preparación de monografías. Buenos Aires: Hvmanitas.

(99) Villamil, M.I. (2009). Pasos para preparar una monografía. Bayamón: Centro de acceso a la Información. Universidad Interamericana de Puerto Rico.

(100) Gómez Prieto, M. (2011). Cómo hacer una monografía. [Citado 23 de octubre de 2014]. Disponible en:
http://www.lopedevega.es/donlope/wiki/images/C%C3%B3mo_hacer_una_monograf%C3%ADa.pdf

(101) Gájov, F.D. (1980). Problemas de contorno. Moscú: Mir.

(102) Morris, R. y Arora, M. S. (1992). Estudios en Educación Matemática. Hacia el siglo veintiuno. Montevideo: ORCYT.

(103) Rebollar Morote, A. (2000). Una nueva variante para la estructuración del proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática a partir de una nueva forma de organizar el contenido, en la escuela media cubana. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Santiago de Cuba.

(104) Sears, F.W., Zemansky, M.W., John, H.D. y Freedman, R.A. (2008). Física Universitaria, volumen II, parte I. La Habana: Félix Varela.

(105) Halliday, D., Resnick, R. y Krane, K.S. (2004). Física., Volumen II, tomo I, cuarta edición. La Habana: Félix Varela.

(106) Landau, L. y Lifshitz, E.M. (1979). Curso de Física Teórica. Moscú: Mir.

(107) Saveliev, I.V. (1985). Curso de Física General. Moscú: Mir.

(108) Ribnikov, K. (1987). Historia de las Matemáticas. Moscú: Mir.

(108) Majmutov, M.I. (1983). La enseñanza problémica. La Habana: Pueblo y Educación.

(109). Demidovich. (1977) Problemas y ejercicios de Análisis matemático. Moscú: Mir.

(110) Kudriatsev, S. (1983). Curso de Análisis Matemático. Moscú: Mir.

(111) ILyin, I. y Pazniak, E. (1983). Álgebra Lineal. Moscú: Mir.

(112) Kletenik, E. (1985). Geometría Analítica. Moscú: Mir.

(113) Lehmann, C.H. Geometría Analítica. (1974). La Habana: Pueblo y Educación.

(114) Montoro, V. (2007). Concepciones de estudiantes de profesorado acerca del aprendizaje de la demostración. REIEC, Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, no 1, 101-121.

(115) Weber, K. (2004). Traditional instruction in advanced mathematics courses: case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course. Journal of Mathematical Behavior, no 23, 115-133.

(116) Dreyfus, T. (2000). La demostración como contenido a lo largo del curriculum. En Gorgorió, N.,Deulofeu, A., Bishop, A. (comps.), Matemáticas y Educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional (pp. 125–133). Barcelona: Graó, S.R.L.

(117) Polya, G. (1957). How to solve it. A new Aspect of Mathematical Method. Princeton: Princeton University Press.

(118) Comparaciones, Semejanzas y Diferencias entre Piaget y Vigotsky. [Citado 14 de mayo de 2015]. Disponible en:
http://izma3l.wordpress.com/2010/02/28/comparaciones-semejanzas-y-diferencias-entre-piaget-y-vigotsky/

(119) Brackx, F., Delanghe, R. y Sommen, F. (1982). Clifford Analysis. Research Notes in Mathematics 76. Pitman Advanced Publishing Program.