

Tareas docentes para contribuir a desarrollar la habilidad resolver problemas matemáticos

Teaching tasks to contribute to the development of the ability to solve mathematical problems

Tarefas de ensino para ajudar a desenvolver a capacidade de resolver problemas matemáticos

*Alexandra González-Aballe

**Yunier Felicó-Mederos

***Yaitma Cedeño-Hernández

*Universidad de Holguín. Cuba. Licenciada en Educación en la especialidad Matemática y Computación. Máster en Ciencia de la Educación. Profesor Asistente. agonzaleza@uho.edu.cu, <https://orcid.org/0000-0002-3179-8225>

**DESOFIT Holguín. Cuba. Ingeniero en Ciencias Informáticas. Profesor Instructor. yfelico@nauta.cu, <https://orcid.org/0000-0002-5857-5371>,

***Universidad de Holguín. Cuba. Licenciada en Educación en la especialidad Matemática y Computación. Profesor Asistente. ycedenoh@uho.edu.cu, <https://orcid.org/0000-0003-1438-4060>

Resumen

Este artículo es el resultado de una tesis de Maestría. Ofrece algunas precisiones que se deben tener en cuenta a la hora de elaborar y resolver problemas matemáticos en aras de lograr el desarrollo de esta habilidad en los estudiantes, atendiendo a sus potencialidades y barreras en el aprendizaje. Así como un ejemplo de tarea docente graduada por niveles de desempeño cognitivo que posibilita el paso de un nivel a otro de los estudiantes. Este forma parte de un sistema de tareas docentes que fue validado a través de la aplicación de una pre-prueba y una pos-prueba aplicada a un grupo de duodécimo grado, seleccionado de manera aleatoria. Los resultados obtenidos evidencian su factibilidad.

Palabras clave: tareas docentes; problemas matemáticos; aprendizaje

Abstract

This article is the result of a Master's degree thesis. It offers some details that must be taken into account when elaborating and solving mathematical problems in order to achieve the development of this ability in students, taking into account their potentialities and hindrances in learning. It also offers an example of teaching task, graded by levels of cognitive performance, which makes it possible for the students to pass from one level to another. This example is part of a system of teaching tasks, which was validated through the application of a pre-test and a post-test applied to a sample from twelfth grade, selected at random. The results obtained indicate the feasibility of the teaching tasks.

Key words: teaching tasks; mathematical problems; learning

Resumo

Este artigo é resultado de uma dissertação de mestrado. Oferece alguns detalhes que devem ser levados em consideração no desenvolvimento e solução de problemas matemáticos para que se atinja o desenvolvimento dessa habilidade nos alunos, levando em consideração suas potencialidades e barreiras à aprendizagem. Bem como um exemplo de uma tarefa de ensino

Tareas docentes para contribuir a desarrollar la habilidad resolver problemas matemáticos/Teaching Tasks to Help to Develop the Ability to Solve Mathematical Problems/Tarefas de ensino para ajudar a desenvolver a capacidade de resolver problemas matemáticos

graduada por níveis de desempenho cognitivo que permite aos alunos passar de um nível para outro. O estudo faz parte de um sistema de tarefas didáticas que foi validado por meio da aplicação de um pré-teste e de um pós-teste aplicado a uma turma do 12º ano, selecionada aleatoriamente. Os resultados obtidos mostram a viabilidade das tarefas de ensino.

Palavras-chave: tarefas de ensino; problemas de matemática; aprendendo

Introducción

La Matemática juega un papel importante en todas las esferas de la vida, por lo que invadió así todos los campos del saber de la humanidad. Rodríguez Rodríguez, García Pimentel y Lozano Jiménez (2015) afirman que: “La Matemática, por sus características y posibilidades educativas, puede contribuir a satisfacer las demandas de preparación del hombre para su inserción en el mundo contemporáneo. A los docentes e investigadores se les plantea como problemática universal la de encontrar vías que garanticen un adecuado aprendizaje de las Matemáticas que les permita a las generaciones venideras enfrentar los retos y resolver los múltiples problemas a los que tendrán que buscar soluciones” (p.101).

Dentro de la Matemática, la resolución de problemas resulta uno de los puntos más discutidos en el mundo, se considera una actividad de gran importancia en todo tipo de enseñanza. Esta actividad caracteriza una de las conductas más inteligentes del hombre y que más utilidad tiene, ya que la vida misma obliga a resolver problemas continuamente y esto exige de un esfuerzo mental del sujeto en un plano más profundo, así como una mayor riqueza en el tránsito de lo general a lo particular.

El matemático más conocido que sostuvo esta idea de la actividad matemática fue Polya. Nos hemos familiarizado con su trabajo a través del libro “How to Solve It” (1954), en el cual sistematizó el concepto de “heurística” para describir el arte de la resolución de problemas, idea que desarrolló luego en “Matemática y Razonamiento Plausible” (1957) y en “Mathematical Discovery” (1981).

Su obra ha sido reflejada por otros autores en diferentes modelos que le han sucedido, en el caso particular de los problemas aritméticos, Puig, L. y Cerdán, F. (1995) enfatizan en el tratamiento de la comprensión, opinan que, en las primeras etapas de resolución, debe ponerse especial atención en la lectura del problema, (Fillooy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008) exploran cuestiones relacionadas con el uso del lenguaje algebraico y su relación con otras formas de expresarlas, tienen en cuenta el trabajo con relaciones y expresiones algebraicas, la imaginación y la resolución de problemas.

Schoenfeld, A. (1992), expresa que un ambiente de resolución de problemas favorece el aprendizaje de las matemáticas. En este sentido Salinas y Sgreccia, (2017) plantean que: “La Resolución de problemas permite la construcción de conocimientos matemáticos, ya que requiere que los alumnos interpreten el texto de la situación propuesta, presentada en varios registros, identifiquen relaciones, propiedades, datos

e incógnitas, lo vinculen con sus conocimientos previos, elijan la estrategia de resolución más adecuada para la situación problemática planteada, realicen su resolución, analicen la solución y, lo que es también muy importante, efectúen su transferencia a problemas similares, no solo del ámbito matemático sino también para otras disciplinas y para la vida diaria” (p.23).

Varias son las definiciones que existen en relación a los problemas matemáticos, pero todas tienen en común que consideran a los problemas como una situación desconocida que necesita ser resuelta. (López, Guerrero, Carrillo, y Contreras, 2015)

Por su parte Blanco Nieto, Cárdenas Lizarazo y Caballero Carrasco (2015) expresan que: “En un primer acercamiento, podríamos señalar la existencia de un problema cuando hay una tarea a realizar que nos genera dudas en la manera de abordarla y/o solucionarla. En otros términos, podríamos asumir que un problema requiere de una situación que provoca incertidumbre y de una actitud de búsqueda de algún objetivo, explícito o implícito. En la vida cotidiana decimos “tengo un problema” cuando tenemos dudas sobre la manera de proceder ante una situación que nos preocupa” (p.81).

En Cuba muchos matemáticos han investigado sobre el tema. Por ejemplo, Labarrere (1996) indagó acerca de la psicología de la resolución de los problemas, Campistrous Pérez y Rizo Cabrera (1996) desarrollaron un estudio sobre los métodos para resolver problemas aritméticos, Cruz Ramírez (2002) realizó su tesis doctoral sobre la elaboración de problemas, Pérez Ariza y Hernández Sánchez (2015) explican la implicación de la comprensión textual en la solución de problemas matemáticos, desde los postulados de la Didáctica Desarrolladora, San Juan Azze y Gombiwa Alfredo (2018) exponen la esencia del método de estimulación de la comprensión-reflexión en situaciones interactivas para potenciar la enseñanza de la resolución de problemas durante las clases de Didáctica de la Matemática, Calderón Zamora, Alonso Betancourt y Cedeño Mejía (2018) ofrecen algunas consideraciones teóricas sobre el tratamiento a la enseñanza problémica en la formación inicial del ingeniero en Comercio Exterior, Sánchez García, Alonso Betancourt y Infante Ricardo (2019) brindan sugerencias metodológicas para resolver problemas que estimulan el desarrollo de cualidades laborales en los estudiantes de Técnico Medio en Contabilidad, Palacio, J. (2003) brinda una colección de problemas matemáticos para la vida.

A pesar de estas y otras investigaciones que se han realizado sobre la resolución de problemas matemáticos, se siguen observando dificultades en la misma por parte de los alumnos en la Enseñanza Media Superior y más específicamente en el duodécimo grado.

Atendiendo a lo anterior, aplicamos una prueba pedagógica a un grupo de estudiantes de este grado, con el objetivo de comprobar el estado actual de la habilidad para resolver problemas matemáticos.

Llama la atención que solo el 26,6% de los estudiantes alcanzó la categoría de aprobado. De forma general el estudiante no posee la suficiente preparación para enfrentarse a un problema. En general, no pone los conocimientos que posee en función de lo que se le plantea en el texto, no logra expresar lo que piensa, es decir, no sabe representar esquemáticamente sus ideas a la hora de darle solución a un problema.

Este estudio se complementó con una entrevista y una encuesta aplicada a profesores de experiencia en la materia y la realización de observaciones dirigidas al proceso de enseñanza aprendizaje. Estos instrumentos evidenciaron la necesidad de trabajar en los estudiantes con más frecuencia la resolución de problemas matemáticos, considerando la óptima preparación de los educadores en la materia (sean especialistas o no).

Los profesores plantean la necesidad de perfeccionar las actividades metodológicas, proponen desarrollar talleres y clases por profesores de experiencia. Particularmente, consideran necesario profundizar en el proceso de resolución, en el programa heurístico general, en la graduación del nivel de dificultad y en el aseguramiento de las condiciones previas. Por otra parte, algunos plantearon la necesidad de enriquecer la bibliografía, y de dedicarle mayor tiempo en el currículo matemático.

Un criterio general gira en torno a perfeccionar las tareas docentes, de manera que se reflejen diferentes métodos y estrategias para enseñar a resolver problemas matemáticos. También es necesario perfeccionar la forma de organización del trabajo en las clases.

Teniendo en cuenta estos criterios y los resultados del diagnóstico aplicado, nos trazamos el objetivo de elaborar una propuesta de tareas docentes graduada por niveles de desempeño cognitivo para contribuir a desarrollar la habilidad resolver problemas matemáticos en el duodécimo grado.

En relación a las tareas docentes, estas se presentan en determinado orden, el cual está dado por la lógica del proceso y no por circunstancias casuales, esto garantiza la continuidad del mismo, su dinámica, que consiste en que la contradicción se traslada de tarea en tarea, hasta lograr el objetivo propuesto en cada tema.

Se asume, después de realizar algunas consideraciones, la definición dada por Domínguez Aldana y Pérez Borrego (2019) los cuales definen las tareas docentes como un espacio de interacción activa donde el

docente organiza situaciones de aprendizaje desde una perspectiva desarrolladora a partir de las potencialidades que ofrece el proceso de enseñanza- aprendizaje.

Según Sampedro Ruiz, da Costa Fernando y Sandalawa (2014) en la solución de las tareas docentes se debe tener en cuenta el aspecto psicológico, partiendo de la necesidad de que reflejen procedimientos racionales de la actividad mental. En la realización de la tarea debe existir contradicción entre lo conocido y lo desconocido, para que el alumno sienta la necesidad de encontrar la solución. Cada una de ellas se determina por los objetivos de la enseñanza, por el carácter del contenido y por las condiciones materiales en que se realiza.

Desde esta perspectiva, puede comprenderse que un problema matemático es un tipo especial de tarea docente.

Para facilitar la elaboración y comprensión de las tareas, es recomendable también clasificarlas. Existen, a decir de la bibliografía consultada, diferentes clasificaciones. Se asume, después de realizar algunas consideraciones, la clasificación dada por Garcés (1997) el cual tuvo en cuenta la función que desempeñan dentro del proceso de enseñanza aprendizaje y el nivel de asimilación, lo cual satisface las expectativas de este trabajo. Esta clasificación es como sigue:

Tareas de preparación: Dentro de estas se consideran aquellas que, por su contenido y función, van a crear la base conceptual necesaria para enfrentar con éxito la formación del nuevo concepto, así como ayudan a determinar las preconcepciones de los estudiantes.

Tareas de formación: Dentro de este tipo se contemplan las que están dirigidas a obtener los rasgos esenciales que caracterizan los elementos que pertenecen a la clase. Estas tareas permiten llegar a la definición del concepto, así como a la determinación de qué elementos pertenecen o no a la clase, o qué elementos, bajo determinadas condiciones, pueden o no pertenecer a ella. En este tipo de tareas también se incluyen aquellas que plantean la construcción de ejemplos o contra ejemplos que no sobrepasen el nivel de dificultad media.

Tareas de desarrollo: En este grupo están incluidas aquellas dirigidas a establecer relaciones entre conceptos y a demostrar la validez de estas relaciones. Se incluye, también, tareas que completen un subsistema, para la formación de conceptos subordinados o conceptos colaterales.

Al tener en cuenta esta clasificación la investigación considera posible identificar también tres tipos de problemas matemáticos: los de preparación, los de formación y los de desarrollo. Los cuales se tienen en cuenta a la hora de estructurar las tareas.

En la medida en que las exigencias de las tareas docentes son gradualmente más complejas, y el estudiante es capaz de resolverlas, se incrementan los efectos de la estimulación intelectual de este en la actividad docente.

Materiales y métodos

Desde el punto de vista teórico se emplearon los siguientes métodos:

Análisis – síntesis: estuvo presente en toda la investigación, pues sirvió para procesar la información arrojada por el instrumental diagnóstico, para delimitar y fundamentar los presupuestos teóricos, para elaborar las tareas docentes correspondientes y para sacar conclusiones de la pertinencia de estas. Este método también contribuyó a la formulación de criterios para evaluar la factibilidad de la misma.

Desde el nivel empírico se trataron:

Encuesta y entrevista: Para buscar información sobre la preparación actual y las principales dificultades que, en materia de la resolución de problemas matemáticos tienen los estudiantes.

Prueba pedagógica: Para conocer el nivel de desempeño de los estudiantes cuando se llevó a cabo el estudio diagnóstico de la problemática estudiada y corroborar, con ello, las dificultades existentes. Este método también se utilizó para la validación de la propuesta.

Observación: Para analizar el desarrollo del desempeño de los estudiantes antes y durante la aplicación de las tareas docente.

Se realizó además, la consulta de libros de textos, programas y otros documentos normativos del Ministerio de Educación MINED.

Resultados y discusión

Teniendo en cuenta que el duodécimo grado constituye la etapa del preuniversitario donde los alumnos, además de aprender nuevos contenidos matemáticos, consolidan y sistematizan los adquiridos en grados precedentes, se realiza un análisis de todos los libros y programas actuales de la Enseñanza Media y la Enseñanza Media Superior, para conocer los principales contenidos relacionados con la resolución de problemas matemáticos en los grados precedentes.

Una vez realizado este análisis, podemos decir que los problemas matemáticos se desarrollan en el más variado contexto de la vida, la sociedad, la naturaleza, la ciencia, etc. Algunos de estos contextos conducen a modelos similares que los docentes aprovechan para el establecimiento de modos de actuación estables de los estudiantes en el proceso de traducción, estos son los que relacionan:

1. Ecuaciones y sistemas de ecuaciones
2. Concepto de tanto por ciento
3. Conceptos geométricos
4. Móviles
5. Proporcionalidad directa e inversa
6. Tanques
7. Mezcla

Estos modos de actuación resultan de gran utilidad a la hora de elaborar las tareas docentes. Se realizan siete tareas docentes, una para cada modo de actuación, cada una de ellas tiene un problema matemático de preparación, uno de aplicación y uno de desarrollo, teniendo en cuenta la clasificación dada por (Garcés, 1997), para un total de veintiún problemas, integrados en un sistema de tareas docentes, que se puso a disposición de los profesores que imparten la asignatura Matemática en duodécimo grado.

A las tareas docentes se le debe prestar gran atención según criterio de los autores, a partir de:

- a. Que permitan el enriquecimiento del aprendizaje de los estudiantes.
- b. Permitan una consolidación de los elementos del conocimiento precedentes con los contenidos de las materias a estudiar y su multiplicación.
- c. Su aplicación permita la consolidación y utilización de sus redes de interacción.

Requerimientos para la elaboración de las tareas docentes:

- Garantizar que los problemas estén contextualizados,
- que motiven a los estudiantes,
- que estén graduados por niveles de desempeño cognitivo,
- y que estén las condiciones previas para su resolución.

El profesor debe ser muy cuidadoso a la hora de seleccionar, transformar o elaborar estos tipos de problemas, estos procesos se deben realizar de tal manera que se logre un mayor vínculo con la vida. En este sentido Malaspina Jurado (2016) plantea que: “Muchas de las tareas que se proponen para desarrollar y evaluar las competencias matemáticas de los estudiantes se basan en problemas de matemáticas. Esta es una razón más para que los profesores no sólo sean buenos resolviendo problemas, sino que tengan capacidades de seleccionarlos, modificarlos y crearlos con propósitos didácticos” (p.324).

Para garantizar la contextualización de un problema es necesario tener en cuenta un grupo numeroso de elementos. Sin embargo, la mayoría de los autores coinciden en el hecho de que esta contextualización parte del acercamiento del problema a la vida, y en especial al medio que le es familiar al estudiante. La selección de los ejercicios requiere de una amplia cultura del maestro. No es posible seleccionar de un solo libro, sino de varios enmarcados en diferentes épocas. Libros como el Álgebra Elemental de (Baldor, 1945), escrito en la primera mitad del siglo pasado, y todavía es muy útil en la educación pre universitaria. Asimismo es posible hacer uso de literatura moderna como La Contextualización de Problemas Matemáticos de (Palacio, 2003), obra que puede servir de referencia, con relación a la diferencia que existe entre un problema ordinario y otro contextualizado.

Otro aspecto importante lo constituye la motivación que puede generar el problema con texto. La contextualización adecuadamente concebida puede servir para motivar la resolución del problema. Los problemas matemáticos deben ajustarse a los objetivos del aprendizaje; su elaboración debe ser hecha de tal modo que al encontrar la solución signifique la adquisición del aprendizaje, o bien el logro de un conocimiento relevante. Existe la necesidad de conducir la actividad de tal modo que, en términos ideales, todos los alumnos puedan encontrar la solución del problema. Estos deben ser propuestos cuando estén aseguradas las condiciones previas; de esta manera los estudiantes tendrán la oportunidad de aplicar los conocimientos adquiridos, en un final lo que se pretende es que lleguen a la solución.

Requerimientos para la instrumentación de las tareas docentes:

- Tener en cuenta los pasos generales para la resolución de un problema con texto.
- Desarrollar el espíritu crítico con relación al problema.

La mayoría de los problemas matemáticos pueden ser analizados por etapas de resolución. Esto puede ser sumamente útil para los maestros. Polya (1954) considera cuatro fases para la resolución de un problema:

1. Comprensión del problema.
2. Concepción de un plan.
3. Ejecución del plan.
4. Visión retrospectiva.

Las etapas (1) y (2) son fundamentales. Esto se debe a la existencia de dos momentos esenciales: traducción y resolución del modelo obtenido. Algunos profesores han tratado de resolver los problemas de aprendizaje que se dan en el paso del lenguaje común al matemático, haciendo uso de las "palabras claves". Sería poco consecuente con el enfoque dialéctico-materialista plantear que esto es incorrecto. Un uso adecuado de estos recursos puede ser muy útil, de la misma manera que son útiles los recursos nemotécnicos. Lo incorrecto es hacer de las palabras claves una práctica sistemática, lo cual conduce a una enseñanza tradicionalista y conductista.

Es muy importante que se explique detalladamente el significado matemático de "el doble de", "la tercera parte de", "aumentado en", etcétera. También es necesario que los estudiantes se convengan de que existen múltiples formas de expresar una misma relación, a partir de la riqueza del lenguaje. Esto rompe con la idea absurda de abusar del uso sistemático de las mismas complicaciones lógico-lingüísticas en los textos de diversos problemas.

Respecto a la concepción del plan, puede decirse que esta etapa ocurre solo después de que el problema ha sido comprendido. Si la etapa de comprensión no ha llegado a feliz término, es necesario volver a leer, construir un esquema, abstraerse de la información innecesaria, identificar conectares lógicos. La concepción del plan guarda mucha relación con la experiencia que ya el estudiante tiene. Estos se aprenden a resolver con una práctica sistemática. De esta manera, el alumno pone a funcionar recursos de extraordinario valor como el uso de analogías, la reducción de un problema a otro ya resuelto, la resolución de uno más sencillo.

La concepción del plan también se interrelaciona dialécticamente con el proceso de ejecución. Es muy difícil que los estudiantes planifiquen su actividad completamente antes de trabajar en el problema. En realidad, ambos procesos se dan de manera interrelacionada y dinámica. En esta actividad se ponen de manifiesto los conocimientos y habilidades del alumno. Particularmente, la implementación de

estrategias de trabajo (razonamiento hacia adelante, hacia atrás y combinados) y la aplicación de diferentes técnicas pueden servir de mucho durante la resolución.

Campistrous Pérez y Rizo Cabrera (1996) consideran diferentes técnicas de resolución de problemas matemáticos, especialmente los aritméticos. A continuación se exponen cinco de las principales técnicas, las cuales pueden ser aplicadas por los estudiantes.

1. Técnica de la modelación.
2. Técnica de la lectura analítica y la reformulación.
3. Técnica de la determinación de problemas auxiliares.
4. Técnica del tanteo inteligente.
5. Técnica de la comprobación.

Esta última técnica es una de las más aludidas en la solución de problemas y la que cumple la importantísima función de garantizar que las técnicas, procedimientos y los cálculos utilizados sean correctos.

Labarrere (1996) ilustra cuántas formas tiene el control:

1. Hacer un estimado previo y comprobarlo con los resultados.
2. Resolver un nuevo problema, donde lo conocido en el problema original sea un dato y se utilicen en su solución relaciones dadas, explícitas o implícitamente en el inicial, y se obtenga como resultado un dato original o una relación que por la naturaleza del problema está explícitamente dada.
3. Realizar la operación inversa a la realizada en el problema original.
4. Realizar el problema por otra vía diferente y comprobar el resultado.

Es muy importante que el estudiante gane confianza y sea capaz de criticar el problema, de establecer sus criterios con relación al grado de dificultad, a la lógica de la solución, a la pertinencia de su contextualización; y comparándolo con otros ya resueltos anteriormente.

Es recomendable que el estudiante reformule el problema, cambie algunas de sus partes que no afecten su esencia, e identifique los elementos esenciales del texto, que busque un problema soluble con un procedimiento similar. Debe tenerse en cuenta que en este nivel de enseñanza los estudiantes deben lograr un nivel de formalización y rigor en la asimilación de los contenidos, superior a la lograda en años

anteriores. Las tareas propuestas deben incluir cómo comunicar y debatir sus ideas, ya sea de forma oral o en construcciones, individual o en colectivo.

A continuación, se presenta un ejemplo de tarea docente, graduada por niveles de desempeño cognitivo, así como las posibilidades de resolución, donde se ponen de manifiesto las cuatro etapas fundamentales y las técnicas de la resolución de problemas analizadas anteriormente, este ejemplo forma parte del sistema de tareas docentes que se puso a disposición de los profesores.

Tarea docente

Tema: Problemas matemático reducibles a ecuaciones y a sistemas de ecuaciones (1er modo de actuación estable de los estudiantes).

Objetivo: Resolver problemas matemáticos donde se aplique la resolución de ecuaciones y de sistemas de ecuaciones, para el desarrollo del pensamiento lógico de los estudiantes.

Problema 1

Alberto tiene cierta cantidad de bolas, le regala 18 a un amigo, cambia 15 por un libro, luego compra 20, quedándole al final 107 bolas. ¿Cuántas bolas tenía Alberto al inicio?

Una vía de solución puede ser mediante las técnicas de resolución de problemas auxiliares antes mencionada. La técnica de la lectura analítica del problema debe conducir al alumno a separar lo conocido de lo desconocido, en este caso lo conocido es lo que regaló, cambió, compró y la cantidad final, lo desconocido es la cantidad de bolas que tenía al inicio. Entre lo que le dan y lo que le piden hay relación de parte y todo, por lo que se puede hacer una representación. Aquí es posible complementar estas técnicas con la modelación, de manera que se favorece la comprensión del problema. La reformulación puede, en este caso, jugar un papel muy importante, identificando las preguntas que se generan mediante la lectura del problema.

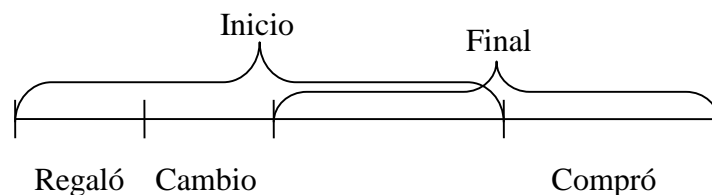


Figura 1. Diagrama para el problema #1.

¿Cuántas bolas tenía al inicio?

R/ El total menos las que compró.

¿Cuál es el total?

R/ Las que le quedaron al final más lo que regaló y cambió.

¿Cuántas bolas tenía al final?

R/107 bolas.

¿Cuántas bolas regaló?

R/ 18 bolas.

¿Cuántas bolas cambió?

R/15 bolas.

¿Cuántas bolas compró?

R/ 20 bolas.

Tenía en total:	107 → las que le quedaron	140
	18 → las que regaló	
	<u>+ 15</u> → las que cambió	<u>-20</u>
	140	Tenía al inicio: 120

Se pueden distinguir algunas acciones que el alumno necesariamente debe realizar para desarrollar esta técnica, estas son:

1. Leer con detenimiento e identificar lo conocido y lo desconocido.
2. Descifrar palabras desconocidas.
3. Identificar las condiciones dadas en el problema.
4. Identificar las relaciones que se establecen entre las partes del problema.
5. Después de leer es útil hacer un modelo.

Si con estos pasos aún no se comprende el problema, es necesario traducir el texto al lenguaje del individuo, es decir, reformular el problema. Es importante considerar impulsos heurísticos tales como:

1. Intenta ver los datos y las condiciones de una forma diferente.

2. Identifica la pregunta en el modelo, y apóyate de este último para expresarla de una forma más clara.
3. Descompón la pregunta en otras más sencillas y combínalas de varias maneras.
4. Formula otro problema análogo, más comprensible para ti.

Otra vía

También es posible resolverlo mediante una ecuación. Para utilizar esta vía es necesario declarar variables:

b → Cantidad inicial de bolas.

Ecuación: $b - 18 - 15 + 20 = 107$

$$b = 107 - 20 + 33 \text{ de donde } b = 120$$

Siempre se debe comprobar en el texto, tenía 120 bolas, regala 18, cambia 15, compra 20, quedándole al final 107 bolas. Es decir que:

$120 - 18 - 15 + 20$ debe ser igual a 107, efectivamente $107 = 107$

R/ Alberto tenía al inicio un total de 120 bolas.

Problema 2

En un trabajo de control de Matemática la suma de los puntos obtenidos por Carlos y Yisel es 185 puntos, la quinta parte de los puntos obtenidos por Yisel excede en nueve a la novena parte de los puntos obtenidos por Carlos. ¿Cuántos puntos obtuvieron Carlos y Yisel en el trabajo de control?

Una lectura analítica, bien detallada del problema, nos lleva a conocer la necesidad de declarar variables, en este caso tenemos dos incógnitas, también se comprende que la idea de solución consiste en un sistema de dos ecuaciones con dos variables.

Es necesario analizar con el estudiante el significado de: la quinta parte de los puntos obtenidos por Yisel excede en nueve a la novena parte de los puntos obtenidos por Carlos. Realizando énfasis en "excede", porque generalmente el estudiante vincula esta palabra con suma, y en estos casos, para llegar a la igualdad, se le puede sumar 9 a los de Carlos o restarle 9 a los de Yisel.

Denotemos por "c", a los puntos obtenidos por Carlos y por "y", a los puntos obtenidas por Yisel.

Quedando el sistema:
$$\begin{cases} c + y = 185 \\ y/5 - 9 = c/9 \end{cases}$$

Para resolver el sistema primeramente se debe de organizar y multiplicar por 45 la segunda ecuación para eliminar el denominador, una vez realizado estos pasos el alumno puede resolverlo por la vía que más cómodo le resulte, se obtiene como resultado $y = 95$ y $c = 90$, estos resultados se comprueban en el texto del problema, la quinta parte de 95 es 19, la novena parte de 90 es 10, y 19 excede en 9 a 10.

R/ Carlos obtuvo 90 puntos y Yisel 95 puntos.

Problema 3

Un niño ahorrando la misma cantidad de dinero todos los días, ha ahorrado \$180, si hubiese ahorrado diariamente dos pesos menos, tendría que haber ahorrado tres semanas más para ahorrar ese mismo dinero. Si se quiere comprar un juguete que le cuesta \$204, ¿cuántas semanas más tiene que ahorrar?

Para llegar a la solución de este problema es necesario utilizar la técnica de la resolución de problemas auxiliares, porque para llegar a lo que piden es necesario conocer las respuestas de otras interrogantes, por ejemplo:

¿Cuántas semanas ahorró? ¿Cuánto ahorró por semana?

Para solucionar estos problemas auxiliares es necesario declarar variables, denotemos por "s" la cantidad de semanas que estuvo ahorrando, y por "d" la cantidad de dinero que ahorró en una semana. Si se multiplica "s" por "d", se obtiene 180, la cantidad total que ahorró, y se obtiene una ecuación, pero como existen dos incógnitas, nos hace falta otra ecuación para formar un sistema. En el texto se plantea que si hubiese ahorrado dos pesos menos, tendría que haber ahorrado tres semanas más para ahorrar ese mismo dinero, de donde se obtiene la segunda ecuación, quedando el sistema:
$$\begin{cases} s \times d = 180 \\ (s + 3)(d - 2) = 180 \end{cases}$$

En la segunda ecuación, una vez que se elimine el paréntesis nos queda:

$s \times d - 2s + 3d - 6 = 180$, pero de la primera ecuación conocemos que $s \times d = 180$, por tanto se sustituye en la segunda ecuación, y entonces el sistema nos queda de la forma:

$$\begin{cases} s \times d = 180 \\ 3d - 2s = 6 \end{cases}$$

La resolución de este sistema debe de ser por sustitución, una vez que se realice, la solución sería $s = 15$ y $d = 12$. En este caso es bueno aclarar que, como el sistema conduce a una ecuación cuadrática, una variable va a tener dos soluciones, solamente tomamos la positiva, porque si se trata de ahorro, uno no puede ahorrar cantidades negativas.

Entonces conocemos que ahorró \$12 por semana y estuvo ahorrando 15 semanas, el alumno debe percatarse que esta no es la solución del problema. Para llegar a la respuesta final no solamente existe un camino. Primeramente se puede analizar en cuántas semanas puede ahorrar \$204, para obtener este resultado se divide esta cantidad por la cantidad de dinero que ahorró cada semana, obteniéndose como resultado 17. Como el niño ya había ahorrado 15 semanas para completar las 17 debe ahorrar dos semana más.

Otro análisis que se puede hacer es relacionado con lo que le falta para comprarse el juguete, el niño ya tiene \$180, para llegar a \$204 necesita \$24 más, ahora la pregunta auxiliar sería ¿En cuántas semanas él puede ahorrar esos \$24? Como ahorra \$12 por semana entonces necesita dos semanas más.

Para comprobar se analiza si:

Primero: las 15 semanas que ahorró dan como resultado 180, $12 \times 15 = 180$.

Segundo: $(15 + 3)(12 - 2)$ es 180, $18 \times 10 = 180$.

R/ El niño tuvo que ahorrar dos semanas más para comprarse el juguete.

Con el objetivo de constatar la efectividad práctica, se seleccionó un grupo de estudiantes de duodécimo grado, tomado de manera aleatoria, para instrumentar la propuesta, se realizó una prueba pedagógica de entrada y una de salida a, antes y después de poner en práctica la misma.

Después de realizar un análisis de los resultados obtenidos, podemos concluir que los resultados de la prueba pedagógica de salida fueron superiores, con una notable diferencia, en relación a los de la prueba pedagógica de entrada, no solamente en cuanto al número de aprobados sino también en cuanto a la calidad de las respuestas.

También se aplicó una encuesta a 15 profesores del municipio de Holguín. Los resultados de esta encuesta evidencian que las tareas docentes graduadas por niveles de desempeño cognitivo contribuyen a la estimulación de la independencia cognoscitiva de los alumnos y favorecen el desarrollo de la habilidad resolver problemas matemáticos.

Estos resultados evidencian que la propuesta de tareas docentes:

- Se ajusta al nivel de exigencias del grado.
- Es explícita para su aplicación en las clases.
- Es asequible para ser desarrollada con los estudiantes del grado.
- Está graduada por niveles de desempeño.
- Contribuye a la estimulación de la independencia cognoscitiva de los estudiantes.
- Favorece el desarrollo de la habilidad resolver problemas matemáticos.

Conclusiones

Al efectuarse un estudio de la resolución de problemas matemáticos, se detectaron que existen insuficiencias en el desarrollo de esta habilidad. Este estudio nos permitió constatar que su solución teórica podría constituir un valioso aporte a la enseñanza de la Matemática en Cuba.

Como vía metodológica para contribuir a mejorar esa situación se utilizó la concepción de tareas docentes para contribuir a desarrollar la habilidad de resolver problemas matemáticos, lo que permitió el paso de los estudiantes por los distintos niveles de desempeño cognitivo, cuyas tareas reflejaron el vínculo con la vida práctica, para así lograr, además, desarrollar el pensamiento lógico.

Finalmente, con la aplicación de las pruebas pedagógicas de entrada y de salida, es decir antes y después de la aplicación de la investigación, a un grupo tomado de manera aleatoria, y una encuesta aplicada a 15 profesores de Matemática del municipio de Holguín, pudimos constatar la factibilidad de la propuesta de tareas docentes. De manera general los estudiantes lograron un desarrollo notable en la habilidad para resolver problemas. Por lo que podemos afirmar que el objetivo de la investigación ha sido cumplido.

Referencias

Baldor, A. (1945). *Álgebra Elemental*. Imprenta nacional de Cuba.

Blanco Nieto, L. J., Cárdenas Lizarazo, J. A., y Caballero Carrasco, A. (2015). *La resolución de problemas de Matemáticas en la formación inicial de profesores de Primaria, Colección manuales uex – 98*. Universidad de Extremadura.

- Calderón Zamora, M. J., Alonso Betancourt, L. A., y Cedeño Mejía, J. F. (2018). La enseñanza problémica en la formación inicial del Ingeniero en Comercio Exterior. *Luz*, 17(4): 3-14. <https://luz.uho.edu.cu/index.php/luz/article/view/932>
- Campistrous Pérez, L., y Rizo Cabrera, C. (1996). *Aprende a resolver problemas aritméticos*. Pueblo y Educación.
- Cruz Ramírez, M. (2002). *Estrategia metacognitiva en la formulación de problemas para la enseñanza de la matemática*. (Tesis doctoral), ISP José de la Luz y Caballero.
- Domínguez Aldana, Y., y Pérez Borrego, Y. (2019). Propuesta de tareas docentes que favorecen la educación ambiental de los estudiantes de la especialidad Artesanía Integral. *Luz*, 18(1), 114-125. <https://luz.uho.edu.cu/index.php/luz/article/view/958>
- Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). *Educational Algebra*. Springer.
- Garcés, W. (1997) *El Sistema de Tareas como Modelo de Actuación Didáctica en la formación de profesores de Matemática – Computación*. (Tesis de maestría). ISP José de la Luz y Caballero.
- Labarrere, A. F. (1996). *Pensamiento. Análisis y autorregulación de la actividad cognoscitiva de los alumnos*. Pueblo y Educación.
- López, E. M., Guerrero, A. C., Carrillo, J., & Contreras, L. C. (2015). La resolución de problemas en los libros de texto: un instrumento para su análisis. *Avances de Investigación en Educación Matemática*(8), 73 - 94.
- Malaspina Jurado, U. (2016). Creación de problemas: sus potencialidades en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. *Cuaderno de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 15, 321-331.
- Palacio, J. (2003). *Colección de problemas matemáticos para la vida*. Pueblo y Educación.
- Pérez Ariza, K., y Hernández Sánchez, E. J. (2015). La comprensión en la solución de problemas matemáticos: una mirada actual. *Luz*, 19(3), 16-29. <https://luz.uho.edu.cu/index.php/luz/article/view/1053>
- Polya, G. (1954). *How to Solve It*. Princeton University Press.
- Polya, G. (1957). *Mathematics and Plausible Reasoning*. Princeton University Press.

Tareas docentes para contribuir a desarrollar la habilidad resolver problemas matemáticos/Teaching Tasks to Help to Develop the Ability to Solve Mathematical Problems/Tarefas de ensino para ajudar a desenvolver a capacidade de resolver problemas matemáticos

Polya, G. (1981) *Mathematical discovery* (combined ed.). Wiley.

Puig, L. y Cerdán, F. (1995). *Problemas aritméticos escolares*. Síntesis.

Rodríguez Rodríguez, L. E., García Pimentel, L., y Lozano Jiménez, M. (2015). El método de proyecto para la formulación de problemas Matemáticos. *Atenas*, 4(32), 100-112.

Salinas, N., y Sgreccia, N. (2017). Concepciones docentes acerca de la Resolución de Problemas en la escuela secundaria. *Números*, 94, 23-45.

Sampedro Ruiz, R., da Costa Fernando, E., y Sandalawa, R. (2014). La formación y desarrollo de la competencia gestionar el conocimiento matemático, a través de un sistema de tareas docentes. *Revista Órbita Pedagógica*, 1(3), 29-40.

San Juan Azze, B. M., y Gombiwa Alfredo, A. (2018). La primacía de la comprensión en un método de resolución de problemas aplicable en la formación inicial de profesores de matemática en Angola y Cuba. *Luz*, 24-31.

Sánchez García, J. A., Alonso Betancourt, L. A., y Infante Ricardo, A. I. (2019). Sugerencias metodológicas para resolver problemas matemáticos que estimulan el desarrollo de cualidades laborales en los estudiantes de Técnico Medio en Contabilidad. *Luz*, 17(1), 13-23. <https://luz.uho.edu.cu/index.php/luz/article/view/871>

Schoenfeld, A. (1992) *Learning to think Mathematically: Problem-solving, metacognition and sense making in mathematics*. In D. Greuws (Eds.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334–370) Macmillan Publishing Company.