TRABAJO DE DIPLOMA

Sobre las funciones (φ, ψ)-bimonogénicas. Algunas aplicaciones.

Autor: José Luis Serrano Ricardo

Tutor: Dr.Cs. Ricardo Abreu Blaya

Holguín, 2018

Dedicatoria

Me gustaría dedicar este modesto aporte a la carrera de Licenciatura en Matemática de la Universidad de Holguín y a su excelente colectivo de profesores, especialmente a mi tutor por iniciarme en el mundo de la investigación.

Agradecimientos

Agradezco el apoyo y estímulo recibidos de toda mi familia, especialmente de mis padres Roxana y José Luis.
Agradezco a todos mis profesores, especialmente a los que de una manera u otra me ayudaron con este trabajo: Ricardo Abreu, Rosa Urquiza y Lianet De la Cruz.

Resumen

Este trabajo se enmarca en el campo de las Ciencias Matemáticas en la disciplina de Teoría de Funciones Complejas e Hipercomplejas. Primeramente se desarrollan temas como los conjuntos estructurales, el operador de Dirac generalizado D^{ψ}, las funciones ψ-monogénicas y las (φ,ψ)-bimonogénicas que se introducen como las soluciones de la ecuación $D^{\varphi}D^{\psi}u=0$. La invesigación se centra en analizar si la propiedad de ser una función (φ,ψ)-bimonogénica trasciende a todas sus partes k-vectoriales, hallar una fórmula de representación para funciones (φ,ψ)-bimonogénicas, estudiar un problema de salto asociado al operador $D^{\varphi}D^{\psi}$ y estudiar el problema de encontrar las soluciones de la ecuación $D^{\varphi}D^{\psi}u=0$ en un dominio dado Ω cuya restricción a la frontera sea una función definida sobre $\partial\Omega$, lo que constituye una generalización del clásico problema de Dirichlet para las soluciones de la ecuación de Laplace, ya que el operador laplaciano en $\mathbb{R}^m$ es un caso particular del operador $D^{\varphi}D^{\psi}$.

Palabras Clave: Análisis de Clifford, Función (φ,ψ)-bimonogénica, Función ψ-monogénica, Problema de Dirichlet, Problema de Salto.

Abstract

This work is part of the field of Mathematical Sciences in the discipline of Complex and Hypercomplex Function Theory. First, issues such as structural sets, the generalized Dirac operator D^{ψ}, the ψ-monogenic functions and the (φ, ψ)-bimonogenic (which are introduced as the solutions of the equation $D^{\varphi}D^{\psi}u = 0$) are treated. The investigation concentrates in to analyze if the property of being a (φ, ψ)-bimonogenic function transcends to every k-vector part of the function, find a representation formula for (φ, ψ)-bimonogenic functions, study a jump problem associated with operator $D^{\varphi}D^{\psi}$ and study the problem of find the solutions of the equation $D^{\varphi}D^{\psi}u = 0$ in a given domain Ω whose restriction to the boundary is a function over $\partial\Omega$. It constitutes a generalization of the clasic Dirichlet problem for the solutions of the Laplace equation, since the Laplacian operator in $\mathbb{R}^m$ is a particular case of the operator $D^{\varphi}D^{\psi}$.

Keywords: (φ, ψ)-bimonogenic function, ψ-monogenic functions, Clifford Analysis, Dirichlet problem, Jump problem.

Índice general

Introducción

Las álgebras de Clifford fueron introducidas en 1878 por William Kingdom Clifford (1845-1879) y constituyen una generalización multidimensional de los números complejos. Estas permiten manipular algebraicamente conceptos geométricos, lo cual ha hecho posible importantes aplicaciones de estas a la Geometría, la Computación y la Física Teórica [7].

Las funciones con valores en álgebras de Clifford constituyen el objeto de estudio de la moderna teoría de funciones conocida como Análisis de Clifford. La primera monografía dedicada a esta temática fue publicada por los autores belgas Brackx, Delanghe y Sommen en 1982 [4]. Otros resultados pioneros se deben a Moisil [13], Fueter [6], Iftimie [11] y Hestenes [10].

El Análisis de Clifford posee sus orígenes en el Análisis Cuaterniónico. Este último dio sus primeros pasos cuando en 1843 R. W. Hamilton, en un intento de introducir un análogo tridimensional del sistema de los números complejos, inventó los cuaterniones [8]. Luego del hecho de que los matemáticos, alrededor del año 1830, se percataron de que el álgebra de los números complejos se suplantaba trabajando con vectores en el plano, Hamilton deseaba probar si un análogo espacial del álgebra de números complejos podría ser trabajado de modo que las operaciones con este fueran suplantadas por vectores. Él estableció que sus nuevos números (los cuales fueron llamados cuaterniones) debían poseer cuatro componentes reales y la propiedad conmutativa de la multiplicación debía ser sacrificada. Posterior a este trabajo de Hamilton esta nueva álgebra fue denotada por $\mathbb{H}$. Luego William Kingdon Clifford, matemático inglés que también escribió sobre Filosofía, junto con Hermann Grassmann fundaron lo que ahora se conoce como álgebra geométrica [5], siendo un caso especial las álgebras de Clifford, denominadas así en su honor, y que son usadas contemporáneamente en la Física Matemática. En estas álgebras surgen resultados hermosos que generalizan en algunos casos aquellos que son propios de las funciones de variable compleja, conformando así toda la teoría del Análisis de Clifford.

El principal operador diferencial del Análisis de Clifford es el operador de Dirac, el cual constituye una generalización del operador de Cauchy-Riemann en el Análisis Complejo.

En 1928, cuando Paul Dirac reformuló la teoría relativista del electrón, se encontró con el problema de encontrar una ecuación de onda Lorentz-invariante que fuera compatible con la solución de Klein-Gordon, lo que requería encontrar una factorización del laplaciano. Así surge operador de Dirac, que generalizado a dimensión m toma la forma

$$D = \sum_{i=1}^{m} e_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

donde los e_i son los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^m$.

Se define el operador de Dirac generalizado como

$$D^{\psi} = \sum_{i=1}^{m} \psi^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

donde ψ es un sistema de m vectores de $\mathbb{R}^m$.

No es difícil probar que la posiblidad de la factorización del laplaciano con el operador de Dirac generalizado se puede conservar si y solo si ψ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^m$. En ese caso se dice que ψ es un *conjunto estructural*.

A las funciones que anulan el operador de Dirac D se les llama *monogénicas*. Si anulan al operador iterado dos veces por la izquierda se dice que son *bimonogénicas*. Entonces de manera natural se definen las funciones φ*-monogénicas* y (φ, ψ)*-bimonogénicas* donde φ y ψ son conjuntos estructurales. Estos conceptos pueden ser usados para resolver problemas de frontera que generalizan los problemas clásicos para funciones monogénicas, bimonogénicas, etc.

Las funciones bimonogénicas merecen especial atención pues están estrechamente relacionadas con las armónicas y biarmónicas. Estas últimas tienen abundantes aplicaciones en Física e Ingeniería, fundamentalmente asociadas a problemas de elasticidad. También son usadas para describir imágenes por radar y flujos lentos de un fluido viscoso [2, 12].

No se deben dejar de mencionar algunos resultados asociados a la investigación de la ecuación de Lamé-Navier mediante las técnicas del Análisis de Clifford. Esta temática constituye un área de productiva investigación en los últimos años, reduciendo el estudio de sus soluciones a las funciones inframonogénicas y bimonogénicas [14]. Este estudio sirve, por tanto, para contribuir al estudio de las soluciones de una ecuación de Lamé-Navier generalizada.

En esta tesis se define un operador diferencial de segundo orden que generaliza al laplaciano. Para las funciones que anulan al nuevo operador, ¿se pueden demostrar propiedades y resultados análogos a los de las funciones armónicas?

El problema científico antes identificado define como objeto de investigación la teoría de operadores diferenciales y los problemas de frontera en el Análisis de Clifford.

La presente investigación tiene como objetivo general estudiar las funciones (φ, ψ) - bimonogénicas.

Los objetivos específicos son obtener una fórmula de representación para funciones (φ, ψ)-bimonogénicas, resolver un problema de salto asociado a esta clase de funciones y estudiar un problema de Dirichlet generalizado.

El objetivo delimita el siguiente campo: el operador doble de Dirac generalizado para dos conjuntos estructurales diferentes y las funciones (φ, ψ)-bimonogénicas.

De aquí surgen las siguientes preguntas científicas:

1- ¿Se puede obtener una fórmula de representación para funciones (φ, ψ)-bimonogénicas?

2- ¿Es posible resolver el problema de salto para funciones (φ, ψ)-bimonogénicas?

3- ¿Qué resultados se obtienen si se analiza un problema de Dirichlet generalizado para la ecuación $D^{\varphi} D^{\psi} u = 0$?

Tareas de investigación:

1- Obtener una fórmula de representación para funciones (φ, ψ)-bimonogénicas.

2- Resolver el problema de salto para funciones (φ, ψ)-bimonogénicas.

3- Estudiar el problema de Dirichlet generalizado.

Principales aportes:

1- Obtención de una fórmula de representación que permite obtener los valores de una función (φ, ψ)-bimonogénica en el interior de un dominio a través de sus valores y los de sus derivadas parciales en la frontera de dicho dominio.

2- Solución del problema de salto para funciones (φ, ψ)-bimonogénicas.

3- Prueba de que el problema de Dirichlet generalizado no siempre tiene solución única.

4- Solución parcial del problema de Dirichlet generalizado para ciertas condiciones adicionales.

En el Capítulo 1 se brindan los elementos teóricos básicos. En el Capítulo 2 se desarrollan los principales resultados de la investigación. La memoria escrita presenta además las conclusiones a las que se ha arribado.

Capítulo 1

Elementos Básicos del Análisis de Clifford

En este capítulo se definen los elementos teóricos fundamentales en los que se basa la investigación.

1.1. Álgebras de Clifford

Sea $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^m$. Se denota por $\mathbb{R}_{0,m}$ el Álgebra de Clifford 2^m-dimensional sobre $\mathbb{R}$ generada por $e_1, e_2, \ldots, e_m$ de acuerdo a las reglas de multiplicación $e_ie_j + e_je_i = -2\delta_{i,j}$ donde $\delta_{i,j}$ es el símbolo de Kronecker. Los elementos $e_A : A \subseteq \mathbb{N}_m := \{1, 2, \ldots, m\}$ definen una base de $\mathbb{R}_{0,m}$, donde $e_A = e_{h_1} \cdots e_{h_k}$ si $A = \{h_1, \ldots, h_k\}$ $(1 \leq h_1 < \cdots < h_k \leq m)$ y $e_\emptyset = e_0 = 1$.
Cualquier $a \in \mathbb{R}_{0,m}$ puede ser escrito como $a = \sum_{A\subseteq\mathbb{N}_m} a_Ae_A$ donde $a_A \in \mathbb{R}$ o como $a = \sum_{k=0}^{m}[a]_k$ donde $[a]_k$ es llamado k-*vector* y es la proyección de a en el subespacio de k-vectores definido por $[a]_k = \sum_{|A|=k} a_Ae_A$ $(k \in \mathbb{N}_m^0 := \mathbb{N}_m \cup \{0\})$.
De manera que el espacio $\mathbb{R}_{0,m}^{(1)}$ (los 1-vectores) es identificado con $\mathbb{R}^m$ (vectores usuales). Si se denota el espacio de k-vectores por $\mathbb{R}_{0,m}^{(k)}$, entonces $\mathbb{R}_{0,m} = \sum_{k=0}^{m} \oplus\mathbb{R}_{0,m}^{(k)}$.
Además , cada vector $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ puede ser representado como

$$x = \sum_{i=1}^{m} x_ie_i \in \mathbb{R}_{0,m}^{(1)}.$$

La *conjugación* se define por $\bar{a} = \sum_{A \subseteq \mathbb{N}_m} a_A \bar{e}_A$, donde

$$\bar{e}_A := (-1)^k e_{h_k} \cdots e_{h_1} = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} e_A, \quad \text{si} \quad e_A = e_{h_1} \cdots e_{h_k}.$$

Para cada $x \in \mathbb{R}_{0,m}^{(1)}$ es notable que

$$x\bar{x} = \bar{x}x = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2 = |x|^2. \tag{1.1}$$

La extensión del concepto de norma para algún $a \in \mathbb{R}_{0,m}$ es la siguiente

$$|a|^2 = [a\bar{a}]_0 = [\bar{a}a]_0 = \sum_A a_A^2.$$

Supóngase que Ω es un dominio acotado, con frontera Γ suave, en $\mathbb{R}^m$. Se tratarán funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}_{0,m}$ que pueden ser escritas como $f(x) = \sum_A f_A(x) e_A$, siendo las f_A funciones de valores reales. Propiedades como continuidad, diferenciabilidad e integrabilidad para f serán definidas a través de sus componentes f_A. En particular se definen de esta manera los siguientes conjuntos para cualquier subconjunto E de $\mathbb{R}^m$:

$C^k(E, \mathbb{R}_{0,m})$: Conjunto de todas la funciones con valores en $\mathbb{R}_{0,m}$ k-veces continuamente diferenciables en E y $C^\infty(E, \mathbb{R}_{0,m}) := \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(E, \mathbb{R}_{0,m})$.

$C^{0,\mu}(E, \mathbb{R}_{0,m})$, $\mu \in (0, 1]$: Conjunto de todas la funciones con valores en $\mathbb{R}_{0,m}$ que satisfacen la condición de Hölder con exponente μ, o sea, las funciones f tales que para cada x y cada y de E cumplen que existe una constante positiva A de modo que

$$|f(x) - f(y)| \leq A|x - y|^\mu.$$

Sea el sistema de vectores $\psi := \{\psi^1, \ldots, \psi^m\}$, o sea, un subconjunto ordenado de $\mathbb{R}^m$. Con cierto abuso de notación, se definen $\bar{\psi} := \{\bar{\psi^1}, \ldots, \bar{\psi^m}\}$. En el conjunto $C^1(\Omega, \mathbb{R}_{0,m})$ se definen respectivamente los operadores izquierdo y derecho de Dirac asociados a ψ como:

$$D^\psi[f] := \sum_{i=1}^m \psi^i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad [f]D^\psi := \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \psi^i. \tag{1.2}$$

Sea Δ_m el operador m-dimensional de Laplace . Es fácil probar que las igualdades

$$D^\psi \cdot D^{\bar{\psi}} = D^{\bar{\psi}} \cdot D^\psi = \Delta_m, \tag{1.3}$$

se alcanzan, si y solo si

$$\psi^i \cdot \bar{\psi}^j + \psi^j \cdot \bar{\psi}^i = 2\delta_{i,j}, \quad i, j \in \mathbb{N}_m^0.$$

Esto ocurre si

$$2\delta_{i,j} = \psi^i \cdot \bar{\psi}^j + \psi^j \cdot \bar{\psi}^i = \psi^i \cdot \bar{\psi}^j + \overline{\psi^i \cdot \bar{\psi}^j} = 2\left[\psi^i \cdot \bar{\psi}^j\right]_0 = 2\left\langle \psi^i, \psi^j \right\rangle_{\mathbb{R}^m}. \tag{1.4}$$

Por lo tanto la factorización del laplaciano ocurre si y solo si ψ representa una base ortonormal de $\mathbb{R}^m$.

Cualquier conjunto ψ con esta propiedad es llamado *conjunto estructural*. Es evidente que ψ y $\bar{\psi}$ son conjuntos estructurales simultáneamente. El caso particular más usual de conjunto estructural es la base canónica de $\mathbb{R}^m$ dada por $\psi := \{e_1, \ldots, e_m\}$. Esta base genera el llamado operador de Dirac estándar, que coincide con el operador D mencionado y definido en la introducción.

1.2. Funciones ψ-monogénicas

Las funciones ψ-monogénicas han sido ampliamente estudiadas en los últimos tiempos (véase por ejemplo [1]).
Para ψ y Ω fijados se introduce el conjunto

$${}^{\psi}\mathfrak{M}(\Omega, \mathbb{R}_{0,m}) := \{f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}_{0,m}) : D^{\psi}[f] = 0\}.$$

Definición 1: Los elementos de ${}^{\psi}\mathfrak{M}(\Omega, \mathbb{R}_{0,m})$ son llamados funciones *ψ-monogénicas* (por la izquierda en este caso). Cuando ψ es la base canónica de $\mathbb{R}^m$ se denominarán simplemente funciones *monogénicas* (por la izquierda).
Denotando por E_1 la solución fundamental del operador de Laplace, $m > 2$

$$E_1(x) = \frac{|x|^{2-m}}{\omega_m(2-m)}.$$

se halla la solución fundamental (= el núcleo de Cauchy para la teoría correspondiente) del operador D^{ψ} la cual es dada, gracias a la factorización del laplaciano, por:

$$K_{\psi}(x) := D^{\bar{\psi}}\left[E_1\right](x) = \frac{x_{\bar{\psi}}}{\omega_m \cdot |x|^m}.$$

Aquí $x_{\overline{\psi}} := \sum_{i=1}^{m} x_i \bar{\psi}^i$ si $x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i$ y ω_m es el área de la esfera unitaria en $\mathbb{R}^m$.
El núcleo K_ψ tiene las importantes propiedades:

1. $K_\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^m \backslash \{0\}, \mathbb{R}_{0,m})$,

2. $K_\psi \in {}^{\psi}\mathfrak{M}(\mathbb{R}^m \backslash \{0\}, \mathbb{R}_{0,m})$.

1.2.1. Fórmula de Stokes

Uno de los hechos más cruciales del Análisis de Clifford es la existencia de una fórmula de Stokes (véase [1]) que puede ser escrita para un conjunto estructural arbitrario ψ en la forma:

$$\int_\Gamma g(\xi) n_\psi(\xi) f(\xi)\, d\Gamma_\xi = \int_\Omega ([g(\xi) D^\psi] f(\xi) + g(\xi)[D^\psi f(\xi)]) d\xi, \tag{1.5}$$

para $f, g \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}_{0,m})$, con $n_\psi(\xi) = \sum_{i=1}^{m} n_i(\xi) \psi_i$ y $n_i(\xi)$ la i-ésima componente del vector normal unitario en Γ en el punto $\xi \in \Gamma$ (recuérdese que se está trabajando con fronteras suaves). Aquí la integración en el miembro izquierdo es de superficie y en el miembro derecho es de volumen m-dimensional.
Es fácil ver que la norma de n_ψ es también uno. Demostración:

$$|n_\psi(x)|^2 = n_\psi(x) \overline{n_\psi(x)} = \sum_{i=1}^{m} n_i^2 = 1$$

Por tanto

$$|n_\psi(x)| = 1.$$

1.2.2. Operadores integrales

El núcleo de Cauchy genera las siguientes integrales:

$${}^{\psi}T_\Omega[f](x) := -\int_\Omega K_\psi(\xi - x) f(\xi)\, d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^m,$$

y

$${}^{\psi}K_\Gamma[f](x) := \int_\Gamma K_\psi(\xi - x) n_\psi(\xi) f(\xi)\, d\Gamma_\xi, \quad x \notin \Gamma.$$

La primera es una generalización de la transformada usual de Teodorescu y la segunda representa la integral de Cauchy que constituye una función ψ-monogénica fuera de Γ.
La versión singular de ${}^{\psi}K_{\Gamma}[f]$ en Γ, denotada por ${}^{\psi}S_{\Gamma}[f]$, es dada por

$$ {}^{\psi}S_{\Gamma}[f](z) := 2 \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_{\Gamma \setminus \Gamma_{\varepsilon}} K_{\psi}(\xi - z) n_{\psi}(\xi) f(\xi)\, d\Gamma_{\xi}, \qquad z \in \Gamma, $$

donde Γ_{ε} es la parte de Γ que queda dentro de la bola de centro en z y radio ε.
Ahora se introducen las notaciones $\Omega_{+} := \Omega$ y $\Omega_{-} := \mathbb{R}^m \setminus \overline{\Omega}$, entonces de acuerdo con [1] se tiene el siguiente teorema:
Teorema(Fórmula de Plemelj-Sokhotski)**:** Sea $f \in C^{0,\mu}(\Gamma, \mathbb{R}_{0,m})$, $\mu \in (0,1]$. Entonces se tiene que:

$$ {}^{\psi}K_{\Gamma}^{\pm}[f](t) := \lim_{\Omega_{\pm} \ni x \to t \in \Gamma} {}^{\psi}K_{\Gamma}[f](x) = \frac{1}{2} \left[{}^{\psi}S_{\Gamma}[f](t) \pm f(t) \right]. $$

1.2.3. Fórmula de Cauchy

La fórmula de Stokes lleva immediatamente a una importante consecuencia.
Teorema (Fórmula de Borel-Pompeiu)**:**
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un dominio acotado con frontera suave. Sea $f \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}_{0,m})$. Entonces

$$ \int_{\Gamma} K_{\psi}(\xi - x) n_{\psi}(\xi) f(\xi)\, d\Gamma_{\xi} - \int_{\Omega} K_{\psi}(\xi - x)^{\psi} D[f](\xi) d\xi = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \Omega, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^m \setminus \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{1.6} $$

Demostración:
Primeramente se considerará el caso en que x sea un punto interior. Denotando $B_{\varepsilon}(x)$ la bola con centro en x, radio ε, sea $\Omega_{\varepsilon} := \Omega \setminus B_{\varepsilon}(x)$. La frontera de este último dominio es $\partial G_{\varepsilon} = \partial G \cup (-S_{\varepsilon})$, donde S_{ε} es la frontera de B_{ε}. La orientación de la normal sobre $S_{\varepsilon}(x)$ es tomada con signo menos. Ahora se puede aplicar el teorema de Stokes en Ω_{ε} a las funciones $K_{\psi}(\xi - x)$ y $f(\xi)$, siendo ξ la variable de integración. Como $K_{\psi}(\xi - x)$ es una función ψ-monogénica se obtiene:

$$ \int_{\Gamma} K_{\psi}(\xi - x) n_{\psi}(\xi) f(\xi)\, d\Gamma_{\xi} - \int_{S_{\varepsilon}} K_{\psi}(\xi - x) n_{\psi}(\xi) f(\xi)\, d\Gamma_{\xi} = \int_{\Omega_{\varepsilon}} K_{\psi}(\xi - x)[D^{\psi} f(\xi)] d\xi. \tag{1.7} $$

En S_{ε}, $n(\xi) = \dfrac{\xi - x}{|\xi - x|}$, luego $n_{\psi}(\xi) = \dfrac{(\xi - x)_{\psi}}{|\xi - x|}$.
Entonces,

$$ K_{\psi}(\xi - x) n_{\psi}(\xi) = -\frac{(\xi - x)_{\psi}^2}{\omega_m |\xi - x|^{m+1}}. $$

Ahora usando (2.1),

$$K_{\psi}(\xi - x)n_{\psi}(\xi) = \frac{1}{\omega_m|\xi - x|^{m-1}}.$$

Hace falta probar que la segunda integral en (1.7) tiende a $f(x)$ cuando ε tiende a cero.

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} K_{\psi}(\xi - x)n_{\psi}(\xi)f(\xi)\, d\Gamma_{\xi} = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{1}{\omega_m|\varepsilon|^{m-1}}\Big(\int_{S_\varepsilon} f(\xi)\, d\Gamma_{\xi}\Big) = f(x)$$

Para $\varepsilon \longrightarrow 0$ la integral del miembro derecho en (1.7) existe y esto prueba la Fórmula de Borel-Pompeiu para lo puntos interiores. Para los puntos exteriores es simplemente repetir la demostración anterior pero sin excluir la vecindad del punto x ya que en este caso no hay singularidad.

La Fórmula de Borel-Pompeiu tiene una consecuencia inmediata que es de gran importancia, una fórmula de representación que permite obtener los valores de una función ψ-monogénica en el interior de un dominio a través de sus valores en la frontera de dicho dominio.

Fórmula Integral de Cauchy: Sea $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$, Ω acotado con frontera suave. Sea f una función ψ-monogénica. Entonces

$$f(x) = \int_{\Gamma} K_{\psi}(\xi - x)n_{\psi}(\xi)f(\xi)\, d\Gamma_{\xi}.$$

Conclusiones parciales

En este capítulo se recordaron los fundamentos básicos del Análisis de Clifford. Se definió un operador de Dirac generalizado donde aparece otro sistema de vectores en lugar de la base canónica con la condición de que mantuviera la propiedad de factorizar al laplaciano para lo que se buscó una condición necesaria y suficiente de manera tal que esto ocurra. A los sistemas que satisfacen esa condición se les llamó conjuntos estructurales. Con el nuevo operador surge de manera natural la definición de función ψ-monogénica como una generalización del concepto de función monogénica. Además se vio la existencia de fórmulas de Stokes y de Borel-Pompeiu con el operador generalizado así como una fórmula de Cauchy que permite obtener los valores de una función ψ-monogénica en el interior de un dominio a través de sus valores en la frontera de dicho dominio.

Capítulo 2

Fórmula de representación y problemas de frontera para funciones (φ, ψ) - bimonogénicas

En este capítulo se definen las funciones (φ, ψ)-bimonogénicas como una generalización de las funciones armónicas. Luego se pasa a mostrar los principales aportes de la investigación. Se busca una fórmula que permita obtener los valores de una función (φ, ψ)-bimonogénica en el interior de un dominio a través de los valores de ella y sus derivadas parciales en la frontera de dicho dominio. Luego, con ayuda de dicha fórmula, se estudian problemas de contorno que generalizan problemas clásicos como el problema del salto y el problema de Dirichlet.
Son tratadas funciones definidas en dominios acotados y simplemente conexos de $\mathbb{R}^m$ y con valores en $\mathbb{R}_{0,m}$, con derivadas parciales continuas hasta el segundo orden en la clausura de dicho dominio. Además se supone que las fronteras de dichos dominios son suaves.

2.1. Las funciones (φ, ψ)-bimonogénicas

Los conjuntos estructurales permiten construir un operador diferencial de segundo orden que generaliza al laplaciano: el operador $D^{\varphi}D^{\psi}$.
Definición 2: Sean φ y ψ dos conjuntos estructurales fijados. Se dirá que una función $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}_{0,m})$ es (φ, ψ)-bimonogénica en Ω (por la izquierda en este caso) si $D^{\varphi}D^{\psi}f = 0$.

En lo que sigue los conceptos introducidos en las definiciones 1 y 2 se supondrán por la izquierda sin especificarlo a menos que se diga lo contrario.
Observe que si en la Definición 2 los conjuntos estructurales φ y ψ son conjugados se tendrá que $D^{\varphi}D^{\psi} = D^{\varphi}D^{\bar{\varphi}} = \triangle$, por lo que las armónicas, también llamadas bimonogénicas, son un caso particular de (φ, ψ)-bimonogénicas.
El trabajo con las funciones armónicas suele facilitarse significativamente usando la propiedad de que una función con valores en el álgebra de Clifford es armónica si y solo si sus componentes reales lo son. Esto obviamente también es válido para sus correspondientes partes k-vectoriales. Por esta razón es importante analizar si existe un análogo para las funciones (φ, ψ)-bimonogénicas.
Si todas las partes k-vectoriales de una función f son (φ, ψ)-bimonogénicas entonces

$$D^{\varphi}D^{\psi}f = D^{\varphi}D^{\psi}(\sum_{k=1}^{m}[f]_k) = \sum_{k=1}^{m}D^{\varphi}D^{\psi}[f]_k = 0.$$

Esto implica que f será también (φ, ψ)-bimonogénica. A continuación se ejemplificará que el recíproco no se cumple.

Sea la función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_{0,3}$ dada por $f = [f]_0 + [f]_2$ donde

$$[f]_0 = x_2x_1$$

y

$$[f]_2 = \frac{1}{2}x_1^2\,\psi_1\psi_2 + \frac{1}{2}x_2^2\psi_2\psi_1$$

con

$$\varphi = (e_1, e_2, e_3),$$

$$\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$$

donde

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1),$$

$$\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{21}}(2, 1, -4),$$

$$\psi_3 = \frac{1}{\sqrt{14}}(3, -2, 1).$$

Se puede ver que

$$\psi_1\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{126}}(-2 + e_1e_2 - 4e_1e_3 + 4e_2e_1 - 2 - 8e_2e_3 + 2e_3e_1 + e_3e_2 + 4)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{126}}(-3e_1e_2 - 6e_1e_3 - 9e_2e_3)$$

y que $\psi_2\psi_1 = -\psi_1\psi_2$ por propiedad de los conjuntos estructurales.
De aquí que $\psi_1\psi_2, \psi_2\psi_1 \in \mathbb{R}^{(2)}_{0,3}$.
Como en este caso

$$D^\varphi D^\psi = \sum_{i=1}^{2} \varphi_i\psi_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \varphi_1\psi_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \varphi_2\psi_1 \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1}$$

se tiene que

$$D^\varphi D^\psi([f]_0) = e_1\psi_2 + e_2\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{21}}[e_1(2e_1 + e_2 - 4e_3)] + \frac{1}{\sqrt{6}}[e_2(e_1 + 2e_2 + e_3)] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{21}}(-2 + e_1e_2 - 4e_1e_3) + \frac{1}{\sqrt{6}}[(-e_1e_2 - 2 + e_2e_3)] \neq 0,$$

$$D^\varphi D^\psi([f]_2) = e_1(\psi_1^2)\psi_2 + e_2(\psi_2)^2\psi_1 = -(e_1\psi_2 + e_2\psi_1) \neq 0.$$

Sin embargo

$$D^\varphi D^\psi f = D^\varphi D^\psi [f]_0 + D^\varphi D^\psi [f]_2 = 0.$$

2.2. Fórmula de representación

En la búsqueda de una fórmula de representación para las funciones (φ, ψ)-bimonogénicas el primer problema que se necesita resolver es buscar la solución fundamental del operador $D^\varphi D^\psi$. Esto es buscar una función $K_{\varphi\psi}(x)$ que anule el operador para todo valor no nulo de x (véase [9]).
Se denotará por E_2 la solución fundamental del operador $\triangle^2$, suponiendo $m \geq 3$. Entonces, acorde a [3],

$$E_2(x) = \frac{|\ x\ |^{4-m}}{2\omega_m(2-m)(4-m)},$$

donde ω_m denota el área de la esfera unitaria en $\mathbb{R}^m$.
Como

$$D^{\varphi}D^{\psi}D^{\psi}D^{\varphi} = D^{\varphi}(-\triangle)D^{\varphi} = -\triangle D^{\varphi}D^{\varphi} = (-\triangle)^2 = \triangle^2,$$

al denotar por $K_{\varphi\psi}(x) = D^{\psi}D^{\varphi}(E_2(x))$ se tiene que $K_{\varphi\psi}$ es solución fundamental del operador $D^{\varphi}D^{\psi}$.
Seguidamente se calcula $K_{\varphi\psi}(x)$.

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(|x|^{\alpha}) = \frac{\partial}{\partial x_i}([\sum_{i=1}^{m}(x_i)^2]^{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}|x|^{\alpha-2}[2(x_i)]$$

Luego

$$D^{\varphi}|x|^{\alpha} = \sum_{i=1}^{m}\varphi_i\frac{\partial}{\partial x_i}(|x|^{\alpha}) = \alpha|x|^{\alpha-2}x_{\varphi},$$

donde para un elemento arbitrario x de $\mathbb{R}^m$ y cualquier conjunto estructural φ se define x_{φ} como

$$x_{\varphi} := \sum_{i=1}^{m}x_i\varphi_i.$$

Por tanto,

$$D^{\varphi}E_2(x) = \frac{|x|^{2-m}x_{\varphi}}{2\omega_m(2-m)}.$$

Luego

$$K_{\varphi\psi}(x) = D^{\psi}D^{\varphi}E_2(x) = \sum_{j=1}^{m}\psi_j\frac{\partial}{\partial x_j}D^{\varphi}E_2(x) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\psi_j\frac{(2-m)|x|^{-m}x_jx_{\varphi} + |x|^{2-m}\varphi_j}{2\omega_m(2-m)} = \frac{(2-m)|x|^{-m}x_{\psi}x_{\varphi} + |x|^{2-m}\sum_{i=1}^{m}\psi_i\varphi_i}{2(2-m)\omega_m}.$$

Más adelante se verá que también es necesario calcular
$D^{\psi}K_{\varphi\psi}(x) = \frac{1}{2\omega_m}D^{\psi}(|x|^{-m}x_{\psi}x_{\varphi} + \frac{|x|^{2-m}}{2-m}\sum_{i=1}^{m}\psi_i\varphi_i) =$

$$= \frac{1}{2\omega_m}\{\sum_{i=1}^{m}\psi_i[-m|x|^{-m-2}x_ix_{\psi}x_{\varphi} + |x|^{-m}(x_{\psi}\varphi_i + \psi_ix_{\varphi})] + D^{\psi}\frac{|x|^{2-m}}{2-m}\sum_{i=1}^{m}\psi_i\varphi_i$$

$$= \frac{1}{2\omega_m}[-m|x|^{-m-2}x_{\psi}^2x_{\varphi} + |x|^{-m}\sum_{i=1}^{m}\psi_ix_{\psi}\varphi_i + \sum_{i=1}^{m}\psi_i^2x_{\varphi} + |x|^{-m}x_{\psi}\sum_{i=1}^{m}\psi_i\varphi_i].$$

Al tener en cuenta que

$$x_\psi x_\psi = (\sum_{i=1}^{m} x_i\psi_i)(\sum_{i=1}^{m} x_i\psi_i) = \sum_{i=1}^{m} x_i^2\psi_i^2 + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1, j\neq i}^{m} x_i x_j \psi_i\psi_j$$

y observar la definición de conjunto estructural se llega a

$$x_\psi^2 = -|x|^2. \tag{2.1}$$

Por tanto,

$$D^\psi K_{\varphi\psi}(x) = \frac{1}{2\omega_m}[m|x|^{-m}x_\varphi + |x|^{-m}(\sum_{i=1}^{m}\psi_i x_\psi \varphi_i - m x_\varphi) + |x|^{-m}x_\psi \sum_{i=1}^{m}\psi_i\varphi_i]$$

$$= \frac{|x|^{-m}}{2\omega_m}[\sum_{i=1}^{m}\psi_i x_\psi\varphi_i + x_\psi\sum_{i=1}^{m}\psi_i\varphi_i]$$

$$= \frac{|x|^{-m}}{2\omega_m}[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1,j\neq i}^{m} x_j\psi_i\psi_j\varphi_i + \sum_{i=1}^{m} x_i\psi_i^2\varphi_i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1,j\neq i}^{m} x_j\psi_j\psi_i\varphi_i + \sum_{i=1}^{m} x_i\psi_i^2\varphi_i]$$

$$= \frac{|x|^{-m}}{2\omega_m}[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1,j\neq i}^{m} (-x_j\psi_j\psi_i\varphi_i) - \sum_{i=1}^{m} x_i\varphi_i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1,j\neq i}^{m} x_j\psi_j\psi_i\varphi_i - \sum_{i=1}^{m} x_i\varphi_i]$$

$$= -2\frac{|x|^{-m}}{2\omega_m}\sum_{i=1}^{m} x_i\varphi_i = -\frac{x_\varphi}{\omega_m|x|^m}. \tag{2.2}$$

Por la fórmula de Borel-Pompeiu

$$w(z) = -\frac{1}{\omega_m}\int_\Gamma \frac{(\zeta - z)_\psi}{|\zeta - z)|^m}\, d^\psi\sigma(\zeta)w(\zeta) + \frac{1}{\omega_m}\int_\Omega \frac{(\tilde{\zeta} - z)_\psi}{|\tilde{\zeta} - z)|^m}\,[D^\psi w(\tilde{\zeta})]dv(\tilde{\zeta}). \tag{2.3}$$

Ahora aplicando dicha fórmula a $D^\psi w(\tilde{\zeta})$ pero en la base φ se tiene

$$D^\psi w(\tilde{\zeta}) = -\frac{1}{\omega_m}\int_\Gamma \frac{(\zeta - \tilde{\zeta})_\varphi}{|\zeta - \tilde{\zeta})|^m}\, d^\varphi\sigma(\zeta)[D^\psi w(\zeta)] + \frac{1}{\omega_m}\int_\Omega \frac{(\zeta - \tilde{\zeta})_\varphi}{|\zeta - \tilde{\zeta})|^m}\,[D^\psi D^\varphi w(\tilde{\zeta})]dv(\tilde{\zeta}). \tag{2.4}$$

Aquí para abreviar se empleó la notación

$$d^\psi\sigma(\zeta)w(\zeta) := n_\psi(\zeta)w(\zeta)d\Gamma(\zeta),$$

$$d^\varphi\sigma(\zeta)w(\zeta) := n_\varphi(\zeta)w(\zeta)d\Gamma(\zeta).$$

Sea
$$\alpha(\zeta,z)=\frac{1}{\omega_m}\int_\Omega \frac{(\tilde{\zeta}-z)_\psi}{|\tilde{\zeta}-z)|^m}\frac{(\tilde{\zeta}-\zeta)_\varphi}{|\tilde{\zeta}-\zeta)|^m}dv(\tilde{\zeta}).$$
Sustituyendo (2.4) en (2.3)
$$w(z)=-\frac{1}{\omega_m}\int_\Gamma \frac{(\zeta-z)_\psi}{|\zeta-z)|^m}\, d^\psi\sigma(\zeta)w(\zeta)-\frac{1}{\omega_m}\int_\Gamma \alpha(\zeta,z)d^\varphi\sigma(\zeta)D^\psi w(\zeta)+$$
$$+\frac{1}{\omega_m}\int_\Omega \alpha(\zeta,z)[D^\varphi D^\psi w(\zeta)]dv(\zeta). \tag{2.5}$$
Sea
$$I_1=\int_{|\tilde{\zeta}-\zeta|=\varepsilon}\frac{(\tilde{\zeta}-z)_\psi}{|\tilde{\zeta}-z)|^m}\, d^\psi\sigma(\tilde{\zeta})K_{\varphi\psi}(\tilde{\zeta}-\zeta).$$
Sea $\varepsilon>0$ arbitrario el radio de una bola con centro en $\zeta\in\mathbb{R}^m$, $\tilde{\zeta}$ un punto arbitrario de dicha bola, z un punto exterior a ella y ψ un conjunto estructural cualquiera. Entonces existe una constante c tal que:
$$\frac{|(\tilde{\zeta}-z)_\psi|}{|\tilde{\zeta}-z|^m}\leq c\,m. \tag{2.6}$$
Para probar esto sea $\varepsilon_0>0$ fijado de manera tal que $\varepsilon<\varepsilon_0<dist(z,C_\varepsilon(\zeta))$. Entonces
$$|\tilde{\zeta}-z|\geq dist(z,C_\varepsilon(\zeta))\geq dist(z,C_{\varepsilon_0}(\zeta)):=c_0\Rightarrow|\tilde{\zeta}-z|^{1-m}\leq {c_0}^{1-m},$$
como ε_0 es fijo c_0 es constante. Además
$$|(\tilde{\zeta}-z)_\psi|\leq\sum_{i=1}^m|(\tilde{\zeta}-z)_i||\psi_i|\leq\sum_{i=1}^m|(\tilde{\zeta}-z)_i|\leq m|\tilde{\zeta}-z|. \tag{2.7}$$
Luego
$$\frac{|(\tilde{\zeta}-z)_\psi|}{|\tilde{\zeta}-z|^m}\leq\frac{m|\tilde{\zeta}-z|}{|\tilde{\zeta}-z|^m}\leq m|\tilde{\zeta}-z|^{1-m}\leq m\,{c_0}^{1-m}:=c\,m$$
como se había afirmado.

Entonces usando (2.6)
$$|I_1|\leq\int_{|\tilde{\zeta}-\zeta|=\varepsilon}c\,m|d^\psi\sigma(\tilde{\zeta})||K_{\varphi\psi}(\tilde{\zeta}-\zeta)|$$
$$\leq\int_{|\tilde{\zeta}-\zeta|=\varepsilon}c\,m|d^\psi\sigma(\tilde{\zeta})|\frac{|2-m||\tilde{\zeta}-\zeta|^{-m}|(\tilde{\zeta}-\zeta)_\psi||(\tilde{\zeta}-\zeta)_\varphi|+|\tilde{\zeta}-\zeta|^{2-m}|\sum_{i=1}^m\psi_i\varphi_i|}{2\omega_m|2-m|}.$$

Ahora para un conjunto estructural arbitrario φ se cumple lo siguiente:

$$|\tilde{\zeta}-\zeta| \leq \varepsilon \Rightarrow |(\tilde{\zeta}-\zeta)_\varphi| \leq \sum_{i=1}^{m} |(\tilde{\zeta}-\zeta)_{(i)}||\varphi_i| \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{m} |\varphi_i| \leq \varepsilon m,$$

ya que $|(\tilde{\zeta}-\zeta)_{(i)}| \leq |\tilde{\zeta}-\zeta| \wedge |\varphi_i| = 1 \; \forall i \in [1,m]$.
Por tanto

$$|(\tilde{\zeta}-\zeta)_\varphi| \leq \varepsilon m. \tag{2.8}$$

De aquí que

$$|I_1| \leq \frac{c\,m}{2\omega_m|2-m|} \int_{|\tilde{\zeta}-\zeta|=\varepsilon} [|2-m||\tilde{\zeta}-\zeta|^{-m} m^2 |\tilde{\zeta}-\zeta|^2 + |\tilde{\zeta}-\zeta|^{2-m}|\sum_{i=1}^{m} \psi_i\varphi_i|]|d^\psi\sigma(\tilde{\zeta})|$$

$$\leq \frac{c\,m(|2-m|m^2 + |\sum_{i=1}^{m}\psi_i\varphi_i|)}{2\omega_m|2-m|} \int_{|\tilde{\zeta}-\zeta|=\varepsilon} |\tilde{\zeta}-\zeta|^{2-m}|d^\psi\sigma(\tilde{\zeta})|$$

$$= \frac{c\,m(|2-m|m^2 + |\sum_{i=1}^{m}\psi_i\varphi_i|)}{2\omega_m|2-m|} \int_{|\tilde{\zeta}-\zeta|=\varepsilon} |n_\psi(\tilde{\zeta})||\tilde{\zeta}-\zeta|^{2-m}|d\Gamma(\tilde{\zeta})|.$$

Luego

$$|I_1| \leq \frac{c\,m(|2-m|m^2 + |\sum_{i=1}^{m}\psi_i\varphi_i|)}{2\omega_m|2-m|} \int_{|\tilde{\zeta}-\zeta|=\varepsilon} |\tilde{\zeta}-\zeta|^{2-m}|d\Gamma(\tilde{\zeta})|$$

$$= \frac{c\,m(|2-m|m^2 + |\sum_{i=1}^{m}\psi_i\varphi_i|)}{2|2-m|}\varepsilon^{2-m}\varepsilon^{m-1} = \frac{c\,m(|2-m|m^2 + |\sum_{i=1}^{m}\psi_i\varphi_i|)}{2|2-m|}\varepsilon.$$

Por tanto $\varepsilon \longrightarrow 0 \Rightarrow I_1 \longrightarrow 0$.
Sea

$$I_2 = \int_{|\tilde{\zeta}-\zeta|<\varepsilon} \frac{(\tilde{\zeta}-z)_\psi}{|\tilde{\zeta}-z)|^m}[D^\psi K_{\varphi\psi}(\tilde{\zeta}-\zeta)]dv(\tilde{\zeta}) = -\int_{|\tilde{\zeta}-\zeta|<\varepsilon} \frac{(\tilde{\zeta}-z)_\psi}{|\tilde{\zeta}-z)|^m}\frac{(\tilde{\zeta}-\zeta)_\varphi}{\omega_m|\tilde{\zeta}-\zeta|^m}\,dv(\tilde{\zeta}).$$

Usando (2.6) y (2.8):

$$|I_2| \leq \frac{c\,m}{\omega_m}\int_{|\tilde{\zeta}-\zeta|<\varepsilon} |\tilde{\zeta}-\zeta|^{-m} m|\tilde{\zeta}-\zeta||dv(\tilde{\zeta})|.$$

Haciendo $\tilde{\zeta}-\zeta = r\,x$, $|x|=1$, $0 \leq r \leq \varepsilon$, $dv(\tilde{\zeta}) = r^{m-1}dr\,dx$ (veáse [7])

$$|I_2| \leq \frac{c\,m}{\omega_m}\int_0^\varepsilon \int_{|x|=1} r^{1-m}r^{m-1}dr\,dx = \frac{c\,m}{\omega_m}\int_0^\varepsilon dr \int_{|x|=1} dx.$$

Luego $\varepsilon \longrightarrow 0 \Rightarrow I_2 \longrightarrow 0$.

Así se tendrá entonces que

$$K_{\varphi\psi}(\zeta, z) = \tilde{\alpha}(\zeta, z) + \alpha(\zeta, z), \tag{2.9}$$

donde

$$\tilde{\alpha}(\zeta, z) = \frac{1}{\omega_m} \int_\Gamma \frac{(\tilde{\zeta} - z)_\psi}{|\tilde{\zeta} - z)|^m} \, d^\psi \sigma(\tilde{\zeta}) K_{\varphi\psi}(\tilde{\zeta} - \zeta).$$

Luego

$$\tilde{\alpha}(\zeta, z) D^\varphi = \frac{1}{\omega_m} \int_\Gamma \frac{(\tilde{\zeta} - z)_\psi}{|\tilde{\zeta} - z)|^m} \, d^\psi \sigma(\tilde{\zeta}) K_{\varphi\psi}(\tilde{\zeta} - \zeta) D^\varphi.$$

Aplicando el Teorema de Stokes y teniendo en cuenta que $K_{\varphi\psi}(\tilde{\zeta} - \zeta) = D^\psi D^\varphi E_2(\tilde{\zeta} - \zeta)$ se llega a

$$\tilde{\alpha}(\zeta, z) D^\varphi = \frac{1}{\omega_m} \int_\Omega \{[\frac{(\tilde{\zeta} - z)_\psi}{|\tilde{\zeta} - z)|^m} D^\psi] K_{\varphi\psi}(\tilde{\zeta} - \zeta) D^\varphi + \frac{(\tilde{\zeta} - z)_\psi}{|\tilde{\zeta} - z)|^m} D^\psi D^\psi D^\varphi E_2(\tilde{\zeta} - \zeta) D^\varphi]\} dv(\tilde{\zeta})$$

$$= -\frac{1}{\omega_m} \int_\Omega \frac{(\tilde{\zeta} - z)_\psi}{|\tilde{\zeta} - z)|^m} [D^\varphi \triangle E_2(\tilde{\zeta} - \zeta) D^\varphi] dv(\tilde{\zeta}) = -\frac{1}{\omega_m} \int_\Omega \frac{(\tilde{\zeta} - z)_\psi}{|\tilde{\zeta} - z)|^m} [D^\varphi D^\varphi \triangle E_2(\tilde{\zeta} - \zeta)] dv(\tilde{\zeta})$$

(aquí se tuvo en cuenta que $E_2(x)$ solo toma valores reales).

Por tanto

$$\tilde{\alpha}(\zeta, z) D^\varphi = \frac{1}{\omega_m} \int_\Omega \frac{(\tilde{\zeta} - z)_\psi}{|\tilde{\zeta} - z)|^m} [\triangle \triangle E_2(\tilde{\zeta} - \zeta)] dv(\tilde{\zeta}) = 0.$$

Por el Teorema de Stokes nuevamente:

$$-\frac{1}{\omega_m} \int_\Gamma \tilde{\alpha}(\zeta, z) \, d^\varphi \sigma(\zeta) D^\psi w(\zeta) + \frac{1}{\omega_m} \int_\Omega \tilde{\alpha}(\zeta, z) [D^\varphi D^\psi w(\zeta)] dv(\zeta) = 0,$$

Sumando este miembro izquierdo nulo a la representación (2.5) y observando (2.9) se obtiene la siguiente relación

$$w(z) = -\frac{1}{\omega_m} \int_\Gamma \frac{(\zeta - z)_\psi}{|\zeta - z|^m} \, d^\psi \sigma(\zeta) w(\zeta) - \int_\Gamma K_{\varphi\psi}(\zeta - z) \, d^\varphi \sigma(\zeta) D^\psi w(\zeta) +$$

$$+ \int_\Omega K_{\varphi\psi}(\zeta - z) [D^\varphi D^\psi w(\zeta)] dv(\zeta).$$

De aquí que si la función w es (φ,ψ)-bimonogénica en Ω se obtiene la siguiente fórmula de tipo Cauchy:

$$w(z) = -\frac{1}{\omega_m}\int_\Gamma \frac{(\zeta - z)_\psi}{|\zeta - z|^m}\, d^\psi\sigma(\zeta)w(\zeta) - \int_\Gamma K_{\varphi\psi}(\zeta - z)\, d^\varphi\sigma(\zeta)D^\psi w(\zeta),$$

que permite obtener los valores de una función (φ,ψ)-bimonogénica en el interior de un dominio a través de los valores de ella y sus derivadas parciales en la frontera de dicho dominio.

2.3. Problemas de frontera

Como ya se ha visto las funciones (φ,ψ)-bimonogénicas constituyen una generalización de las funciones armónicas. Estas últimas por su importancia han sido ampliamente estudiadas, por ejemplo, en la consideración de problemas de frontera de tipos Neumann y Dirichlet. En esta sección se estudiarán dos de los problemas clásicos generalizados para funciones (φ,ψ)-bimonogénicas.

2.3.1. Problema de salto para funciones (φ,ψ)-bimonogénicas

Se le conoce como problema de salto al problema de hallar una función que anula determinado operador diferencial dada la resta entre los valores límites interior y exterior que experimenta dicha función cuando la variable tiende a un punto de la frontera de un dominio acotado, o sea, "su salto".
Ahora se estudia un problema de salto de la forma siguiente.
Sean las funciones de Hölder w_1 y w_2 definidas sobre la frontera de un dominio Ω. Encontrar las soluciones de la ecuación

$$D^\varphi D^\psi w = 0$$

en $\Omega_+ \cup \Omega_-$ que satisfacen las siguientes condiciones de salto sobre Γ

$$\begin{aligned} w^+ - w^- &= w_1, \\ D^\psi w^+ - D^\psi w^- &= w_2, \end{aligned}$$

donde Ω_+ y Ω_- son los dominios interior y exterior respectivamente determinados por una superficie cerrada simple y suave Γ de $\mathbb{R}^m$.

A continuación se demostrará que la función dada por

$$w(z) = -\frac{1}{\omega_m}\int_\Gamma \frac{(\zeta - z)_\psi}{|\zeta - z|^m}\, d^\psi\sigma(\zeta) w_1(\zeta) + \int_\Gamma K_{\varphi\psi}(\zeta - z)\, d^\varphi\sigma(\zeta) w_2(\zeta), \quad z \in \Omega_+ \cup \Omega_-, \tag{2.10}$$

es solución del problema planteado.

Primero se demostrará la existencia en el sentido impropio de la integral

$$F(z) = \int_\Gamma K_{\varphi\psi}(\zeta - z)\ d^\varphi\sigma(\zeta) w_2(\zeta),\ z \in \Gamma.$$

Sean $C(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^m : |z - x| \leq \varepsilon\}$, $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \cap C(\varepsilon)$ y

$$I(z) = \int_{\Gamma_\varepsilon} K_{\varphi\psi}(\zeta - z)\ d^\varphi\sigma(\zeta) w_2(\zeta),\ z \in \Gamma.$$

Entonces

$$|I(z)| \leq \int_{\Gamma_\varepsilon} |K_{\varphi\psi}(\zeta - z)\ d^\varphi\sigma(\zeta) w_2(\zeta)| \leq c \int_{\Gamma_\varepsilon} |K_{\varphi\psi}(\zeta - z)|\ |d^\varphi\sigma(\zeta)|\ |w_2(\zeta)|$$

para alguna constante c. Como w_2 es continua en Γ_ε alcanza un máximo en ella que se denotará por M. Luego

$$|I(z)| \leq cM \int_{\Gamma_\varepsilon} |K_{\varphi\psi}(\zeta - z)||\ d^\varphi\sigma(\zeta)| = cM \int_{\Gamma_\varepsilon} |K_{\varphi\psi}(\zeta - z)||n_\varphi(\zeta)\ d\Gamma_\varepsilon(\zeta)|,$$

de donde

$$|I(z)| \leq cM \int_{\Gamma_\varepsilon} |K_{\varphi\psi}(\zeta - z)| d\Gamma_\varepsilon(\zeta).$$

Además denotando $s := \dfrac{\sum_{i=1}^m \psi_i\varphi_i}{2 - m}$ se tiene

$$|K_{\varphi\psi}(\zeta - z)| = \frac{1}{2\omega_m}\left|\frac{s|\zeta - z|^2 + (\zeta - z)_\psi(\zeta - z)_\varphi}{|\zeta - z|^m}\right| \leq \frac{1}{2\omega_m}\frac{s|\zeta - z|^2 + |(\zeta - z)_\psi(\zeta - z)_\varphi|}{|\zeta - z|^m}.$$

Luego para cierta constante C

$$|K_{\varphi\psi}(\zeta - z)| \leq \frac{1}{2\omega_m}\frac{s|\zeta - z|^2 + C|(\zeta - z)_\psi||(\zeta - z)_\varphi|}{|\zeta - z|^m}.$$

Aplicando (2.7) dos veces

$$|K_{\varphi\psi}(\zeta - z)| \leq \frac{1}{2\omega_m}\frac{s|\zeta - z|^2 + Cm^2|\zeta - z|^2}{|\zeta - z|^m} = \frac{s + Cm^2}{2\omega_m}|\zeta - z|^{2-m}.$$

Por tanto

$$|I(z)| \leq \tilde{c} \int_{\Gamma_\varepsilon} |\zeta - z|^{2-m} d\Gamma_\varepsilon(\zeta)$$

donde $\tilde{c}$ es constante. Este integrando posee singularidad de orden $m-2$ y como Γ tiene dimensión $m-1$ esta integral tiende a cero.

Ahora se pasa a verificar la continuidad de F en un punto arbitrario t de Γ.
Para ello primeramente se plantea la diferencia

$$F(t) - F(z) = \int_\Gamma [K_{\varphi\psi}(\zeta - t) - K_{\varphi\psi}(\zeta - z)] d^\varphi \sigma(\zeta) w_2(\zeta).$$

Sumando y restando $w_2(t)$ al integrando y agrupando convenientemente

$$F(t) - F(z) = \int_\Gamma [K_{\varphi\psi}(\zeta - t) - K_{\varphi\psi}(\zeta - z)] d^\varphi \sigma(\zeta)[w_2(\zeta) - w_2(t)] +$$

$$+ [\int_\Gamma K_{\varphi\psi}(\zeta - t) d^\varphi \sigma(\zeta) - \int_\Gamma K_{\varphi\psi}(\zeta - z) d^\varphi \sigma(\zeta)] w_2(t). \tag{2.11}$$

Como se vio en la demostración anterior la singularidad de $K_{\varphi\psi}$ es menor que la de la Γ. Luego se puede aplicar el Teorema de Stokes para las dos últimas integrales de 2.11:

$$\int_\Gamma K_{\varphi\psi}(\zeta - t)\, d^\varphi \sigma(\zeta) = \int_\Omega K_\psi(\zeta - t) d\Omega(\zeta),$$

$$\int_\Gamma K_{\varphi\psi}(\zeta - z)\, d^\varphi \sigma(\zeta) = \int_\Omega K_\psi(\zeta - z) d\Omega(\zeta).$$

Nótese que se usó el hecho de que $(K_{\varphi\psi})D^\varphi = (D^\psi D^\varphi E_2)D^\varphi = D^\psi(-\triangle E_2) = -D^\psi E_1 = -K_{\bar{\psi}} = K_\psi$ (aquí E_1 denota la solución fundamental del laplaciano).
Como la función constante igual a 1 pertenece al espacio de Sobolev W_p^k para cualesquiera valores enteros positivos de p y k sus transformadas generalizadas de Teodorescu existen y son funciones continuas (véase [1], página 1145).
Luego el problema de analizar la continuidad de F se reduce a analizar la pequeñez de

$$\tilde{F}(z,t) = \int_\Gamma [K_{\varphi\psi}(\zeta - t) - K_{\varphi\psi}(\zeta - z)] d^\varphi \sigma(\zeta)[w_2(\zeta) - w_2(t)],$$

ya que la diferencia entre $F(t)-F(z)$ y $\tilde{F}(z,t)$ es una función continua.

Por ser w_2 continua y denotando por una conveniencia que se verá después

$$\hat{c} := 2\int_\Gamma |K_{\varphi\psi}(\zeta - z)| d\Gamma(\zeta)$$

se tiene que

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta : |\zeta - t| < \delta \Rightarrow |w_2(\zeta) - w_2(t)| < \frac{\varepsilon}{2\hat{c}}. \tag{2.12}$$

Sean $C(\delta) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x - t| \le \delta\}$, $\Gamma_\delta = \Gamma \cap C(\delta)$.

Evidentemente

$$\int_\Gamma K_{\varphi\psi}(\zeta - z)\, d^\varphi\sigma(\zeta)[w_2(\zeta) - w_2(t)] =$$

$$= \int_{\Gamma\setminus\Gamma_\delta} K_{\varphi\psi}(\zeta - z)\, d^\varphi\sigma(\zeta)[w_2(\zeta) - w_2(t)] + \int_{\Gamma_\delta} K_{\varphi\psi}(\zeta - z)\, d^\varphi\sigma(\zeta)[w_2(\zeta) - w_2(t)].$$

Como el punto ζ está fuera de $\Gamma \setminus \Gamma_\delta$ la primera integral define una función continua de la variable z, por tanto

$$|z - t| \le \bar{\delta}, \bar{\delta} < \delta \Rightarrow$$

$$|\int_{\Gamma\setminus\Gamma_\delta} K_{\varphi\psi}(\zeta - z)\, d^\varphi\sigma(\zeta)[w_2(\zeta) - w_2(t)] - \int_{\Gamma\setminus\Gamma_\delta} K_{\varphi\psi}(\zeta - t)\, d^\varphi\sigma(\zeta)[w_2(\zeta) - w_2(t)]\,| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.13}$$

Además

$$|\int_{\Gamma_\delta} K_{\varphi\psi}(\zeta - z)\, d^\varphi\sigma(\zeta)[w_2(\zeta) - w_2(t)] - \int_{\Gamma_\delta} K_{\varphi\psi}(\zeta - t)\, d^\varphi\sigma(\zeta)[w_2(\zeta) - w_2(t)]\,| \le$$

$$\le a\int_{\Gamma_\delta} |K_{\varphi\psi}(\zeta - z) - K_{\varphi\psi}(\zeta - t)||w_2(\zeta) - w_2(t)| d\Gamma(\zeta)$$

para cierta constante a. Usando (2.12)

$$|\int_{\Gamma_\delta} K_{\varphi\psi}(\zeta - z)\, d^\varphi\sigma(\zeta)[w_2(\zeta) - w_2(t)] - \int_{\Gamma_\delta} K_{\varphi\psi}(\zeta - t)\, d^\varphi\sigma(\zeta)[w_2(\zeta) - w_2(t)]\,|$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2\hat{c}} \int_{\Gamma_\delta} |K_{\varphi\psi}(\zeta - z) - K_{\varphi\psi}(\zeta - t)| d\Gamma(\zeta)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2\hat{c}}\Big(\int_{\Gamma_\delta}|K_{\varphi\psi}(\zeta-z)|d\Gamma(\zeta)+\int_{\Gamma_\delta}|K_{\varphi\psi}(\zeta-t)|d\Gamma(\zeta)\,\Big)\leq\frac{\varepsilon}{2\hat{c}}[2\int_{\Gamma}|K_{\varphi\psi}(\zeta-z)|d\Gamma(\zeta)]\leq\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.14}$$

Con (2.13) y (2.14) ha quedado demostrada la continuidad de F.

Ahora bien,

$$D^{\varphi}D^{\psi}w=-D^{\varphi}D^{\psi}\frac{1}{\omega_m}\int_{\Gamma}\frac{(\zeta-z)_{\psi}}{|\zeta-z|^m}d^{\psi}\sigma(\zeta)w_1(\zeta)+D^{\varphi}D^{\psi}\int_{\Gamma}K_{\varphi\psi}(\zeta-z)d^{\varphi}\sigma(\zeta)w_2(\zeta),$$

esto $\forall z\in\Omega_+\cup\Omega_-$.

Usando la continuidad de la función definida por la segunda integral

$$D^{\varphi}D^{\psi}w=-D^{\varphi}D^{\psi}\frac{1}{\omega_m}\int_{\Gamma}\frac{(\zeta-z)_{\psi}}{|\zeta-z|^m}d^{\psi}\sigma(\zeta)w_1(\zeta)+\int_{\Gamma}[D^{\varphi}D^{\psi}K_{\varphi\psi}(\zeta-z)]d^{\varphi}\sigma(\zeta)w_2(\zeta)$$

y aplicando (2.2) se tiene que

$$\begin{aligned}D^{\varphi}D^{\psi}w&=-D^{\varphi}D^{\psi}\frac{1}{\omega_m}\int_{\Gamma}\frac{(\zeta-z)_{\psi}}{|\zeta-z|^m}d^{\psi}\sigma(\zeta)w_1(\zeta)+\int_{\Gamma}[D^{\varphi}K_{\varphi}(\zeta-z)]d^{\varphi}\sigma(\zeta)w_2(\zeta)\\&=-D^{\varphi}D^{\psi}\frac{1}{\omega_m}\int_{\Gamma}\frac{(\zeta-z)_{\psi}}{|\zeta-z|^m}d^{\psi}\sigma(\zeta)w_1(\zeta).\end{aligned}$$

Pero como $z\neq\zeta$ en $\Omega_+\cup\Omega_-$ se cumple que

$$D^{\varphi}D^{\psi}w(z)=D^{\varphi}(0)=0\quad\forall z\in\Omega_+\cup\Omega_-.$$

Solo faltaría por verificar las condiciones de frontera:

$$w^+-w^-=w_1, \tag{2.15}$$

$$D^{\psi}w^+-D^{\psi}w^-=w_2. \tag{2.16}$$

Como la segunda integral de (2.10) es continua a través de Γ el salto de w es simplemente el salto de la primera integral la cual por 1.2.2 tiene salto w_1. Así queda probada la fórmula (2.15).

Aplicando D^{ψ} a ambos miembros de (2.10)

$$D^{\psi}w(z)=-D^{\psi}\frac{1}{\omega_m}\int_{\Gamma}\frac{(\zeta-z)_{\psi}}{|\zeta-z|^m}d^{\psi}\sigma(\zeta)w_1(\zeta)+D^{\psi}\int_{\Gamma}K_{\varphi\psi}(\zeta-z)d^{\varphi}\sigma(\zeta)w_2(\zeta)=$$

$$= -\frac{1}{\omega_m} \int_\Gamma \frac{(\zeta - z)_\varphi}{|\zeta - z|^m} d^\varphi \sigma(\zeta) w_2(\zeta).$$

Nuevamente usando la fórmula de Plemelj-Sokhotski se tiene que el salto de $D^\psi w$ es w_2 y de esta forma se comprueba (2.16). Por ende, (2.10) es solución del problema planteado.

2.3.2. Problema de Dirichlet generalizado

Se le conoce como problema de Dirichlet al problema de hallar una función armónica en un dominio acotado si es conocido su valor en la frontera.
Como las funciones armónicas son un caso particular de las funciones (φ, ψ)-bimonogénicas surge de manera natural estudiar un problema de Dirichlet del tipo:

$$D^\varphi D^\psi w = 0 \text{ en } \Omega,$$
$$w|_\Gamma = f,$$

donde $\Gamma = \partial\Omega$ es una superficie cerrada simple y suave de $\mathbb{R}^m$.
La resolución de este problema generalizado es más complicada que el problema clásico ya que los métodos convencionales para la resolución del problema original requieren el uso de un principio del módulo máximo para funciones armónicas, el cual no es generalizable a las funciones (φ, ψ)-bimonogénicas, como muestra el siguiente ejemplo:
Sea la función $f(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + 1$, $x \in \Omega$, donde Ω es la bola tetradimensional centrada en el origen con radio 1. Sean $\varphi = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, $\psi = (e_2, e_1, e_4, e_3)$.

$$D^\varphi D^\psi f = (e_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + e_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + e_4 \frac{\partial f}{\partial x_4})(e_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + e_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} + e_4 \frac{\partial f}{\partial x_3} + e_3 \frac{\partial f}{\partial x_4})$$

$$= e_1 e_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + e_2 e_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + e_3 e_4 \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} + e_4 e_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_4^2} = -2e_1e_2 - 2e_2e_1 - 2e_3e_4 - 2e_4e_3 = 0$$

Por tanto f es (φ, ψ)-bimonogénica en Ω. Además por la geometría de Ω

$$-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) \in [-1, 0], \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Luego $\forall x \in \bar{\Omega}\ f(x) \in [0,1] \Rightarrow |f(x)| \in [0,1]$, y como $|f(0)| = 1$ y $0 \in \Omega$ esto significa que no hay principio del módulo máximo para funciones (φ, ψ)-bimonogénicas.

Además se observa que $f/_\Gamma = 0$, sin embargo f es una función no nula en Ω. Esto quiere decir que este problema de tipo Dirichlet en general no tiene solución única ya que la función f es solución del problema

$$D^\varphi D^\psi w = 0 \text{ en } \Omega,$$
$$w/_\Gamma = 0$$

el cual tiene también como solución a la función idénticamente nula. Por tanto parar resolver el problema será necesario asumir condiciones adicionales.
Se verá que si el miembro derecho satisface ciertas condiciones se pueden encontrar funciones g y h tales que la solución del problema viene dada por

$$G(z) = -\frac{1}{\omega_m}\int_\Gamma \frac{(\zeta - z)_\psi}{|\zeta - z|^m} d^\psi\sigma(\zeta)g(\zeta) + \int_\Gamma K_{\varphi\psi}(\zeta - z)d^\varphi\sigma(\zeta)h(\zeta). \tag{2.17}$$

Para investigar cuáles son dichas condiciones se plantea:

$$f(t) = \lim_{z\longrightarrow t} G(z),\ z \in \Omega,$$

de donde, usando la continuidad de la segunda integral,

$$f(t) = -\lim_{z\longrightarrow t}\frac{1}{\omega_m}\int_\Gamma \frac{(\zeta - z)_\psi}{|\zeta - z|^m} d^\psi\sigma(\zeta)g(\zeta) + \int_\Gamma K_{\varphi\psi}(\zeta - t)d^\varphi\sigma(\zeta)h(\zeta),\ z \in \Omega.$$

Despejando y usando 1.2.2:

$$\int_\Gamma K_{\varphi\psi}(\zeta - t)d^\varphi\sigma(\zeta)h(\zeta) = f(t) - \frac{1}{2}(S_\Gamma^\psi g(t) + g(t)), \tag{2.18}$$

donde $S_\Gamma^\psi g(t)$ denota la versión singular de la integral

$$\int_\Gamma K_\psi(\zeta - t)d^\varphi\sigma(\zeta)g(\zeta).$$

En general dada una función f es complicado encontrar si existen funciones g y h que satisfagan la igualdad anterior. Sin embargo dicha ecuación permite resolver el problema para ciertos casos particulares no triviales de f.
Ejemplo:
Sea $f(t) = F(t) - \dfrac{t_\psi}{m}$, donde F es una función que sea el valor límite de alguna función

ψ-monogénica en Ω.

En este caso

$$F(z) = -\lim_{z \longrightarrow t} \frac{1}{\omega_m} \int_\Gamma \frac{(\zeta - z)_\psi}{|\zeta - z|^m} d^\psi \sigma(\zeta) F(\zeta) = \frac{1}{2}(S_\Gamma^\psi F(t) + F(t)) \tag{2.19}$$

Tómese en 2.17 $g(t) = F(t)$ y $h(t) = 1$. Como ya se vio anteriormente, por el Teorema de Stokes,

$$\int_\Gamma K_{\varphi\psi}(\zeta - t) d^\varphi \sigma(\zeta) = \int_\Omega K_\psi(\zeta - z) d\Omega(\zeta)$$

de donde

$$\int_\Gamma K_{\varphi\psi}(\zeta - t) d^\varphi \sigma(\zeta) = -\frac{t_\psi}{m}. \tag{2.20}$$

Sustituyendo (2.19) y (2.20) en (2.18) se verifica la igualdad necesitada.

Conclusiones parciales

En este capítulo se introdujo un operador diferencial de segundo orden que generaliza al laplaciano y que, por ende, conlleva a una generalización para las funciones armónicas, las llamadas funciones (φ, ψ)-bimonogénicas. Primeramente se observa con un contraejemplo como el trabajo con las mismas es más complicado que el trabajo con las armónicas por la no conservación de una importante propiedad de estas últimas. Luego se obtiene una fórmula que permite obtener los valores de una función (φ, ψ)-bimonogénica en el interior de un dominio a través de de los valores de ella y su derivadas parciales en la frontera de dicho dominio. Esto posibilita analizar problemas de frontera que generalizan los problemas clásicos para funciones armónicas. Primeramente se logra resolver el problema de hallar una función (φ, ψ)-bimonogénica dado el salto que experimenta en la frontera. Luego se estudia un problema de Dirichlet generalizado para el cual se obtiene una solución bajo condiciones adicionales.

Conclusiones

La investigación desarrollada cumplió el objetivo planteado y se obtuvieron fundamentalmente los siguientes resultados:

1- Definición de las funciones (φ, ψ)-bimonogénicas como soluciones de la ecuación diferencial $D^{\varphi}D^{\psi}f = 0$ donde $D^{\varphi}D^{\psi}$ es un operador que generaliza al laplaciano.

2- Demostración mediante un contraejemplo de que, a diferencia de las funciones armónicas, la propiedad de ser una función (φ, ψ)-bimonogénica no trasciende a todas sus partes k-vectoriales.

3- Obtención de una fórmula de representación que permite obtener los valores de una función (φ, ψ)-bimonogénica en el interior de un dominio a través de los valores de ella y sus derivadas parciales en la frontera de dicho dominio.

4- Solución del problema del salto para el operador $D^{\varphi}D^{\psi}$.

5- Demostración mediante un contraejemplo de que el principio del módulo máximo que se cumple para las funciones armónicas no se puede generalizar a las funciones (φ, ψ)-bimonogénicas.

6- Demostración de que a diferencia del problema de Dirichlet clásico el generalizado para el operador $D^{\varphi}D^{\psi}$ no necesariamente tiene solución única.

7- Solución parcial del problema de Dirichlet generalizado bajo condiciones adicionales.

Recomendaciones

Como futuros trabajos en torno a los resultados obtenidos se recomienda:

1- Considerar clases de superficies más generales que las suaves.

2- Considerar el problema de Dirichlet para clases de funciones más generales en el miembro derecho.

Bibliografía

[1] R. Abreu, J. Bory, A. Guzmán, and U. Kähler. On the Π-operator in Clifford Analysis. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2016. 7, 8, 9, 22

[2] L. E. Andersson, T. Elfving, and G. H. Golub. Solution of biharmonic equations with application to radar imaging. *J Comput Appl Math*, 94(2):153–180, 1998. 2

[3] H. Begehr. Integral representations in Complex, Hypercomplex and Clifford Analysis. *Integral Transforms and Special Functions*, 13, 2002. 14

[4] F. Brackx, R. Delanghe, and F. Sommen. Clifford analysis. *Pitman Research Notes Math. Ser. 76. Pitman: London*, 1982. 1

[5] W. Clifford. Applications of Grassmann's Extensive Algebra. *Americ. J. of Math. Pure and Appl*, 1878. 1

[6] R. Fueter. Analytische theorie einer quaternionenvariablen. *Comment. Math.*, 4:9–20, 1932. 1

[7] K. Gürlebeck, K. Habetha, and S. W. Holomorphic Functions in the Plane and n-Dimensional Space. *Birkhäuser Verlag*, 2008. 1, 18

[8] W. Hamilton. Elements of quaternions. *Longmans Green*, 1866. 1

[9] M. Hazewinkel. Fundamental solution. *Encyclopaedia of Mathematics,Springer*, ISBN 978-1556080104, 2001. 14

[10] D. Hestenes. A unified language for mathematics and physics. *Adv. in Applied Clifford Algebras 1*, No 1:5–29, 1991. 1

[11] V. Iftimie. Functions hypercomplexes. *Bull. Math. Soc. Sci. Math. R.S.R*, 9(57):279–332, 1965. 1

[12] L. M-C and L. H-C. Fast direct solver for the biharmonic equation on a disk and its application to incompressible flows. *Appl Math Comput*, 164(3):679–695, 2005. 2

[13] G. Moisil. Sur les systémes d'équations de M. Dirac, du type elliptique. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 191:1292–1293, 1930. 1

[14] A. Moreno, T. Moreno, R. Abreu, and J. Bory. Inframonogenic functions and their applications in three dimensional elasticity theory. 2016. 3