UNIVERSIDAD DE HOLGUÍN
FACULTAD DE INFORMÁTICA Y MATEMÁTICA

PROPIEDADES DE FRONTERA DE LAS FUNCIONES POLIMONOGÉNICAS EN EL ANÁLISIS DE CLIFFORD

Tesis de Diploma

ARSENIO MORENO GARCÍA

Holguín
2014

UNIVERSIDAD DE HOLGUÍN
FACULTAD DE INFORMÁTICA Y MATEMÁTICA

PROPIEDADES DE FRONTERA DE LAS FUNCIONES POLIMONOGÉNICAS EN EL ANÁLISIS DE CLIFFORD

Tesis de Diploma

Autor: Arsenio Moreno García
Tutor: Dr.C. Tania Moreno García

Holguín
2014

Resumen

En este trabajo se obtiene un teorema de tipo Plemelj-Privalov para funciones de Lipschitz con exponente mayor que uno en superficies suaves. Se generaliza al caso de orden k el planteamiento del problema del salto para funciones polimonogénicas y se hallan condiciones para su solubilidad. Se demuestra una generalización del teorema de Liouville para funciones polimonogénicas.

Abstract

In this work we give a generalization of Plemelj-Privalov theorem for the classes of Lipschitz with exponent greater than one on smooth surfaces. We give conditions of solvability for the polimonogenic jump problem. We prove a generalization of Liouville theorem for polimonogenic functions.

Contenido

Introducción **4**

1 Preliminares **8**
1.1 Álgebras de Clifford 8
1.2 Análisis de Clifford básico 9
1.3 Funciones de Lipschitz con exponente mayor que uno 11
1.3.1 Partición de Whitney 11
1.3.2 Extensión de Whitney 13

2 El problema del salto para funciones polimonogénicas **15**
2.1 La transformada de Cauchy de orden k 15
2.2 El problema del salto de orden k 16

3 Generalización del teorema de Plemelj-Privalov **18**

Bibliografía **27**

Introducción

Las álgebras Clifford fueron introducidas en 1878 William Kingdom Clifford (1845-1879) y constituyen una generalización multidimensional de los números complejos. Estas permiten manipular algebraicamente conceptos geométricos, lo cual ha hecho posible importantes aplicaciones de estas a la geometría, la computación y la física teórica. (véase [8]).

Las funciones con valores en álgebras de Clifford constituyen el objeto de estudio de la moderna teoría de funciones conocida como análisis de Clifford. La primera monografía dedicada a esta temática fue publicada por Brack, Delanghe y Sommen en 1982. Otros resultados pioneros se deben a Dixon, Moisil y Teodorescu, Fueter, Iftimie y Hestenes.

El análisis de Clifford juega un papel fundamental en la resolución de problemas de contorno en espacios euclidianos de alta dimensión; entre los cuales se encuentran los clásicos problemas de Dirichlet y Neumann, muy conocidos dentro de la física-matemática. Otros problemas asociados a sistemas de ecuaciones en derivadas parciales de importancia dentro de la matemática y fuera de ella son los problemas del tipo Riemann-Hilbert (R-H) (véase [12]).

Una herramienta analítica que ha sido usada con éxito en la solución de los problemas de tipo R-H es la transformada de Cauchy. Es por ello que el estudio de su comportamiento en la frontera del dominio constituye un paso previo e imprescindible en la resolución de estos problemas.

El planteamiento de los problemas de tipo R-H se ha extendido ya a orden superior, lo cual ha conllevado naturalmente a la introducción de las funciones polimonogénicas o funciones monogénicas de orden k, las cuales conforman el núcleo de un operador obtenido al iterar k veces el operador de Dirac clásico.

La reconstrucción de una función polimonogénica a partir del salto que esta experimenta en una superficie dada en $\mathbb{R}^n$ (problema del salto) tiene como antecedente el de reconstruir una función analítica en el plano complejo conociendo el salto que experimenta a través de una curva dada. En un lenguaje algo más general, este fue uno de los famosos 21 problemas presentados por el insigne matemático alemán David Hilbert en el Congreso de Matemáticos celebrado en París en 1990. Los primeros reportes aparecidos en la literatura que intentaban dar soluciones parciales a este problema conocido actualmente como problema de Riemann-Hilbert, se deben a Plemelj (1905), Rohrl (1957). Finalmente Bolibruch (1989) demuestra que el problema de R-H no es soluble en su formulación original.

El problema del salto para funciones polimonogénicas ha sido investigado por varios autores, entre ellos Begehr ([3]), el cual asume que el salto está dado por una función continuamente diferenciable en la clausura del dominio interior a la superficie, en este caso la solución es la transformada de Cauchy polimonogénica de la función dada.

Un caso más general es aquel en el cual el salto está dado por una función que pertenece a una clase de Lipschitz con exponente mayor que uno. Estas funciones constituyen una clase más amplia que la de las funciones continuamente diferenciables en conjuntos cerrados.

Una acotación del módulo de suavidad de la transformada de Cauchy de primer orden de una función de Lipschitz con exponente mayor que uno en el caso bidimensional fue dada por Dyn'kin en 1979 (véase [6]). Este resultado tiene como corolario el hecho de que los valores de frontera de la transformada de Cauchy pertenecen a la misma clase de Lipschitz que la función dad sobre la frontera.

No existe un análogo n-dimensional de este resultado de Dyn'kin. La generalización procedimiento usado por Dyn'kin para probar ese resultado en el caso bidimensional presenta un conjunto de obstáculos que es necesario esquivar en el caso cliffordiano. Entre estas dificultades se encuentran las siguientes:

- La multiplicación en las álgebras de Clifford de dimensión mayor que dos no es conmutativa.
- El producto de dos funciones monogénicas no es en general una función monogénica.
- Los polinomios en el análisis de Clifford no son en general funciones monogénicas.

La definición de las clases de Lipschitz con exponente mayor que uno dada por Stein en [13] está estrechamente ligada al concepto de módulo de suavidad dado por Dyn'kin en [6]. El módulo de suavidad permite definir clases de funciones mucho más generales que las de Lipschitz.

El concepto de módulo de suavidad emerge de la teoría de la aproximación local, cuando se trata de encontrar el polinomio de aproximación óptima de grado k para una función continua dada véase [15], [14], [11] y [10]. En [6] Dyn'kin da una variante de la definición de clase generalizada de Lipschitz usando el polinomio de interpolación de Lagrange.

La presente tesis se ocupa del caso de las funciones de Lipschitz con exponente mayor que uno, y el **problema** de investigación se formula como sigue. ¿Qué propiedades de frontera cumple la transformada de Cauchy polimonogénica en las clases de Lipschitz con exponente $\gamma > 1$?

El **objeto** de investigación es la transformada de Cauchy polimonogénica y el **campo** de accin es la transformada de Cauchy polimonogénica en las clases de Lipschitz con exponente mayor que uno.

El **objetivo** es determinar propiedades de frontera de la transformada de Cauchy polimonogénica en las clases de Lipschitz con exponente $\gamma > 1$, lo cual conduce a la formulación de las siguientes **preguntas científicas** :

- ¿A qué clase de Lipschitz pertenece la transformada de Cauchy polimonogénica en las clases de Lipschitz con exponente $\gamma > 1$?

- ¿El producto de dos funciones k-monogénicas es una función k-monogénica?

- ¿Se cumple un análogo del teorema de Liouville para funciones k-monogénicas?

- ¿Se cumple un análogo del teorema de Painlevé para funciones k-monogénicas?

- ¿Cómo generalizar el planteamiento del problema del salto para funciones k-monogénicas y salto de Lipschitz con exponente $\gamma > 1$?

- ¿Bajo qué condiciones la solución del problema del salto para funciones k-monogénicas y salto de Lipschitz con exponente $\gamma > 1$ es única?

Las respuestas a las preguntas planteadas se obtienen a través del cumplimiento de las siguientes **tareas**:

- Resolución del problema del salto de orden k para funciones de Lipschitz con exponente $\gamma > 1$.

- Determinación de la clase de Lipschitz a la cual pertenecen los valores de frontera de la transformada de Cauchy polimonogénica en las clases de Lipschitz con exponente $\gamma > 1$?.

En el capítulo 1 se presentan los conceptos básicos y las ideas fundamentales del análisis de Clifford que se usan en las demostraciones de los teoremas fundamentales de la tesis. En particular, se exponen los resultados básicos sobre las clases de funciones de Lipschitz con exponente mayor que uno, así como la definición y propiedades básicas de la extensión de Whitney de orden k asociada a una función de esta clase.

En el capítulo 2 se presenta un teorema sobre la unicidad de la solución del problema del salto para funciones polimonogénicas, así como una generalización del teorema de Liouville para funciones polimonogénicas, un lema sobre el producto de funciones polianalíticas en el caso complejo y un contraejemplo que muestra que para funciones polimonogénicas no se cumple la afirmación del teorema de Painlevé que se cumple para las monogénicas.

En el capítulo 3 se presenta un teorema de tipo Plemelj-Privalov para funciones de Lipschitz con exponente mayor que uno sobre superficies suaves en $\mathbb{R}^{n+1}$.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presentan las nociones básicas de las álgebras de Clifford reales, así como una breve revisión de los principales aspectos del Análisis de Clifford que se utilizan en lo que sigue.

1.1 Álgebras de Clifford

Sea $\mathbb{R}^{0,m}$ ($m \in \mathbb{N}$) el espacio vectorial real $\mathbb{R}^m$ provisto de una forma cuadrática no degenerada de signatura $(0, m)$ y sea $(e_i)_{i=1}^n$ la base ortogonal correspondiente para $\mathbb{R}^{0,m}$. Entonces $\mathbb{R}_{0,m}$, el álgebra de Clifford universal sobre $\mathbb{R}^{0,m}$, es un álgebra real lineal asociativa con identidad, tal que los elementos e_i, $i = 1, \dots, m$, satisfacen las reglas básicas de multiplicación

$$e_i^2 = -1,\ j = 1, \dots, n;$$

$$e_i e_j + e_j e_i = 0,\ i \neq j.$$

Para $A = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, m\}$ con $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant m$, pongamos $e_A = e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}$, mientras para $A = \emptyset$, $e_\emptyset = 1$ (el elemento identidad en $\mathbb{R}_{0,m}$). Entonces $\{e_A : A \subset \{1, \dots, m\}\}$ es una base para $\mathbb{R}_{0,m}$.

Para $1 \leqslant k \leqslant m$, con m fijo, el espacio $\mathbb{R}_{0,m}^{(k)}$ de los k-vectores o multivectores de grado k en $\mathbb{R}_{0,m}$, se define como

$$\mathbb{R}_{0,m}^{(k)} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(e_A :\ |A| = k).$$

Claramente

$$\mathbb{R}_{0,m} = \sum_{k=0}^{m} \oplus \mathbb{R}_{0,m}^{(k)}.$$

Así, cada elemento $a \in \mathbb{R}_{0,m}$ puede ser escrito de forma única como

$$a = [a]_0 + [a]_1 + \cdots + [a]_m$$

donde $[\,]_k : \mathbb{R}_{0,m} \longrightarrow \mathbb{R}_{0,n}^{(k)}$ denota la proyección de $\mathbb{R}_{0,m}$ sobre $\mathbb{R}_{0,m}^{(k)}$.

Si se identifica el vector $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ con el número de Clifford $x = \sum_{j=1}^m e_i x_i$, entonces $\mathbb{R}^m$ puede ser considerado como subespacio de $\mathbb{R}_{0,m}$.

La conjugación se define como $\overline{a} := \sum_A a_A \overline{e_A}$, donde

$$\overline{e_A} = (-1)^k e_{i_k} \cdots e_{i_2} e_{i_1}, \text{ si } e_A = e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}.$$

Entonces, para $x \in \mathbb{R}^n$, tenemos que

$$x\,\overline{x} = \overline{x}\,x = |x|^2.$$

Por medio de esta conjugación es posible proveer a $\mathbb{R}_{0,m}$ de la norma euclideana $|a|^2 = [a\overline{a}]_0$. Y si tomamos $|a|_0^2 = 2^m |a|^2$ se obtiene entonces un álgebra normada.

1.2 Análisis de Clifford básico

El Análisis de Clifford estudia las funciones definidas en dominios de $\mathbb{R}^m$, $m \in \{n, n+1\}$ y que toman valores en $\mathbb{R}^n$. Sea $\mathbf{E} \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto acotado, entonces $C^{0,\alpha}(\mathbf{E})$ representa la clase de Hölder compuesta por funciones continuas u con valores en $\mathbb{R}_{0,n}$ para las cuales

$$\sup\{|u(x) - u(y)| : \; |x - y| \leqslant \delta, \; x, y \in \mathbf{E}\} \leqslant c\,\delta^\alpha.$$

El Análisis de Clifford se concentra especialmente en las llamadas funciones monogénicas, que se definen como aquellas pertenecientes al núcleo del operador de Dirac en $\mathbb{R}^m$:

$$\mathcal{D}_x := \sum_{i=1}^m e_i \partial_{x_i}.$$

Este operador es una extensión natural al espacio $\mathbb{R}^m$ del operador complejo de Cauchy-Riemann. La función u con valores en $\mathbb{R}_{0,m}$ que en algún abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ satisface la ecuación

$$\mathcal{D}_x u = 0 \;\; (u\mathcal{D}_x = 0) \tag{1.1}$$

se dice monogénica a la izquierda (a la derecha) en Ω. Por comodidad usamos el término "monogénica" en lugar de "monogénica a la izquierda". Una función monogénica a ambos lados es la solución fundamental del operador de Dirac, dada por

$$e(x) = \frac{1}{A_m} \frac{\overline{x}}{|x|^m}\,, \; x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}.$$

donde A_m denota el área de la esfera unitaria en $\mathbb{R}^m$.
La función $e(x)$ juega en el Análisis de Clifford el mismo papel que el núcleo de Cauchy en el Análisis Complejo. Sea Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^m$ con frontera suave Γ y u continua en Γ. Usando este núcleo se definen los siguientes operadores singulares integrales.

$$\mathcal{T}_\Omega v(x) = \int\limits_\Omega e(y-x)v(y)d\mathcal{L}^m(y) \tag{1.2}$$

donde $\mathcal{L}^n$ denota la medida de Lebesgue m-dimensional.

$$\mathcal{C}_\Gamma u(x) := \int\limits_\Gamma e(y-x)n(y)u(y)d\Gamma_y,\ x\in\mathbb{R}^m\setminus\Gamma, \tag{1.3}$$

$$S_\Gamma u(x) := \int\limits_\Gamma e(y-x)n(y)u(y)d\Gamma_y,\ x\in\Gamma, \tag{1.4}$$

donde $d\Gamma_y$ denota el diferencial de área y $n(y)$ es el vector normal unitario exterior a Ω en $y\in\Gamma$.

Se cumple que $\mathcal{C}_\Gamma u$ es monogénica en $\mathbb{R}^n\setminus\Gamma$.

Por otro lado, si la función u, continua en $\overline{\Omega}$, es además monogénica en Ω, entonces:

$$\mathcal{C}_\Gamma u(x) = \begin{cases} u(x), & x\in\Omega \\ 0, & x\in\mathbb{R}^n\setminus\overline{\Omega}, \end{cases} \tag{1.5}$$

: la cual es también conocida en el Análisis de Clifford como fórmula de Cauchy.

Más generalmente, si $u\in C^1(\Omega)$ y $\mathcal{D}_x u\in L^1(\Omega)$, entonces se obtiene la siguiente versión cliffordiana de la fórmula de Borel-Pompeiu

$$\mathcal{C}_\Gamma u(x) - \mathcal{T}_\Omega\mathcal{D}_x u(x) = \begin{cases} u(x), & x\in\Omega \\ 0, & x\in\mathbb{R}^n\setminus\overline{\Omega}, \end{cases} \tag{1.6}$$

Lema 1.2.1 *(Fórmulas de Plemelj-Sojotski). Sea $u\in C^{0,\alpha}(\Omega), 0<\alpha<1$. Entonces*

$$\mathcal{C}_\Gamma^+ u(x) = \frac{1}{2}(I_\Gamma + S_\Gamma)u(x) \tag{1.7}$$

$$\mathcal{C}_\Gamma^- u(x) = \frac{1}{2}(-I_\Gamma + S_\Gamma)u(x) \tag{1.8}$$

donde $\mathcal{C}_\Gamma^+ u(x)$ y $\mathcal{C}_\Gamma^- u(x)$ denotan respectivamente los valores límites de $\mathcal{C}_\Gamma u(x)$ al aproximarnos a Γ desde Ω y desde $\mathbb{R}^m\setminus\Omega$.

1.3 Funciones de Lipschitz con exponente mayor que uno

En esta sección se exponen las principales propiedades de la clase de funciones sobre las cuales se desarrolla el presente trabajo.

Definición 1.3.1 *Una función real u, definida en un conjunto cerrado E, se dice que pertenece a la clase de Lipschitz $Lip(\gamma,\, E)$ si existen funciones $u^{(j)}$, $0 \leqslant |j| \leqslant k$ definidas en E, con $u^{(0)} = u$, y tales que si*

$$u^{(j)}(x) = \sum_{|j+l| \leqslant k} \frac{u^{(j+l)}(y)}{l!}(x-y)^l + R_j(x,y) \tag{1.9}$$

entonces $|u^{(j)}(x)| \leqslant M$ and $R_j(x,y) \leqslant M|x-y|^{\gamma-|j|}$ para $x, y \in E$ y $|j| \leqslant k$.

Aquí j y l denotan multi-índices. Para funciónes cliffordianas se tiene la siguiente definición.

Definición 1.3.2 *Sea E un conjunto cerrado en R^{n+1} y u una función definida en E la cual toma valores en $\mathbb{R}_{0,n}$, $u = \sum\limits_A u_A e_A$, $A \subset \{1,\, 2,\, \ldots n\}$. La función u pertenece a la clase $Lip(\gamma,\, E)$ si cada una de sus componentes f_A pertenece a dicha clase.*

Para mayor brevedad introduzcamos la notación $P_j(x,\, y) = \sum_{|j+l| \leqslant k} \frac{u^{(j+l)}(y)}{l!}(x-y)^l$ y $P_0 = P$.

En el caso en que $F = \mathbb{R}^n$ y $u \in Lip(\gamma,\, \mathbb{R}^n)$, u es continua y acotada, y tiene derivadas parciales continuas y acotadas hasta orden k. Además $\frac{\partial^j f}{\partial x^j} = f^{(j)}$, $|j| \leqslant k$.

Con el propósito de construir una extensión de $u \in Lip(\gamma,\, \Gamma)$ a una función de $Lip(\gamma,\, \mathbb{R}^n$ presentamos la siguiente partición de un conjunto abierto, la cual constituye la base del procedimiento para extender la función u a todo el espacio.

1.3.1 Partición de Whitney

En lo adelante denotaremos por F un conjunto cerrado en R^{n+1} y Ω' su complemento. Entendemos por cubo un cubo cerrado en R^{n+1}, con lados paralelos a los ejes coordenados. Dos cubos se llaman disjuntos si sus interiores son disjuntos. Para un cubo Q denotamos por $diam(Q)$ su diámetro y $dist(Q,\, F)$ la distancia de Q a F.

Teorema 1.3.1 *Sea F un conjunto cerrado dado. Entonces existe una colección de cubos $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} = \{Q_1, Q_2, ..., Q_k, ...\}$ tal que*

(1) $\bigcup Q_k = \Omega' = F^c$.

(2) Los Q_k son disjuntos dos a dos.

(3) $diam(Q_k) \leqslant dist(Q_k) \leqslant 4\, diam(Q_k)$.

Las constantes c_1 y c_2 son independientes de F. En efecto, podemos tomar $c_1 = 1$ y $c_2 = 4$.

Consideremos los puntos con coordenadas enteras en R^{n+1}. Estos puntos determinan una malla $\mathcal{M}_0$, la cual consiste en una colección de cubos de lado 1 cuyos vértices son puntos con coordenadas enteras. A partir de $\mathcal{M}_0$ es posible construir una cadena infinita de mallas $\{\mathcal{M}_k\}_{-\infty}^{\infty}$ donde $\mathcal{M}_k = 2^{-k}\mathcal{M}_0$. Luego cada cubo de la malla $\mathcal{M}_k$ se puede dividir en 2^{n+1} cubos bisecando sus aristas y de ese modo se obtiene $\mathcal{M}_{k+1}$. Los cubos de la malla $\mathcal{M}_k$ son de lado 2^{-k} y diámetro $\sqrt{n+1}2^{-k}$.

Consideremos además los conjuntos Ω_k definidos por $\Omega_k = \{x : c2^{-k} < dist(x, F) \leqslant c2^{-k+1}\}$ donde c es una constante positiva. Evidentemente $\Omega = \bigcup_{k=-\infty^{\infty}} \Omega_k$.

Hagamos una selección inicial de los cubos, y denotemos la colección resultante por $\mathcal{F}_0$. Nuestra seleeción fue hecha de la siguiente forma. Consideremos los cubos de la red $\mathcal{M}_k$, en la cual cada cubo es de arista aproximadamente igual a 2^{-k}, e incluyamos un cubo de esta red en $\mathcal{F}_0$ si este intersecta a Ω_k. La distancia de cada punto de Ω_k a F es aproximadamente igual a 2^{-k}. Tenemos que

$$\mathcal{F}_0 = \bigcup_k \{Q \in \mathcal{M}_k : Q \cap \Omega_k \neq \phi\}$$

Luego,

$$\bigcup_{Q\in\mathcal{F}_0} Q = \Omega.$$

Para cada cubo $Q \in \mathcal{F}_0$ consideremos el cubo maximal de $\mathcal{F}_0$ que lo contiene. Este cubo maximal es único (véase [13]). Sea $\mathcal{F}$ la colección de cubos maximales de $\mathcal{F}_0$. Estos cumplen las propiedades del Teorema 1.3.1.

Decimos que dos cubos son vecinos si sus fronteras tienen una intersección no vacía.

Sea Q_k un cubo cualquiera de $\mathcal{F}$. Denotemos por x^k su centro y por l_k la longitud de su lado. Evidentemente $diam(Q_k) = \sqrt{n+1}\, l_k$. Fijemos un ϵ tal que $0 < \epsilon < \frac{1}{4}$. Sea $Q_k^* = (1+\epsilon)[Q_k - x^k] + x^k$. Entonces $Q_k \subset Q_k^*$.

Se cumplen las siguientes proposiciones (véase [13]).

Proposición 1.3.1 *Sean Q_1 y Q_2 dos cubos vecinos. Entonces*

$$\frac{1}{4} diam(Q_2) \leqslant diam(Q_1) \leqslant 4 diam(Q_2).$$

Proposición 1.3.2 *Sea $Q \in \mathcal{F}$. Entonces en $\mathcal{F}$ hay como máximo $N = 12^n$ cubos vecinos de Q.*

Proposición 1.3.3 *Sea $Q \in \mathcal{F}$. Cada punto de F^c está contenido en N cubos de los Q_k^* como máximo.*

1.3.2 Extensión de Whitney

El siguiente teorema de extensión de Whitney para estas clases de funciones constituye una poderosa herramienta en los problemas de contorno y en particular para la investigación de las propiedades de frontera de la transformada de Cauchy.

Teorema 1.3.2 *Sea k un entero no negativo, $k < \gamma \leqslant k+1$, E un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^{n+1}$ y $u \in Lip(\Gamma, E)$, $u^{(i)}$, $|i| \leqslant k$ sus funciones asociadas, $u^{(0)} = u$. Entonces existe una función $\widetilde{u} \in Lip(\Gamma, \mathbb{R}^{n+1})$ la cual cumple las siguientes propiedades.*

(1) $\widetilde{u^{(j)}}(x) = u^{(j)}(x)$, $x \in E$.

(2) $|\widetilde{u}(x) - P(x,a)| \leqslant c|x-a|^{\gamma}$, $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, $a \in E$.

(3) $|\widetilde{u}^{(j)}(x) - P_j(x,a)| \leqslant c|x-a|^{\gamma-|j|}$, $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, $a \in E$, $|j| \leqslant k$.

(4) $|\widetilde{u}^{(j)}(x)| \leqslant c$, $|j| \leqslant k$.

(5) $|\widetilde{u}^{(j)}(x)| \leqslant c(dist(x, E))^{\gamma-k-1}$, $x \in E^c$, $|j| = k+1$.

Veamos cómo se construye la extensión de Whitney. En primer lugar se construye una partición de la unidad de la siguiente forma.

Sea Q_0 el cubo de lado 1 centrado en el origen. Fijemos una función $\varphi \in C^\infty$ tal que $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, $\varphi(x) = 1$ para todo $x \in Q_0$, y $\varphi(x) = 0$ para $x \notin (1+\epsilon)Q_0$. Sea φ_k la función φ adaptada al cubo Q_k, es decir

$$\varphi(x) = \varphi(\frac{x - x^k}{l_k}).$$

De aquí se deduce que $\varphi_k(x) = 1$ si $x \in Q_k$ y $\varphi(x) = 0$ si $x \notin Q_k^*$. Además se cumple la siguiente desigualdad

$$|(\frac{\partial}{\partial x})^{\alpha}\varphi_k(x)| \leqslant c(diam(Q_k))^{-|\alpha|} \tag{1.10}$$

donde α es un multíndice y c es una constante que solo depende de α. Para $x \in F^c$ definimos

$$\varphi_k^*(x) = \frac{\varphi_k(x)}{\Phi(x)}$$

donde $\Phi(x) = \sum_k \varphi_k(x)$. Además

$$\sum_k \varphi_k^*(x),\; x \in F^c. \tag{1.11}$$

Como consecuenencia de la desigualdad 1.10 (véase [13]) se obtiene la siguiente

$$|(\frac{\partial}{\partial x})^{\alpha}\varphi_k^*(x)| \leqslant c(diam(Q_k))^{-|\alpha|}. \tag{1.12}$$

Consideremos el conjunto F y la familia de cubos $\{Q_k\}$ dados en el Teorema 1.3.1. Para cada cubo Q_k fijemos un punto $p_k \in F$ tal que $dist(Q_k,\, F) = dist(Q_k,\, p_k)$. Este punto existe ya que F es cerrado.

La extensión de Whitney de $f \in Lip(\gamma,\, F)$ se define de la siguiente forma.

$$\mathcal{E}(f^{(j)}) = f^{(0)}(x),\; x \in F \tag{1.13}$$

$$\mathcal{E}(f^{(j)}) = \sum_i P(x,\, p_i)\varphi_i^*(x),\; x \in F^c. \tag{1.14}$$

Después de haber presentado los conceptos básicos de Análisis de Clifford, ya estamos en condiciones de pasar a presentar llas respuestas a las preguntas científicas planteadas.

Capítulo 2

El problema del salto para funciones polimonogénicas

Este capítulo está dedicado a la solución del problema del salto para funciones polimonogénicas, que se resuelve a través de la transformada de Cauchy polimonogénica.

2.1 La transformada de Cauchy de orden k

En esta sección se introduce la transformada de Cauchy de orden k para funciones de Lipschitz con exponente γ, $k < \gamma \leqslant 1$, así como algunas propiedades especiales de las funciones polimonogénicas. Una función $u(x)$ definida en un dominio abierto Ω se denomina polimonogénica de orden k o k-monogénica si $D^k u = 0$ en Ω. Las funciones $(k+1)$-monogénicas están estrechamente relacionadas con las funciones de la clase $Lip(\gamma, \Gamma)$. Esta relación se manifiesta claramente en e problema del salto que consideramos a continuación. Para mayor brevedad en el planteamiento de este problema introduzcamos la siguiente notación.

Sea $u \in Lip(\gamma, \Gamma)$, $k < \gamma \leqslant k+1$ y $u^{(j)}$, $|j| \leqslant k$ sus funciones asociadas. Sea $\hat{\partial}_p u = u^{(0,0\ldots,0,1,0,\ldots,0)}$ donde el 1 aparece en el lugar p-ésimo del multíndice. Sea $\hat{D}u = \sum\limits_{p=1}^{n+1} e_p \hat{\partial}_p u$.

Un ejemplo de función k-monogénica es la transformada de Cauchy de orden k de una función $u \in Lip(\gamma, \Gamma)$

$$\hat{C}^k_\Gamma u(z) = \sum_{m=1}^{k} C^m_\Gamma u(z) \tag{2.1}$$

donde

$$C_{\Gamma}^{m}u(z) = \int \Gamma E_{m-1}(\xi - z)n(\xi)\hat{D}_{\xi}^{m}u(\xi)d\mathcal{H}^{n}(\xi) \tag{2.2}$$

$$E_{m-1}(x) = \frac{(-1)^{m-1}(\xi - z)^{m}}{m!\sigma_{n+1}|\xi - z|^{n+1}} \tag{2.3}$$

La fórmula de Borel-Pompeiu usual encuentra una generalización natural al caso de orden superior (véase [3]).

Teorema 2.1.1 *Sea* $u \in Lip(\gamma, \Gamma)$*,* $k < \gamma \leqslant k+1$ *y* $\widetilde{u}$ *la extensión de Whitney de orden* k *de* u*. Entonces*

$$\widetilde{u}(z) = \hat{C}_{\Gamma}^{k}u(z) + \hat{\mathcal{T}}_{\Omega}E_{k}(\xi - z)D_{\xi}^{k}\widetilde{u}(\xi) \tag{2.4}$$

donde

$$\hat{\mathcal{T}}_{\Omega}D_{\xi}^{k}u(\xi) = \int_{\Omega} E_{k}(\xi - z)D_{\xi}^{k}\widetilde{u}(\xi) \tag{2.5}$$

es la transformada de Teodorescu de orden k de $D_{\xi}^{k}\widetilde{u}(\xi)$.

2.2 El problema del salto de orden k

El problema del salto para funciones polimonogénicas consiste en lo siguiente.

Sea Γ *una superficie cerrada suave en* $\mathbb{R}^{n+1}$ *la cual acota un dominio* Ω *simplemente conexo y sea* $u \in Lip(\gamma, \Gamma)$*,* $1 \leqslant k < \gamma \leqslant k+1$*,* $k < n+1$ *. Hallar una función* Φ k*-monogénica en* $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Gamma$ *que cumpla las siguientes condiciones de contorno.*

$$(D^{m}\Phi)^{+}(\xi) - (D^{m}\Phi)^{-}(\xi) = \hat{D}^{m}u(\xi), \ m = 0, 1, 2, ..., k-1 \tag{2.6}$$

$$D^{m}\Phi(\infty) = 0, \ m \leqslant k-1 \tag{2.7}$$

donde F^{+} *y* F^{-} *denotan los valores límites de* F *por dentro y por fuera de* Γ*.*

De la fórmula de Borel-Pompeiu de orden k 2.5 y el Teorema 2.20 de [16] se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 2.2.1 *La función* $\widetilde{u}(z) = \hat{C}_{\Gamma}^{k}u(z)$ *es solución del problema del salto.*

De este hecho surge como genralización natural de la transformada de Hilbert usual la siguiente transformada de Hilbert de orden k.

$$\hat{H}_{\Gamma}^{k} = [\hat{C}_{\Gamma}^{k}]^{+} + [\hat{C}_{\Gamma}^{k}]^{-}.$$

Teorema 2.2.2 *La solución del problema del salto 2.6 es única.*

Demostración. Es evidente que el problema se reduce a probar que para el caso en que u es idénticamente igual a cero, la solución del problema del salto es la función nula en todo el espacio, y solo esa. Probémoslo por inducción completa sobre k. Consideremos primeramente el caso $k = 1$. Este caso es precisamente el problema del salto usual, el cual tiene solución única en virtud del teorema de Painlevé y el de Liouville. En el caso de la función nula como salto, la solución es evidentemente la función nula. Supongamos que la solución es única y es la función nula para $k = r$. Consideremos el caso $k = r + 1$. Haciendo el cambio de variable $\Psi = D\Phi$, las últimas $k - 1$ condiciones de contorno forman un problema de salto nulo de orden r, el cual como habíamos supuesto tiene como única solución $\Psi = 0$, es decir, $D\Phi = 0$. Ahora, de la primera condición y de $D\Phi = 0$, resulta que $\Phi = 0$ porque este es precisamente el caso usual considerado en el inicio de inducción. ■

El siguiente teorema constituye una generalización del teorema de Liouville usual.

Corolario 2.2.1 *Sea f una función k-monogénica en todo $\mathbb{R}^{n+1}$, $k < n+1$, tal que $\hat{D}^m\Phi$ está acotado para todo $m \leqslant k - 1$. Entonces f es constante.*

Demostración. Sea Γ la esfera unitaria en $\mathbb{R}^{n+1}$ y u una función k-monogénica y acotada en $\mathbb{R}^{n+1}$. Entonces esta función en el infinito se reduce a una constante. Además es solución de un problema de salto nulo de orden k para la superficie Γ y la restricción de u a Γ. Como ya habíamos probado que la solución de este problema es única, entonces u es constante. ■

Observación 2.2.1 *Es natural preguntarse si se cumplirá o no que toda función bianalítica y en $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Gamma$ y continua en R^{n+1} es analítica en $\mathbb{R}^{n+1}$ (lo cual sería una posible generalización del teorema de Painlevé). La respuesta es que en general esto no se cumple. Como contraejemplo podemos tomar la función $\hat{C}_\Gamma^2 u - C_\Gamma u$ en el análisis complejo.*

Observación 2.2.2 *El producto de dos funciones bianalíticas no es en general una función bianalítica.*

Se cumple además el siguiente lema, el cual se deduce directamente al aplicar el operador de Cauchy-Riemann al producto de dos funciones bianalíticas.

Lema 2.2.1 *El producto de dos funciones bianalíticas en el análisis complejo es una función bianalítica si y solo si al menos una de ellas es bianalítica.*

Como hemos visto hasta aquí, el problema del salto para funciones polimonogénicas presenta particularidades esencialmente distintas al caso de las monogénicas. Sin embargo, muchos resultados encuentran generalizaciones naturales y un ejemplo de ello es el que presentamos en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Generalización del teorema de Plemelj-Privalov

En este capítulo se obtiene un teorema de tipo Plemelj-Privalov para las clases de Lipschitz con exponente mayor que uno. Este teorema constituye una generalización del teorema de Plemelj-Privalov clásico sobre la invariancia de las clases de Hölder con respecto al operador singular integral sobre superficies suaves.

Aquí y en lo adelante denotamos por c una constante positiva arbitraria. Usamos el hecho de que toda superficie suave es AD-regular. Denotamos por $B(x, r)$ una bola cerrada con centro x y radio r, $U(x, r)$ denota el interior de esta bola. Una superficie AD-regular Γ es aquella para la cual existe una constante positiva c tal que para toda bola $B(x, r)$

$$cr^n \leqslant \mathcal{H}^n(\Gamma \cap B(x, r)) \leqslant c^{-1} r^n, \ x \in \Gamma, \, 0 < r \leqslant d = diam(\Gamma) \tag{3.1}$$

Denotamos por $c(\Gamma)$ la mayor constante posible en 3.1. Para $z \in \Gamma$ introduzcamos además las notaciones

$$L(z, r_1, r_2) = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : r_1 \leqslant |y - z| \leqslant r_2\}$$

$$\lambda_z(r) = \mathcal{H}^n(\Gamma \cap L(z, r, 5r)).$$

Sea Ω el dominio abierto interior a Γ y $\Omega' = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \overline{\Omega}$. Consideremos el semianillo $\Delta = \Omega' \cap L(z, \, 2r \, 4r)$.

La demostración del teorema fundamental del presente capítulo se basa en el uso del siguiente lema que aparece en [1].

Lema 3.0.2 *Sea* $z \in \Gamma$, $0 < r < \frac{d}{2}$ *y* $0 < \epsilon < \frac{r}{4}$. *Entonces existen las regiones* S_0, S_1, ..., S_N *con* $\mathcal{H}^n(\partial S_q) < +\infty$ *las cuales satisfacen las siguientes propiedades.*

(a) *$S_i \cap S_j = \phi$ para $i \neq j$ y $\bigcup_{q=0}^{N} = \overline{\Delta}$.*

(b) *Para todo $y \in S_0$, $dist(y, \Gamma) > \epsilon$.*

(c) *Existen puntos $x_q \in \overline{S_q} \cap \Gamma$ tales que $S_q \subset B(x_q, 2\epsilon)$, $q = 1, ..., N$.*

(d) *Existe una constante c tal que*

$$\sum_{q=1}^{N} \mathcal{H}^n(\partial S_q) \leqslant c\lambda_z(r).$$

El aporte de este capítulo se concreta en el siguiente teorema.

Teorema 3.0.3 *Sea $\Gamma \in \mathbb{R}^{n+1}$ una superficie suave y cerrada, que acota un dominio Ω simplemente conexo, $u \in Lip(\gamma, \Gamma)$, $k < \gamma \leqslant k+1$, $k \leqslant n$. Entonces $\hat{C}_\Gamma^k u \in Lip(\gamma, \overline{\Omega})$.*

Demostración: Sea $z_0 \in \Omega$, $z \in \Omega \cap U(z_0, 2\delta)$. Haciendo uso de la fórmula de Borel-Pompeiu de orden k, tenemos que

$$C_\Gamma^k u(z) = \int_{\Omega'} E_k(\xi - z) D_\xi^{k+1} \widetilde{u}(\xi) d\xi, \tag{3.2}$$

donde $\Omega' = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \overline{\Omega}$ y $\widetilde{u}$ denota la extensión de Whitney de orden k de u. Consideremos el polinomio

$$P(z, z_0) = \sum_{|l| \leqslant k} \frac{\partial_{z_0}^{(l)} C_\Gamma^k u(z_0)}{l!} (z - z_0)^l. \tag{3.3}$$

Basta probar que

$$|C_\Gamma u(z) - P(z, z_0)| \leqslant c|z - z_0|^\gamma \tag{3.4}$$

y

$$|\partial_z^{(j)} C_\Gamma^k u(z) - P^{(j)}(z, z_0)| \leqslant c|z - z_0|^{\gamma - |j|}, \ \ |j| \leqslant k, \tag{3.5}$$

donde

$$P^{(j)}(z, z_0) = \sum_{|j+l| \leqslant k} \frac{\partial_{z_0} C_\Gamma^k u(z_0)}{l!} (z - z_0)^l. \tag{3.6}$$

Notemos que

$$\partial_{z_0}^{(l)} C_\Gamma^k u(z_0) = \partial_{z_0}^{(l)} \int_{\Omega'} E_k(\xi - z_0) D_\xi^{k+1} \widetilde{u}(\xi) d\xi = \int_{\Omega'} (\partial_{z_0}^{(l)} E_k(\xi - z_0)) D_\xi^{k+1} \widetilde{u}(\xi) d\xi. \tag{3.7}$$

Entonces

$$P(z,\, z_0) = \sum_{|l|\leqslant k} \frac{\partial_{z_0}^{(l)}(\int\limits_{\Omega'} E_k(\xi - z) D_\xi^{k+1}\widetilde{u}(\xi) d\xi)}{l!}(z - z_0)^l =$$

$$= \int\limits_{\Omega'} [\sum_{|l|\leqslant k} \frac{1}{l!} \partial_{z_0}^{(l) E_k(\xi - z))} l!(z - z_0)^l] D_\xi^{k+1}\widetilde{u}(\xi) d\xi.$$

$$= \int\limits_{\Omega'} Q(z,\, z_0) D_\xi^{k+1}\widetilde{u}(\xi) d\xi,$$

donde

$$Q(z,\, z_0) = \sum_{|l|\leqslant k} \frac{1}{l!} \partial_{z_0}^{(l) E_k(\xi - z))} l!(z - z_0)^l.$$

Luego

$$|\hat{C}_\Gamma^k u(z) - P(z,\, z_0)| = |\int\limits_{\Omega'} (E_k(\xi - z) - Q(z,\, z_0))| D_\xi^{k+1}\widetilde{u}(\xi) d\xi.$$

$$I = \int\limits_{\Omega'} (E_k(\xi - z) - Q(z,\, z_0))| D_\xi^{k+1}\widetilde{u}(\xi) d\xi.$$

Entonces $I = I_1 - I_2 + I_3$ donde

$$I_1 = \int\limits_{\Omega' \cap B(z_0,\, 2\delta)} E_k(\xi - z)| D_\xi^{k+1}\widetilde{u}(\xi) d\xi.$$

$$I_2 = \int\limits_{\Omega' \cap B(z_0,\, 2\delta)} Q(z,\, z_0)| D_\xi^{k+1}\widetilde{u}(\xi) d\xi.$$

$$I_3 = \int\limits_{\Omega' \setminus B(z_0,\, 2\delta)} (E_k(\xi - z) - Q(z,\, z_0))| D_\xi^{k+1}\widetilde{u}(\xi) d\xi.$$

Ahora procedemos a acotar $|I_1|$. Si $dist(z_0,\, \Gamma) \geqslant 2\delta$ entonces $I_1 = 0$. Por eso, asumiremos que $dist(z_0,\, \Gamma) < 2\delta$. Consideremos los semianillos

$$\Delta_m = (\hat{z},\, 2^{-m}\delta,\, 2^{-m+1}\delta),\ m = -2,\, -1,\, 0,\, 1, ... \tag{3.8}$$

donde $\hat{z}$ es un punto de Γ tal que $|z-\hat{z}| = dist(z,\,\Gamma)$. Entonces $I_1 = \sum\limits_m I_{1,m}$, donde

$$|I_{1,m}| = |\int\limits_{\Delta_m \cap U(z_0,\,2\delta)} E_k(\xi - z) D_\xi^{k+1}\widetilde{u}(\xi) d\xi| \leqslant c \int\limits_{\Delta_m \cap U(z_0,\,2\delta)} \frac{1}{|\xi - z|^n} dist(\xi,\,\Gamma)^{\gamma-1} |d\xi|. \tag{3.9}$$

Sean S_q, $j = 1,\,2,\,\ldots N$ las regiones correspondientes a Δ_m con $r = 2^{-m-1}\delta$, $\epsilon = \frac{C(\Gamma)}{2^{n+2}} \cdot \frac{r^{n+1}}{\lambda_{\hat{z}}(r)}$. Luego $I_{1,m} = \sum\limits_q I_{1,\,m,\,q}$, donde

$$I_{1,m,q} = \int\limits_{S_q \cap U(z_0,\,2\delta)} E_k(\xi - z) D_\xi^{k+1}\widetilde{u}(\xi).$$

Para acotar $|I_{1,\,m\,0}|$, notemos que para $\xi \in S_0$ se cumple que $\epsilon < dist(\xi,\,\Gamma)$. Por otro lado, $|\xi - z| \geqslant \frac{1}{2}|\xi - \hat{(z)}|$ y $|\xi - \hat{z}| \geqslant r$. Consecuentemente,

$$|E_k(\xi - z)| \leqslant c \cdot \frac{1}{|\xi - z|^{n-k}} \leqslant c \cdot \frac{2^n}{r^n}.$$

Haciendo uso de la desigualdad (véase [13])

$$|D^{k+1}\widetilde{u}(\xi)| \leqslant c dist(\xi,\,\Gamma)^{\gamma-k-1}$$

resulta

$$|I_{1,m,0}| \leqslant c \int\limits_{S_0 \cap U(z_0,\,2\delta)} \frac{|D^{k+1}\widetilde{u}(\xi)|}{|\xi - z|^{n-k}} \leqslant$$

$$\leqslant c \int\limits_{S_0 \cap U(z_0,\,2\delta)} \frac{dist(\xi,\,\gamma)^{\gamma-k-1}}{r^{n-k}} |d\xi| \leqslant c \int\limits_{S_0 \cap U(z_0,\,2\delta)} \frac{\epsilon^{\gamma-k-1}}{r^{n-k}} |d\xi| \leqslant$$

$$\leqslant c \frac{r^{\gamma-k-1}}{r^{n-k}} r^{n+1} = c\, r^\gamma,$$

ya que, en virtud de la AD-regularidad de Γ se tiene que $\lambda_{\hat{z}}(r) \leqslant cr^\gamma$ y $c_1 r \leqslant \epsilon \leqslant c_2 r$.

Sea $\xi^* \in S_q \cap U(z_0,\,2\delta)$ y $T(\xi, \xi^*)$ el polinomio de Taylor de orden k centrado en ξ^* de la función $\widetilde{u}$ vista como función de n variables reales. Como $z \notin \Omega'$ y es evidente que el polinomio T de grado k es $(k+1)$-monogénico, por la fórmula de Borel-Pompeiu de orden k se tiene que

$$I_{1,m,q} = \int\limits_{\partial(S_q \cap U(z_0,\,2\delta))} E_k(\xi - z) n(\xi) D_\xi^k(\widetilde{u}(\xi) - T(\xi, \xi^*)) d\mathcal{H}^n(\xi).$$

Como $\widetilde{u} \in Lip(\gamma,\, \mathbb{R}^n)$, el polinomio $T(\xi, \xi^*)$ coincide con el polinomio de tipo Stein de orden k correspondiente a $\widetilde{u}$, la cual tiene derivadas parciales hasta orden k en $\mathbb{R}^n$ (véase [13]). Además,

$$|D_\xi^k(\widetilde{u}(\xi) - T(\xi, \xi^*))| \leqslant c|\xi - \xi^*|^{\gamma-k} \leqslant cr^{\gamma-k}.$$

Luego,

$$|I_{1,m,q}| \leqslant c \int\limits_{\partial(S_q \cap U(z_0,\,2\delta))} \frac{|D_\xi^k(\widetilde{u}(\xi) - T(\xi, \xi^*))|}{|\xi - z|^{n-k}} d\mathcal{H}^n(\xi) \leqslant cr^{\gamma-n} \int\limits_{\partial(S_q \cap U(z_0,\,2\delta))} d\mathcal{H}^n(\xi).$$

$$\sum_{j=1}^{N} |I_{1,m,q}| \leqslant cr^{n-\gamma} \sum_{j=1}^{N} |\int\limits_{\partial(S_q \cap U(z_0,\,2\delta))} d\mathcal{H}^n(\xi)|.$$

Luego,

$$|I_{1,m}| \leqslant c_1 r^\gamma + r^{\gamma-n}(\sum_{j=1}^{N} \mathcal{H}^n(\partial S_q) + 2\mathcal{H}^n(\Delta_m \cap \partial U(z_0, 2\delta))) \leqslant$$

$$\leqslant c_1 r^\gamma + c_2 r^\gamma \leqslant cr^\gamma \leqslant c(2^{-m-1}\delta).$$

$$|I_1| \leqslant c \sum_{m=-2}^{\infty} (2^{-m\delta})^\gamma \leqslant c\delta^\gamma.$$

La acotación de $|I_2|$ se realiza por un procedimiento similar al que se usó para para acotar $|I_1|$.

$$I_2 = \int\limits_{\Omega' \cap U(z_0,\,2\delta)} Q(z,\, z_0,\, \xi) D_\xi^{k+1} \widetilde{u}(\xi) d\xi.$$

Ahora procedemos a acotar $|I_2|$. Si $dist(z_0,\, \Gamma) \geqslant 2\delta$ entonces $I_2 = 0$. Por eso, asumiremos que $dist(z_0,\, \Gamma) < 2\delta$. Consideremos los semianillos

$$\Delta'_m = (\hat{z_0},\, 2^{-m}\delta,\, 2^{-m+1}\delta),\; m = -2,\, -1,\, 0,\, 1, ... \tag{3.10}$$

Evidentemente

$$I_2 = \sum_m I_{2,m}$$

donde

$$I_{2,m} = \int\limits_{\Delta'_m \cap U(z_0,\,2\delta)} d\xi.$$

Sean S_q, $j = 1, 2, \ldots N$ las regiones correspondientes a Δ_m con $r = 2^{-m-1}\delta$, $\epsilon = \frac{C(\Gamma)}{2^{n+2}} \cdot \frac{r^{n+1}}{\lambda_{\hat{z}}(r)}$. Luego $I_{2,\,m} = \sum\limits_q I_{1,\,m,\,q}$, donde

$$I_{2,m,q} = \int\limits_{S_q \cap U(z_0,\, 2\delta)} Q(z\, z_0,\, \xi) D_\xi^{k+1} \widetilde{u}(\xi).$$

Primeramente acotaremos $I_{2,\,m\,0}$. Notemos que para $\xi \in S_0$ se cumple que $\epsilon < dist(\xi,\, \Gamma)$. Por otro lado, $|\xi - z_0| \geqslant \frac{1}{2}|\xi - \hat{(}z_0)|$ y $|\xi - \hat{z_0}| \geqslant r$. Además,

$$Q(z,\, z_0,\, \xi) = \sum_{|l| \leqslant k} \frac{1}{l!} \partial_{z_0}^{(l)} E_k(\xi - z_0)(z - z_0)^l = \sum_{|k| \leqslant l} Q_l(z, z_0, \xi)$$

$$|\partial_{z_0}^{(l)} E_k(\xi - z_0)| \leqslant c \cdot \frac{1}{|\xi - z_0|^{n-k+|l|}} \leqslant c \cdot \frac{2^n}{r^{n-k+|l|}}$$

$$|z - z_0|^l \leqslant c|z - z_0|^{|l|} \leqslant c\delta^{|l|}.$$

Por otro lado, tenemos que

$$|D_\xi^{k+1} \widetilde{u}(xi)| \leqslant c dist(\xi, \Gamma)^{\gamma-k-1}$$

Sea

$$I_{2,m,0,l} = \int\limits_{S_0 \cap U(z_0,\, 2\delta)} Q_l(z, z_0, \xi) D_\xi^{k+1} u(\xi) d\xi.$$

Entonces

$$I_{2,m,0} = \sum_{|l| \leqslant k} I_{2,m,0,l}$$

$$|I_{2,m,0,l}| \leqslant c \int\limits_{S_0 \cap U(z_0,\, 2\delta)} \frac{|D_\xi^{k+1} \widetilde{u}(\xi)| \delta^{|l|}}{|\xi - z_0|^{n-k+|l|}} \leqslant$$

$$\leqslant c\delta^l \int\limits_{S_0 \cap U(z_0,\, 2\delta)} r^{\gamma-n-1-|l|} |d\xi| \leqslant c\delta^{|l|} r^{\gamma-|l|}.$$

$$|I_{2,m,0}| \leqslant c \sum_{|l| \leqslant k} \delta^{|l|} r^{\gamma-|l|}.$$

Acotemos ahora $|I_{2,m,q}|$, $q = 1, 2, \ldots, N$ por el mismo procedimiento usado para acotar $|I_{1,m,q}|$. Usando la fórmula de Gauss clifforddiana,

$$I_{2,m,q} = \sum_{s=0}^{k} \int\limits_{\partial(S_q \cap U(z_0,\, 2\delta))} [Q(z, z_0, \xi) D_\xi^s] n(\xi) D_\xi^{k-s} (\widetilde{u}(\xi) - T(\xi, \xi^*)) d\mathcal{H}^n(\xi).$$

$$|Q_l(z,z_0,\xi)D_\xi^s| \leqslant c\frac{\delta^{|l|}}{r^{n-k+|l|+s}}.$$
$$|I_{2,m,q}| \leqslant c\sum_{|l|\leqslant k}\delta^{|l|}r^{\gamma-|l|-n}\mathcal{H}^n(\partial(S_q\cap U(z_0,\,2\delta))).$$

$$\sum_{q=1}^{N}|I_{2,m,q}| \leqslant c\sum_{|l|\leqslant k}\delta^{|l|}r^{\gamma-|l|-n}\sum_{q=1}^{N}\mathcal{H}^n(\partial(S_q\cap U(z_0,\,2\delta))).$$

Luego,
$$|I_{2,m}| \leqslant c\sum_{|l|\leqslant k}\delta^{|l|}r^{\gamma-|l|} \leqslant c\delta^{|l|}2^{-m-1}\delta^{\gamma-|l|}.$$

Por tanto $|I_2| \leqslant c\delta^\gamma$. La acotación de $|I_3|$ se realiza repitiendo el mismo procedimiento usado para acotar $|I_2|$, teniendo en cuenta el hecho de que para $\xi\in\Omega'\setminus U(z_0,\,2\delta)$ se cumple que $|\xi-z|\geqslant\frac{1}{2}|\xi-\hat{z}|$ y $|\xi-z_0|\geqslant\frac{2}{5}|\xi-\hat{z}|$.

Finalmente resulta $|I_3| \leqslant c\sum\limits_{m=m_1}^{-2}(2^{-m-1}\delta)^\gamma$ donde $m_1<0$, siendo m_1 el mayor entero negativo tal que $2^{-m_1-1}\geqslant 2diam(\Gamma$, de donde resulta $|I_3|\leqslant c\delta^\gamma$. Por tanto $|I|\leqslant c\delta^\gamma$.

La acotación 3.5 se obtiene por el mismo procedimeinto seguido para la acotación de I, teniendo en cuenta que ahora la derivación de multíndice j con respecto a z implica que en las acotaciones obtenidas para el módulo de cada integral el exponente disminuye en $|j|$. Por eso resulta $\delta^{\gamma-|j|}$ en lugar de δ^γ. Y con esto quedan probadas las desigualdades deseadas. Luego, teniendo en cuenta el hecho de que sobre superficies suaves la transformada de Cauchy de orden k de una función de Lipschitz con exponente γ, $k<\gamma\leqslant k+1$, tiene valores límites continuos hasta la frontera, resulta que $\hat{C}_\Gamma^k u\in Lip(\gamma,\,\overline{\Omega})$. ■

Como consecuencia inmediata de este teorema, en virtud de la relación entre la transformada de Cauchy y la de Hilbert de orden k, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 3.0.2 *Sea* $\Gamma\in\mathbb{R}^{n+1}$ *una superficie suave y cerrada, que acota un dominio* Ω *simplemente conexo,* $u\in Lip(\gamma,\,\Gamma)$*,* $k<\gamma\leqslant k+1$*,* $k\leqslant n$*. Entonces* $\hat{H}_\Gamma^k u\in Lip(\gamma,\,\Gamma)$*.*

Conclusiones

- Se obtiene un teorema de tipo Plemelj-Privalov para funciones de Lipschitz con exponente mayor que uno, para superficies suaves en $\mathbb{R}^n$.
- Se obtiene una generalización del teorema de Liouville para funciones polimonogénicas.
- Se obtienen condiciones para la solubilidad y unicidad de la solución del problema del salto para funciones polimonogénicas.

Recomendaciones

Generalizar los resultados de la tesis para el caso de superficies AD-regulares a la izquierda.

Bibliografía

[1] R. Abreu, J. Bory, T. Moreno, Cauchy transform on non-rectifiable surfaces in Clifford Analysis, J. Math. Anal. Appl. 339 (2008) 31-44.

[2] R. Abreu Blaya; J. Bory Reyes. On the Riemann Hilbert Type Problems in Clifford Analysis. Adv. Appl. Clifford álgebras, Vol. 11, No. 1, 15-26, 2001.

[3] H. Begehr. Integral representations in complex, hypercomplex and Clifford analysis. Integral transforms and special functions, 2002, Vol. 13, pp. 223-241.

[4] Bersntein, S. The quaternionic Riemann problem, 1991.

[5] H. Begehr. Integral representations in complex, hypercomplex and Clifford analysis. Integral transforms and special functions, 2002, Vol. 13, pp. 223-241.

[6] E. Dyn'kin, On the smoothness of integrals of Cauchy type, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad Otdel. Mat. Inst. Steklov (LOMI) 92 (1979) 115-133.

[7] Gájov, F. D. Problemas de contorno, 1980.

[8] K. Gürlebeck, W. Sprössig, K. Habetha. Holomorphic functions in the plane and n-dimensional space. Berlín, 2008.

[9] K. Gürlebeck, W. Sprössig. Quaternionic and Clifford calculus for physicists and engineers, 1997.

[10] L. D. Kudriávtsev. Curso de Análisis Matemático. Tomo 2. Mir Moscú, 1984.

[11] N. Piskunov. Cálculo diferencial e integral. Tomo I. Mir Moscú, 1973.

[12] Prössdorf, Siegfried. Some classes of singular equations, 1978.

[13] Elias M. Stein. Singular integrals and differentiability properties of functions. Pricenton University Press. Pricenton, New Jersey, 1970.

[14] J. Stoer, R. Bulirsch. Introduction to numerical analysis. Springer-Verlag. Berlín Heidelberg, 1976.

[15] C. Vallée Poussin. On the approximation of functions of a real variable and on quasi-analytic functions, A course of three lectures. Rice Institute Pamphlet, Vol. 12, No. 2, Abril 1925.

[16] Vu Thi Ngoc Ha. Helmholtz Operator in Quaternionic Analysis. Tesis doctoral. Viet-Nam, 2005.